АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

4364—5314

*

№ 6 1958

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, Ю. В. Линник, А. Н. Колмогоров, А. И. Маркушевич, М. А. Наймарк, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, К. А. Рыбников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшков*

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 3
Преподавание математики 8
Основания математики и математическая логика 11
Теория чисел 13
Алгебра 17
Многочлены и линейная алгебра 18
Группы 19
Поля, кольца и структуры 23
Алгебраическая теория схем связи и управления 29
Топология 34
Теория функций действительного переменного 39
Теория множеств 43
Приближение функций полиномами и их обобщениями 47
Теория функций комплексного переменного 50
Дифференциальные уравнения 61
Обыкновенные дифференциальные уравнения 61
Уравнения в частных производных . . . 67
Приложения к физике, технике и естественным наукам 76
Интегральные уравнения 81
Приложения интегральных уравнений . —
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 84
Числовые ряды 85
Специальные функции 87
Интегральные преобразования и операционное исчисление 89
Приложения общих методов математического анализа 91
Функциональный анализ 91
Теория вероятностей 99
Математическая статистика 106
Теория игр и математическая экономика 116
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 118
Геометрия 123
Приложения геометрии 124
Элементарная геометрия 124
Проективная геометрия 125
Начертательная геометрия 126
Алгебраическая геометрия 127
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 130
Геометрия n-мерного пространства . . . 134
Теория относительности 139
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 140
Метрические методы в геометрии 144
Выпуклые многообразия 146
Численные и графические методы 148
Таблицы 153
Вычислительные машины и математические приборы 154
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
Авторский указатель 168

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

REFERATIVNYI ZHURNAL MATHEMATIKA

EDITOR *S. M. Nikolsky*
EDITORIAL BOARD: *P. S. Alexandrov, S. P. Finikov, A. N. Kolmogorov, Yu. V. Linnik, A. I. Marcushevich, M. A. Naimark, S. M. Nikolsky, V. V. Nemycky, P. S. Novikov, D. Yu. Panov, K. A. Rybnikov, N. V. Smirnov, I. N. Vekua*
EXECUTIVE SECRETARY *A. A. Konjushkov*

CONTENTS

General
- History. Biography
- Teaching of mathematics

Foundations. Mathematical logic
Theory of numbers
Algebra
- Polynomials, linear algebra
- Groups
- Fields, rings, lattices
- Algebraic theory of communication and control circuits

Topology
Theory of functions of real variables
- Theory of sets
- Approximations of functions by polynomials and by their generalizations

Theory of functions of complex variables
Differential equations
- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Applications to physics, technology and natural sciences

Integral equations
- Applications of integral equations

Calculus of variations
Analysis (other aspects)
- Numerical series
- Special functions
- Integral transforms, operational calculus
- Applications of general methods of mathematical analysis

Functional analysis
Theory of probability
- Mathematical statistics
- Theory of games, mathematical economics
- Applications of probabilities and statistical methods

Geometry
- Applications of geometry
- Elementary geometry
- Projective geometry
- Descriptive geometry
- Algebraic geometry
- Differential geometry of 3-dimensional space

Geometry of n-demensional space
- Theory of relativity
- Global theory of differentiable manifolds
- Metric methods in geometry
- Convex manifolds

Numerical and graphical methods
- Tables

Computers and mathematical devices
- Applications of computer devices

Author index

Editorial Office: Moscow, D-219, Baltijsky poselok, 42-B

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ МАТЕМАТИКА

Рефераты 4364—5314 **№ 6** **Июнь 1958 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

4364. В отделении физико-математических наук [Октябрьская сессия]. Вестн. АН СССР, 1957, № 12, 21—24

Юбилейная сессия Отделения физико-математических наук АН СССР в связи с 40-летием советского государства. Об успехах советской математики говорил во вступительной речи акад. Арцимович. Доклады были посвящены актуальным проблемам физики, астрономии, сейсмологии и метеорологии.

4365. На 15-й сессии Совета по координации научной деятельности Академии наук союзных республик и филиалов Академии наук СССР (25—26 февраля 1957 г.), Вестн. АН СССР, 1957, № 4, 74—84

4366. Третий Всесоюзный математический съезд. Коробов Н. М., Матем. просвещение, вып. 1, 1957, 177—178

4367. Основные достижения науки в Советском Казахстане. Сатпаев К. И., КазССР Ғылым Акад. хабаршысы, Вестн. АН КазССР, 1957, № 11, 20—30 (рез. каз.)

4368. Научная математическая сессия в Софии. Чакалов (Научна математическа сесия в София. Чакалов Л.), Списание Бълг. АН, 1957, кн. 1, 73—75 (болг.)

Информация о сессии, проходившей 10—14 октября 1956 г. См. также РЖМат, 1958, 9.

4369. Развитие связи между математикой, техникой и хозяйственной деятельностью в Австрии. Инцингер (Pflege der Beziehungen zwischen Mathematik, Technik und Wirtschaft in Österreich. Inzinger R.), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955 (1957), Nov., 1—4 (нем.)

Описывается деятельность математической лаборатории при Венской высшей технической школе. Не имея мощных электронных счетных машин, эта лаборатория решает задачи, возникающие главным образом в хозяйственной практике и в правительственных учреждениях. Выдвигается требование об учреждении в школе кафедры вычислительной математики.

И. Я. Депман

4370. Семинар по истории математических наук. Добровольский (Семінар з історії математичних наук. Добровольский В. О.), Вісник АН УССР, 1957, № 9, 65—68 (укр.).

Семинар работает с 28 февраля 1956 г. Руководит им академик АН УССР И. З. Штокало. Число участников достигло 30 человек. Заслушано 14 докладов по различным вопросам истории математики и механики.

4371. Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете. Немыцкий В. В., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 235—239

Краткий обзор деятельности семинара, организованного в МГУ в 1930 г. В. В. Степановым. В первый период исследования велись по общей теории динамических систем (А. А. Марков, В. В. Степанов, В. В. Немыцкий, М. В. Бебутов), теории почти периодических решений (В. В. Степанов, А. Н. Тихонов, А. А. Марков), теории устойчивости. В послевоенный период тематика расширилась, охватив основные вопросы классической качественной теории, общей теории динамических систем и их приложений. Формулировки конкретных результатов в заметке не приводятся, указываются основные темы исследований. К ним, в частности, принадлежат: приближенное качественное интегрирование, качественное исследование в целом систем уравнений, качественное исследование траекторий в пространстве, асимптотическое поведение решений линейных систем. Указываются связи семинара с семинарами, работающими в области качественной теории в Свердловске, Казани, Самарканде и других городах.

Н. Н. Симонов

4372. Значение современной физики для развития математики. Инфельд (Die Bedeutung der modernen Physik für die Entwicklung der Mathematik. Infeld L. Hauptref. 8. Poln. Mathematikerkongr., Warschau, Sept. 1953. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1954, 95—109) (нем.)

4373. Вычислительная техника в народном хозяйстве. Вавилова А. С., Приборостроение, 1957, № 11, 25—28

4374. Математика в общественных науках. Уинтроп (Mathematics in the social sciences. Winthrop Henry), School Sci. and Math., 1957, 57, № 1, 9—16 (англ.)

В докладе Научно-исследовательского Совета США рекомендуется ввести на первых курсах колледжей для студентов гуманитарных специальностей логику, теорию множеств, теорию отношений, аксиоматику и учение о математических моделях, теорию элементарных функций и вычислений и введение в анализ. На вторых курсах — продолжение анализа, теорию вероятностей и теорию матриц. Выражено пожелание, чтобы департаменты общественных наук проводили курсы и семинары по применению математического метода к общественным наукам.

Об использовании математики в общественных науках можно составить себе представление путем рассмотрения следующего примера, взятого из бихевиористской теории (теории общественного поведения). Речь идет о числе людей $N(t)$, до которых за время t дошел слух, распространяемый в обществе при следующих предположениях: каждый член общества («передатчик») имеет конечный круг знакомых D, которым он передает слух так, что D исчерпывается за k единиц времени. Тогда оказывается $N(t)=(m+1)^t$, где $m=D/k$.

Далее разбирается та же задача при более сложных условиях распространения слуха и поведения.
Библ. 10 назв. Г. П. Боев

4375. Математика и язык. Самуэль (Matematica y lenguaje. Samuel Pierre), Rev. mat., 1957, № 1, 12—21 (исп.)

Речь, произнесенная в Мексике на конференции Французского института Латинской Америки в 1955 г. Докладчик развивает положение Кондильяка: «Алгебра есть исключительно совершенный язык», излагая основные идеи математической логики.
И. Я. Депман

4376. Теория вероятностей и классификация наук. Пачеко-де-Аморин (O cálculo das probabilidades e a classificaçâo das ciências. Pacheco de Amorin Diogo), Ciencias, 1956, 21, № 3, 365—381 (исп.)

Речь, произнесенная на XXIII конгрессе португальско-испанской научной ассоциации в 1956 г. Поставив вопрос: является ли теория вероятностей наукой о природе или наукой о культуре, автор, изложив довольно подробно, но без приведения каких-либо новых точек зрения, историю теории вероятностей, приходит к заключению, что теория вероятностей есть наука о культуре. Приводится ряд ссылок на работы П. Сорокина, Крейга (Craig, 1731), Фомы Аквинского и др., не имеющие доказательной силы в математической статье.
И. Я. Депман

4377. Необходимые замечания к статье Коха «Эквивалентны или идентичны закон исключенного третьего и закон запрещенного противоречия?» Менде (Notwendige Bemerkung zu dem Aufsatz von Dr. Rolf Albert Koch: «Sind die Sätze vom verbotenen Widerspruch und ausgeschlossenen Dritten äquivalent oder miteinander identisch?». Mende Georg), Wiss. Z. Martin-Luther-Univ., Halle-Wittenberg, 1952/53, 2, № 8, Math.-naturwiss. Reihe, № 4, 441—444 (нем.)

Критика указанной в заголовке статьи (РЖМат, 1958, 2588). Автор утверждает, что за «смелой гипотезой» Коха скрыт в действительности недостаток его знаний, главным образом по математической логике и диалектике, этим основным проблемам, столкновения с которыми не удастся избегнуть вообще ни одному автору, избравшему предметом своего исследования логическую тему.

Указав далее на противоречивость и даже абсурдность приведенной Кохом системы праксиом, автор показывает, что само заглавие статьи, а значит и сама поставленная в ней проблема, в значительной степени лишены смысла и что если во всем этом и есть какой-либо смысл, то он уже давно и гораздо глубже был вскрыт Аристотелем. Автор считает совершенно бесспорной полнейшую несовременность как самой проблемы, так и методов, посредством которых Кох пытается ее решить. Менде формулирует ряд проблем, которыми, по его мнению, имело бы смысл заняться автору критикуемой статьи.
Б. Н. Пятницын

4378. Оперативная логика и математика. Вейцзеккер (Operative Logik und Mathematik. Weizsäcker C. F. von), Naturwissenschaften, 1957, 44, № 18, 482—485 (нем.)

Статья в сущности представляет собою рецензию на книгу Лоренцена (Lorenzen P., РЖМат, 1956, 5052 К).

4379. Системы нумерации и средства счета. Нягу (Sisteme de numeraţie şi mijloacele de calcul. Neagu Florea Gh.), Gaz. mat. şi fiz., 1957, B8, № 8, 394—402 (рум.)

Популярный очерк о системах нумерации при различных основаниях. Даются примеры. Автор особо характеризует двузначную систему нумерации и показывает ее преимущество для счетных машин.
А. Н. Гливич

4380 К. Развитие математического мышления. Введение в основные проблемы математики. Мешковский (Wandlungen des mathematischen Denkens. Eine Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik. Meschkowski Herbert. Braunschweig, Friedr. Vieweg und Sohn, 1956, 122 S., ill., 12,80 DM) (нем.)

Очерки популярного характера. Гл. I «Задачи» разъясняет их цель: раскрыть связи математики и философии и ознакомить с проблемами обоснования математики возможно более широкий круг людей. В гл. II «Основы греческой математики» автор рассматривает аксиоматическое построение геометрии в «Началах» Евклида, обращает внимание на недостатки его системы основных предложений. Глава содержит также изложение математических воззрений Платона. Гл. III «Путь к неевклидовой геометрии»; разъясняется постановка проблемы о параллельных, дается исторический очерк создания неевклидовой геометрии, приводится модель Ф. Клейна. Гл. IV. «Проблематика бесконечного»; трудности, связанные с введением в математику идеи бесконечного, иллюстрируются на примерах: апорий Зенона, парадоксов Галилея и Больцано. Аналогичный метод исчерпывания приводится как пример преодоления подобных парадоксов. Гл. V «Учение Кантора о бесконечных множествах»; рассматриваются элементы теории множеств, возражения Кронекера против введения актуальной бесконечности Кантором, взгляды последнего на основные понятия математики. Гл. VI «Антиномии и парадоксы»; указываются антиномии, к которым приводит понятие множества Кантора (множество всех множеств, множество всех тех множеств, которые не содержат сами себя в качестве элемента), излагается теория типов Рассела. Автор приводит аксиому Цермело и указывает теоремы, которые доказываются использованием этой аксиомы.

В гл. VII «Интуиционизм» в качестве его основных признаков отмечены: отказ от закона исключенного третьего, отклонение идеи актуальной бесконечности, стремление строить математику конструктивно. Автор указывает, что трудности, которые встречают интуиционисты при построении анализа, заставляют еще многих математиков придерживаться методов классического анализа. Гл VIII «Геометрия и опыт» содержит разбор требований, предъявляемых Гильбертом к системе аксиом (независимость, полнота, непротиворечивость), характеристику конвенционализма А. Пуанкаре. Гл. IX «Проблемы математической логики»: целесообразность введения в математику формализованного языка; основные понятия логики высказываний; система аксиом логики высказываний Гильберта, доказательство ее полноты и непротиворечивости; понятие об исчислении предикатов; «метафизическое содержание» математической логики и проблема общезначимости ее высказываний. Гл. X «Формализм»; характеризуется работа Гильберта по аксиоматическому построению математики, его стремление формализовать методы доказательств средствами математической логики.

Выясняются преимущества формалистического подхода, связанные с возможностью изучения изоморфных систем. В качестве примера общей математической теории, объединяющей различные области математики (теорию множеств, логику высказываний, теорию чисел, проективную геометрию), приводится теория структур. Критика формализма. Гл. XI «Проблема разрешимости»; указывается невозможность доказать непротиворечивость формальной системы сред

ствами этой же системы, невозможность определить числа с помощью системы аксиом; пример неразрешимой проблемы — по Гёделю. Автор считает необходимым реформировать математику на интуиционистских основах и отказаться, в частности, от использования совокупности трансцендентных чисел, имеющей мощность континуума. Гл. XII «Значение исследований по обоснованию математики для философии»; проводится мысль о необходимости для философов учитывать историю развития и современное состояние математики. А. В. Дорофеева

4381 К. Тезисы докладов Первой республиканской математической конференции. Сталинабад, 1957 (АН ТаджССР. Тадж. ун-т). Сталинабад, 1957, 16 стр.

4382 К. Прикладная математика и механика. Авторский и предм.-темат. указатели за 20 лет изд. АН СССР (1937—1956 гг.) с включ. предшеств. изд. «Вестн. механ. и прикл. матем.» (1929—1931 гг.) и «Прикл. матем. и механ.» (1933—1936 гг.) Ленингр. механ. о-ва. Сост.: Вильдт Е. О., Ландсберг Р. С., Щукина; Авторский и предм.-темат. указатели по серии «Инженерный сб.» том 1—24. Сост.: Дударова Г. И., Морозова Н. А. М., АН СССР, 1957, 96 стр., беспл.

4383 К. Торжественное открытие вычислительного центра (Политехнический институт в Милане) (Inaugurazione del centro di calcoli numerici (Politecn. di Milano). Cassinis Gino, Dadda Luigi. Milano, Tip. A. Cordani, 1956, 24 p.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 666, 433 (итал.)

4384 К. Мышление при помощи машин; изучение кибернетики. Латиль (Thinking by machine: a study of cybernetics. Latil Pierre de. Transl. from the French. London, Sidgwick and Jackson, 1956, xiii, 353 pp., ill., 45 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 366, 14 (англ.)

4385 К. Существование в математике; конференции, происходившие в Сорбонне с 29 марта по 7 апреля 1954 г. Бет (L'Existence en mathématiques, conférences faites à la Sorbonne du 29 mars au 7 avr. 1954 Beth Evert Willem. Paris, Gaut-hier-Villars; Louvain, E. Nauwelaerts, 1956, 61 p., 900 fr.); Bibliogr. France, 1956, 145, № 9, 198 (франц.)

4386 К. Математическая смекалка. Изд. 4-е стереотипн. Кордемский Б. А., М., Гостехиздат. 1957, 575 стр., илл., 9 р. 30 к.

4387 Ж. Математика и физика. Сухак гва мулли, Пхеньян, Ин-т физ.-матем. наук АН КНДР, 4 номера в год, 80 вон, (кор.)

В 1957 г. вышел первый номер журнала. В математической части содержит статьи: О Жен Хен Краевые задачи интегро-дифференциальных уравнений; Хан Хен Гон, Заметка об одном свойстве метризуемых пространств; Ли Ен Пир, К теории типично вещественных функций.

4388 Научный журнал высшей машиностроительной школы в Магдебурге. (Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Schwermaschinenbau Magdeburg, Selbstverlag, erscheint zwanglos, tauschweise zu erhalten) (нем.)

В 1957 г. вышел 1-й номер журнала на правах рукописи. Три статьи (из 11) математического содержания.

4389 Ж. Архив рациональной механики и анализа (Archive for rational mechanics and analysis. Ed. C. Truesdell. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 5 numbers annualy, 96 DM per vol.) (англ., нем., франц.)

Журнал начал выходить с сентября 1957 г. в издательстве Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, по 1 тому (5 номеров) ежегодно, стоимостью 96 марок за том.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

4390. Математика и наука в Китае и на Западе. Нидем (Mathematics and science in China and the West. Needham J.), Sci. and Soc., 1956, 20 № 4, 320—343 (англ.)

В древнем и средневековом Китае математическая культура была достаточно высокой, однако после XIV века ее дальнейшего развития не последовало. В Европе же, изменившись коренным образом в эпоху Возрождения, она начала принимать вид современной науки. Почему этого не произошло в Китае?

Автор, насколько возможно, основывается на конкретном материале, значительном по своему объему. В отличие от других западных историков, с которыми автор полемизирует в статье, развитие математики он связывает с социально-экономическими условиями общества. Последующий застой китайской науки произошел, по его мнению, из-за консервативности чиновничье-бюрократической системы, опека со стороны которой не могла дать мощного толчка для развития естествознания.

Приводятся сравнительные оценки природы китайской математики, ее социальной основы, с одной стороны, и характеристики процесса математизации естествознания в эпоху Возрождения в Европе — с другой. Последнее произошло благодаря введению в науку экспериментально-математического метода Галилея. Анализируя его, автор отмечает, что этот метод синтезирует в себе две части: экспериментальную, ведущую свое происхождение от методов практиков-инженеров, и теоретическую — от методов ученых-схоластов.

Автор называет имена китайских инженеров, которые можно сопоставить с европейскими и которые не уступали им по своему мастерству: цитирует отрывки из работ неоконфуцианцев, показывая принятие этой официальной в средневековом Китае философией наиболее умозрительной части метода. Таким образом, в Китае XIII—XIV вв. научная обстановка была приблизительно аналогична европейской, но дальнейшее развитие науки оказалось совершенно различным. Э. И. Березкина

4391. Математика и наука в Китае и на Западе. Нидем (Les mathématiques et les sciences en Chine et dans l'Occident. Needham Joseph), Pensée, 1957, № 75, 19—37 (франц.)

Перевод с английского (реф. 4390).

4392. Математические идеи в рукописях эпохи Муромати (XVI век). Оя, Кагакуси кэнкю, J. History Sci. Japan, 1956, № 39, 3—7 (японск.)

4393. Развитие численного обозначения. Джедел (The development of numerical notation. Jedel Peter H.), Cornell Engr, 1957, 23, № 1, 36—37 (англ.)

Сжатое и поверхностное изложение истории развития цифр и систем счисления. Неубедительная пропаганда перехода к двенадцатиричной системе с новыми знаками для цифр 10 и 11. Указывается на преимущество при сохранении английских мер—футов и дюймов. Э. Я. Кольман

4394. Влияние Августина на понимание математики в школе Галилея. Карруччо (Influenza agostiana sulla concezione delle matematiche nella scuola di Galileo. Carruccio Ettore),

Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 2, 307—309 (итал.)

Автор рассматривает: выражение Торричелли в определении логарифмической спирали «prima definitio et vera» («первое и истинное определение»), его представление, что математические положения «не являются людскими фантазиями, но божественными установлениями», а также слова Галилея в «Диалогах о двух системах мира», что «истина, которая познается при помощи математических доказательств, есть та же самая, которую знает божественная мудрость». Эти факты он необоснованно сближает с выражениями религиозного мракобеса Августина (354—430) (De Civitate Dei, кн. XII, 17): «божественный ум совершенно неизменный, вмещающий любую бесконечность и исчисляющий все бесчисленные вещи, не мысля их поочереди», и пытается на основании этого доказать, ссылаясь также на Энриквеса (Enriques F., Le matematiche nella storia e nella coltura, Bologna, 1938, p. 121), неверный тезис о жизненности августиновских понятий в школе Галилея. И. Н. Веселовский

4395. Математическая переписка между Торричелли и Кавальери. Леви (Carteo matematico entre Torricelli y Cavalieri. Levi Enzo), Rev. mat., 1957, № 1, 22—42 (исп.)

Доклад, прочитанный в Окасакском университете имени Хуареса (Мексика). Освещается деятельность Торричелли (1608—1647) как математика. Труды последнего были опубликованы только в 1750 г., когда сделанные им открытия (интегрирование x^n при любом рациональном значении показателя n положительном или отрицательном, общая формула для координат центра тяжести объемов, интегрирование подстановкой, употребление криволинейных координат, первое спрямление кривой, отличной от окружности, а именно логарифмической спирали) представляли только исторический интерес. Переписка между Кавальери и Торричелли охватывает шесть лет (1641—1647) и касается общих вопросов метода неделимых и его приложений, полемики с Гульденом (Centrobarica) и отношений с французскими математиками (Ферма, Роберваль). Приводится ход рассуждений Торричелли в доказательстве следующей теоремы: Дан сегмент $AFBHC$ конического сечения, основание AC которого перпендикулярно оси BD конического сечения; объем тела вращения, образованного этим сегментом, вокруг оси BD так относится к объему конуса с высотой BD и основанием AC, как сумма квадратов отрезков, проведенных параллельно AC из середины E оси BD до пересечения в точках G и F с образующей конуса и дугой конического сечения, относится к удвоенному квадрату отрезка EG между осью AD и образующей BGA конуса

$$V_{AFBHC} : V_{ABC} = (EF^2 + EG^2) : 2EG^2.$$

И. Н. Веселовский

4396. Об определениях, характеризующих прямую в евклидовом пространстве. Брузотти (A proposito di una caratterizzazione della retta negli spazi euclidei. Brusotti Luigi), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 33—39 (итал.)

Содержанием заметки является анализ и критическая оценка различных определений прямой линии, их сравнение и исторический очерк их развития.

В § 1 автор приводит определение Ганса Мормана (Einführung in die nicht-euklidische Geometrie, Leipzig, 1930): прямая линия характеризуется тем, что каждая ее часть подобна другой ее части. Далее автор отмечает, что это определение не пригодно для прямой линии в проективном пространстве.

В § 2 автор рассматривает определение, данное философом Гансом Корнелиусом, который вводит минимальное свойство прямой и указывает на применимость этого определения к прямым в неевклидовом пространстве.

Отмечается, что определение прямой, данное Морманом, может быть выведено из более общего определения Корнелиуса.

Взгляды Лейбница автор анализирует в § 3 и приходит к заключению, что Корнелиус в значительной части повторяет мнение Лейбница.

В заключение автор переходит к современным теоретико-групповым концепциям Клейна, изложившего их в своей Эрлангенской программе. М. П. Черняев

4397. Эмбер и Жордан, Роберваль и Рамус. Лебег (Humbert et Jordan, Roberval et Ramus. Lebesgue Henri), Enseign. math., 1957, 3, № 3, 188—215 (франц.)

Вводная лекция к курсу чистой математики, содержащая историю кафедры чистой математики в Collége de France, прочитанная Лебегом 7 января 1922 г. Содержит: обзор работ Эмбера (1859—1921) по алгебраической геометрии, теории абелевых функций и теории чисел; анализ работ Жордана (1838—1922) в области развития идей Галуа; сравнение методов исследования Эмбера и Жордана.

Робервaля автор считает одним из предшественников дифференциального и интегрального исчисления и ставит его в один ряд с Ферма, Паскалем, Дезаргом, Торричелли, Гюльденом и Кавальери. Приводится анализ работ Робервaля по механике.

Предшественник Робервaля Рамус (1515—1576) не был великим математиком. Но он был умелым механиком, талантливым картографом и оказал большое влияние на прогресс математики своими лекциями. С помощью своих учеников он создал учебники по математике, которые использовались в течение более чем 60 лет. Ю. С. Цапин

4398. Леонард Эйлер (К 250-летию со дня рождения). Смирнов В. И., Вестн. АН СССР, 1957, № 3, 61—68

Статья содержит краткие биографические сведения о Л. Эйлере, общие сведения о его научном наследии и краткий обзор его основных трудов. Последний построен оригинально и касается в основном теории чисел, понятия функций, вариационного исчисления, геометрии, механики и некоторых вопросов физики. Специально автор останавливается на отдельных сторонах философских взглядов Эйлера. Статья заканчивается общей оценкой роли Эйлера в истории науки. Г. К. Михайлов

4399. Леонард Эйлер. Краткая биография одного из наиболее знаменитых математиков XVIII века. Стивенс (Leonard Euler. A short biography of the most famous mathematicians of the 18th century. Stevens James), Michigan Technic, 1957, 75, № 5, 60, 68, 82, 96 (англ.)

Статья написана по материалам, восходящим в основном к двум старинным биографиям Л. Эйлера, написанным Фуссом и Кондорсе. Встречаются опечатки в фамилиях и числах (напр. Sievens вместо Sievers; Эйлер умер 76, а не 79 лет и др.). Нельзя согласиться со словами автора в последнем абзаце статьи, что «почти все его [Эйлера] теории и сочинения теперь отброшены». Г. К. Михайлов

4400. Леонард Эйлер. Бобков А. С., Костиков Л. М., Строит. пром-сть, 1957, № 4, 43—44

Заметка по случаю 250-летия со дня рождения Л. Эйлера. Авторы допускают неточности в датах прохождения Эйлером академической службы в Петер-

бурге. О вопросах строительной механики в трудах Эйлера см. более подробно в статье Е. Л. Николаи (Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та, 1939, № 44), а также стр. 436—454 его книги (РЖМех, 1956, 4968).

Г. К. Михайлов

4401. **Леонард Эйлер — к 250-летию со дня рождения. Рюдигер** (Leonhard Euler — zu seinem 250. Geburtstag. Rüdiger Dieter), Bergakademie, 1957, 9, № 4, 202—203 (нем.)

Краткий очерк, основной материал для которого взят из книги Шписа (O. Spiess) «Leonhard Euler» 1929.

Г. К. Михайлов

4402. **Математика (до XVIII в., в XVIII в., в первой половине XIX в) Юшкевич А. П.** В сб.: История естествозн. в России. М., АН СССР, 1957, т. I, ч. 1, 26—48; 215—272; т. I, ч. 2, 33—89

Три главы, являющиеся составной частью книги «История естествознания в России» (т. 1, ч. 1 и 2 М., 1957), охватывающей период от древнейших времен до первой половины XIX в. включительно.

В первой из глав рассматривается история математики в России до XVIII в. В ней излагается древнерусская нумерация, система мер, дробей, анализируются русские математические рукописи XVII в. В некоторых случаях автор приводит совершенно новый материал, например задачи, эквивалентные решению не определенных уравнений 1-й степени в целых числах, систем таких уравнений и суммированию геометрической прогрессии. Автор приходит к выводу, что русские математические рукописи находились в тесном родстве с наиболее популярными сочинениями по практической арифметике в Германии, Франции и Англии XVII в. Характерной особенностью наших рукописей являлось обилие подробно решенных задач: это делало их хорошим пособием для самостоятельного образования и, до некоторой степени, искупало догматизм изложения в целом.

Другая глава посвящена истории математики XVIII в. В ней сначала рассказывается об «Арифметике» Магницкого и о первых учебниках геометрии и тригонометрии, затем автор переходит к характеристике математики в Петербургской Академии наук. Он подробно анализирует творчество Леонарда Эйлера, специально останавливается на его «Введении в анализ бесконечно малых», на исследованиях по теории функций комплексного переменного, дифференциальном исчислении, интегральном исчислении, на его работах по дифференциальным уравнениям, вариационному исчислению, геометрии и теории чисел. Автор показывает, как многие методы Эйлера, которые были забыты в XIX в., возродились и успешно применяются в наше время. В этой же части рассказывается о творчестве петербургских академиков Даниила Бернулли и учеников Эйлера — академиков С. А. Котельникова, С. Я. Румовского, М. Е. Головина Н. И. Фусса, А. И. Лекселя, Ф. И.Шуберта. Автор специально останавливается на знаменитом споре о понятии функции, возникшем по поводу решения уравнения колебания струны. Наконец, он излагает вопросы обоснования математического анализа на рубеже XVIII и XIX вв. и проблемы теории рядов этого времени. Здесь он рассказывает о творчестве академика С. Е. Гурьева.

В третьей главе автор дает общую характеристику математики и математического образования в первой половине XIX в. и проводит сравнение развития науки в России и за рубежом. Он отмечает некоторые своеобразные моменты в развитии русской математики. Освещая творчество Н. И. Лобачевского— создателя первой системы неевклидовой геометрии, автор подчеркивает материалистические черты мировоззрения Лобачевского, останавливается на истории V постулата, рассказывает о проблеме геометрических свойств действительного мира, о трактовке вопроса непротиворечивости новой геометрии, об установлении ее связей с внутренней геометрией поверхностей и, наконец, о ее значении для развития науки XIX—XX вв. Он освещает также работы Н. И. Лобачевского по алгебре и математическому анализу.

Автор переходит затем к творчеству М. В. Остроградского, подробно излагая его работы по математической физике и математическому анализу. Он показывает, что М. В. Остроградский не только искусно применил, но и обобщил метод Фурье, начав исследование проблемы определения характеристических чисел краевой задачи и соответствующих им фундаментальных функций, а также вопроса о разложимости произвольной функции в ряд по фундаментальным функциям. В заключение автор говорит о жизни и творчестве В. Я. Буняковского.

И. Г. Башмакова

4403. **Открытие физико-математических факультетов университетов в России и выход в свет первого университетского курса аналитической геометрии. Глатенок В. Д.,** Уч. зап. Гомельск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 5, 3—34

Статья в основном посвящена постановке преподавания геометрии в XIX в. в Казанском, Харьковском и Московском университетах. В части, касающейся Казанского университета, приводится выдержка из конспекта Н. И. Лобачевского по преподаванию чистой математики в 1824/25 уч. году, на основании которой делается вывод, что объем сведений по аналитической геометрии в Казанском университете не уступал объему сведений соответствующего курса Московского университета.

На примере II тома «Курса математики» Т. Ф. Осиповского демонстрируется мысль, что возрастающее содержание геометрических курсов привело к необходимости создания отдельного курса аналитической геометрии. В характеристике «Главных оснований аналитической геометрии трех измерений» Д. М. Перевощикова подчеркивается его зависимость от Франкёра и Монжа, а также от учебников Маюрова и Севастьянова. Первым руководством, стоящим на уровне развития науки своего времени, автор считает «Курс аналитической геометрии» Н. Д. Брашмана (1836). Статья завершается краткими характеристиками книги Г. Салмона «Конические сечения и новейшие алгебраические и геометрические методы для исследования свойств кривых линий» (1847 г., русский перевод 1860 г.) и Н. П. Алексеева «Аналитическая геометрия на плоскости» (1865 г.).

Е. С. Шатунова

4404. **Статистика как наука в представлении русских статистиков второй половины XIX и начала XX вв. Дружинин Н. К.,** Сб. научн. работ. Моск. ин-та нар. х-ва, 1957, вып. 11, 49—69

Выделяются следующие направления в определении и оценке предмета статистики:

1. Общесоциологическое направление. Основатель Кетле (И. Вернадский, Э. Вреден, Н. Бунге, Н. Карасевич).

2. Отграничение статистики от других общественных наук по ее «численному» методу (Ю. Янсон, Е. Рахмилович, Г. Симоненко, А. И. Чупров, В. Васильев).

3. Статистика — наука о массовых явлениях общественной жизни (Л. Федорович, Л. Ходский, К. Воблый, Н. Каблуков).

4. Статистика, — это только статистика населения (А. Анцыферов).

5. Статистика как чисто эмпирическая наука (А. А. Чупров, В. Борткевич, Ю. Янсон, А. И. Чупров).

6. Статистические методы применимы в равной мере к изучению как общественных явлений, так и явлений

природы. Это направление развивалось под влиянием успехов математической статистики (Е. Анучин, А. А. Чупров).

Дается критическая характеристика каждого направления, в частности освещается влияние распространения методов математической статистики на определение предмета статистики.

Библ. 34 назв. Л. Е. Майстров

4405. **Математика первой половины XX века. Северн** (La matematica della prima meta del secolo XX. Severi F.), Scientia (Ital.), 1957, 92, № 1, 20—26 (итал.); Suppl., 11—17 (франц.)

В XIX в., кроме разработки вопросов анализа бесконечно малых и алгебры, возникли новые направления, получившие полное развитие в конце XIX и в XX в. К ним относится проективная, дифференциальная и неевклидова геометрии, критическое обоснование анализа и углубление понятий о функции, производной, интеграле и дифференциальных уравнениях, а также разработанная в самом конце XIX в. теория множеств Кантора. К числу новых направлений в геометрии относится также алгебраическая геометрия Клейна, геометрия многих измерений и топология. Из алгебры новая математика заимствовала необычайно ценное понятие группы, давшее начало дискретной теории групп (алгебраические уравнения) и теории групп непрерывных преобразований (Софус Ли), связанной с дифференциальными уравнениями.

Критическое направление в XX в. привело к созданию различных видов математической логики, в том числе многозначных логик (polivalente), характерных для нашего века и связанных с развитием ядерной физики и волновой механики. В настоящее время аксиоматика доминирует во всей структуре новейшей алгебры. Абстракция и крайняя строгость являются в настоящее время характерными чертами математической молодежи; они представляют силу, но одновременно и опасность: преувеличенная абстракция ведет к осушению источников интуиции, а чрезмерная строгость является иллюзией: каждая эпоха имеет свою строгость, которой она достойна. Современная алгебра, которую автор предпочитает называть «точной», не занимается отношениями между численными количествами, но только между совместными аксиоматическими системами, не обращая внимания на внутреннюю природу их элементов. Все доминирующие понятия относятся к теории групп (полугруппы, кольца, идеалы, тела).

Для анализа XX в. характерно широкое развитие теории функций действительного переменного и дальнейшее уточнение понятия интеграла (интеграл Лебега — 1902 — и его дальнейшее развитие — интеграл Лебега — Стилтьеса). Фундаментальным понятием нового анализа является возникшее из вариационного исчисления понятие функционала. В функциональный анализ входят все задачи анализа, многие задачи геометрии, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения.

В области теории чисел надо отметить изыскание новых средств для решения основных теорем (вроде известной теоремы Ферма). Один из важнейших представителей русской теоретико-числовой школы И. М. Виноградов доказал догадку Гольдбаха, что всякое число может быть представлено в виде суммы трех простых чисел; кроме того, отмечены замечательные результаты индийского математика Рамануджана (умер в 1920 г.) относительно распределения простых чисел.

Не последнее место в области анализа занимают успехи, достигнутые в теории аналитических функций одного и нескольких переменных и в связанной с ней теории внешних дифференциальных форм Пуанкаре и Картана.

В области геометрии XX в. надо отметить две основные линии развития — дифференциальную и алгебраическую. К первой относится интегральная геометрия Бляшке, процветающая в Италии дифференциально-проективная и риманова геометрия, прогресс которой был связан с введением абсолютного дифференциального исчисления (Риччи—Курбастро и Леви—Чивита), без которого были бы невозможны общая теория относительности и последние унитарные теории Эйнштейна. Наконец, развитие алгебраической геометрии в XX в. привело к монументальному зданию, в котором приходится удивляться и гармонической красоте построений и обширности связей со всеми другими областями математики и, в частности, с топологией, арифметикой и дифференциальной геометрией.

Статья заканчивается списком математиков XIX (29 имен) и XX (164 имени) вв., труды которых послужили основой для рассматриваемых в ней предметов. И. Н. Веселовский

4406. **Севери в кресле Эйнштейна. Сегре** (Severi al seggio di Einstein. Segre Beniamino), Civiltà macchine, 1957, 5, № 2, 90—92, 100 (итал.)

Перечисляются научные заслуги Севери (род. 1879 г.), в связи с избранием его в Парижскую академию наук на место, которое до этого занимал Эйнштейн. Подчеркивается интерес Севери к преподаванию математики, чему посвящены более 40 из его 300 работ. Главные научные заслуги Севери имеет в алгебраической геометрии. Одним из последних достижений его является создание теории квазиабелевых функций. И. Я. Депман

4407. **Севери как человек. Рацци** (Severi «en pantoufles». Razzi Aldo), Civiltá macchine, 1957, 5, № 2, 93, 100 (итал.; рез. англ.)

Рассказывается об отце Севери — нотариусе, близком друге Гарибальди, поэте; приводится рассказ Севери о его лекциях в Японии и о двух поездках в СССР (1925 и 1956 гг.). Севери подчеркивает громадный прогресс науки в СССР за 30-летний период как результат исключительных забот правительства о развитии науки. И. Я. Депман

4408. **Илья Несторович Векуа. (К пятидесятилетию со дня рождения.)** (Успехи матем. наук., 1957, 12, № 4, 227—234

4409. **Казимеж Куратовский. Борсук** (Kazimierz Kuratowski. Borsuk Karol), Nauka polska, 1957, 5, № 2, 91—95 (польск.)

4410. **Уточнение биографии Пеано. Кассина** (Un chiarimento sulla biografia di G. Peano. Cassina Ugo), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 2, 310—312 (итал.)

Выясняется, что Пеано учился в гимназии и лицее в Торино; указывается литература по биографии Пеано. И. Я. Депман

4411. **Николае Чорэнеску. Каюс** (Nicolae Ciorănescu. Caius Iacob), Gaz. mat. şi fiz., 1957, A9, № 4, 214 (рум.)

Некролог Н. Чорэнеску (1903—1957), профессора политехнического института в Бухаресте. Его работы (свыше 100) относятся к следующим областям: дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных), интегральные и функциональные уравнения, теория функций комплексного переменного, теоретическая механика. А. Н. Гливич

4412. **Эдмунд Уиттекер (1873—1956). Эрдейи** (Sir Edmund Whittaker 1873—1956. Erdélyi A.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, 11, № 57, 53—54 (англ.)

4413. **Некролог Эли Картана. Финци** (Obituary: Elie Cartan. Finzi Arrigo), Riveon lemat, 1954, 8, 76—80 (евр.; рез. англ.)

4414. **Энрико д'Овидио** (Enrico d'Ovidio), Archimede, 1957, 9, № 4—5, 218—220 (итал.)

4415. **Анри Пуанкаре (1854—1912). Мюрберг** (Henri Poincaré (1854—1912). Myrberg P. J.), Arkhimedes, 1957, № 1, 17—21 (финск.)

Очерк жизни и творчества Пуанкаре, написанный на основании личных впечатлений от присутствия на праздновании 100-летия со дня рождения Пуанкаре в Париже и очерков Лебона и Дарбу (указаны в библиографии). И. Я. Депман

4416. **А. М. Ляпунов. К столетию со дня рождения.** Вестн. истории мировой культуры, 1957, № 4, 266—267

4417. **Герман Вейль (1885—1955). Шеваллей, Вейль** (Hermann Weyl (1885—1955). Chevalley C., Weil A.), Enseign. math., 1957, 3, № 3, 157—187 (франц.)

Биографический очерк и анализ некоторых работ Г. Вейля. Авторы характеризуют его как математика, чьи работы во многом способствовали переходу от классической математики, основанной на понятии действительного числа, к современной математике, в основе которой лежат понятия структуры, аналитического комплексного многообразия, векторной алгебры, представлений групп и т. д.

Отмечается, что в ранних работах Вейль исследовал циклические подгруппы и подгруппы с одним параметром тора конечного числа измерений и очень близко подошел к понятию почти периодической функции.

Далее разъяснены идеи и работы Вейля, опирающиеся на впервые данное им определение поверхности Римана и поверхности вообще в топологии. Охарактеризованы результаты Вейля, вытекающие из данного им доказательства принципа Дирихле.

В 1926 г. Вейль ввел алгебру групп, исходя из исследований компактных групп Ли. Вейль замечает, следуя Гурвицу, что теория представлений специальной линейной комплексной группы G эквивалентна теории представлений группы G_u, образованной унитарными матрицами, принадлежащими G. Вейль получил из ограничений, наложенных на унитарную группу G_u, не только теорему о полной приводимости для G, но также воспользовался ими для вычисления характеров и степеней простых представлений G.

Пусть g — полупростая комплексная алгебра Ли и G — присоединенная к ней группа, взятая в матричной форме относительно подходящим образом выбранного базиса из g. Вейль вводит группу G_u унитарных операций из G и ее алгебру Ли G_u. Группа G_u компактна, и теория представлений G_u эквивалентна теории представлений g. Вопрос сводится к тому, чтобы показать, что G_u имеет конечную фундаментальную группу. Вейль нестрого доказал, что G_u имеет конечную фундаментальную группу. Затем он доказал полную приводимость представлений g и точно определил характер и степень простого представления данного главного веса.

Наконец, отмечается, что в честь 70-летия Вейля его друзья и ученики опубликовали том избранных отрывков из его работ. Последние классифицированы в рассматриваемой статье с указанием соответствующих страниц упомянутого тома. См. также РЖМат, 1957, 14. Ю. С. Цапин

4418. **Научная деятельность Дж. фон-Нёймана. Голдстайн, Вигнер** (Scientific work of J. von Neumann. Goldstine Herman H., Wigner Eugene P.), Science, 1957, 125, № 3250, 683—684 (англ.)

Первая значительная работа Нёймана (1903—1957) относится к математической логике. Она касается аксиоматики теории множеств и гильбертовой теории доказательств. Нёйман впервые показал, как связаны парадоксы с теорией типов, и доказал, что понятие множества не ведет к противоречию тогда и только тогда, когда его мощность не совпадает с мощностью множества всех вещей.

В работах о гильбертовых пространствах и операторах в них Нёйман изучил структуру гильбертовых пространств, изучал линейные операторы и все алгебры операторов. Используя преобразование Кели $(H+iI)\times\times(H-iI)^{-1}$, он вывел спектральное свойство самосопряженных операторов и аналогичную теорему для нормальных операторов. В сотрудничестве с Мурреем он развил теорию слабозамкнутых самосопряженных алгебр («колец») ограниченных линейных операторов. Это привело к возникновению целой школы по изучению колец операторов и их абстрактных аналогов.

Нёйман показал, что каждая подгруппа матричной группы есть группа Ли, что каждая компактная группа может быть аппроксимирована группой Ли и что, следовательно, каждая компактная локально евклидова группа есть группа Ли. Большое влияние на развитие теории динамических систем оказало его доказательство эргодической теоремы.

Нёйман в теории игр разработал аксиоматическую систему, допускающую описание всех сложных обстоятельств игры, зависящих от стратегии, случая или хитрости (тактики) игроков. Совместно с Моргенштерном им была написана книга «Теория игр и экономический режим» (The Theory of Games and Economic Behavior).

Нёйман внес значительный вклад во все отрасли математики (кроме, пожалуй, топологии и теории чисел) и в теоретическую физику. Физики считают, что лучшие математические работы Нёймана были вызваны возможностью их приложений к физике. В последние годы жизни Нёйман интересовался вычислительными машинами. При его консультации была разработана счетная машина JOHNIAC. Нейман был автором ряда статей по теории строения и функционирования вычислительных машин, а также по теории кодирования и программирования. Г. И. Боев

4419. **Анри Дюлак (Некролог). Жюлиа** (Notice nécrologique sur Henri Dulac. Julia Gaston), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 15, 913—916 (франц.)

Краткое описание научной деятельности А. Дюлака (1870—1955). Основные направления его исследований: особые точки дифференциальных уравнений, предельные циклы. В частности, Дюлаку принадлежит доказательство теоремы, высказанной ранее И. Бендиксоном о конечном числе предельных циклов уравнения $X\,dx+Y\,dy=0$, где X и Y — полиномы. Автор считает этот результат одним из наиболее существенных и точных в современной теории. Перечня научных работ Дюлака нет. Н. И. Симонов

4420. **О некоторых армянских математиках XIX века. Еганян А.**, Сб. научн. тр. Арм. гос. заочн. пед. ин-та, 1957, № 4, вып. 1, 65—204 (арм.)

4421. **Краткая история математических и физических развлечений** (Petite histoire des récréations mathématiques et physiques), Atomes, 1957, 12, № 139, 377—380 (франц.)

Излагается краткая история научно-занимательной литературы во Франции и рекламируется современная французская литература этого жанра. Ю. С. Цапин

4422. **Математический Мюнхаузен. Шилло** (A mathematical Munchausen. Schillo Paul), Math. Mag., 1956, 30, № 2, 55—61 (англ.)

Юмористическая биография американского математика (вероятно вымышленного) Исаака Нейштадта.
И. Н. Веселовский

4423. **Указатели [авторов, названий статей и имен в первых девяти и десятом выпусках «Историко-математических исследований»]**. В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 10. М., Гостехтеориздат, 1957, 767—820

4424. **Письмо в редакцию «Историко-математических исследований». Гнеденко Б., Погребысский И.** В сб.: Истор.-матем. исследования, вып. 10, М., Гостехтеориздат, 1957, 766.

Авторы сообщают о пропуске по их вине в статье «О развитии математики на Украине» (РЖМат, 1957, 1048) абзаца, посвященного истории алгебры.

4425 К. **Избранные работы. Андреев К. А.** Харьковский ун-т, 1955, 92 стр., илл.

После предисловия «К. А. Андреев», содержащего краткую историческую справку о трудах Андреева К. А., следует статья «О сетях конических сечений», представляющая собой выдержки из работы «О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий» (Москва, 1879 г.). В ней решается задача: «Построить коническое сечение, проходящее через точки пересечения двух данных конических сечений и делящее гармонически отрезок между данными двумя точками».

Даются определения сетей конических сечений I, II и III рода, изучаются их свойства, а также различные связи между ними. Определяется коллинеация и корреляция между сетями конических сечений и проводятся построения, устанавливающие эти соответствия между двумя сетями одного и того же рода. Вводится понятие сопряженности между двумя пучками конических сечений и между сетями одного и того же рода.

Далее следуют две статьи «О многоугольниках Понселе», посвященные доказательству следующей теоремы Понселе: «Если какой-либо многоугольник вписан в одно коническое сечение и описан около другого, то он может перемещаться непрерывно, не лишаясь этого отношения к обоим коническим сечениям, т. е. оставаясь вписанным в первое и описанным около второго», К. А. Андреев приводит доказательство этой теоремы, удовлетворяющее следующим условиям: 1. Доказательство должно быть основано только на методах проективной геометрии. 2. В доказательстве не должны использоваться метрические соотношения.

Приведенное доказательство этой теоремы основано на полярной теории кривых II порядка. В первой статье теорема Понселе доказана для треугольников, во второй полученные результаты распространяются на многоугольники.

В третьей и последней статье «Некоторые обобщения в вопросе о разложении определенного интеграла по формуле, предложенной П. Л. Чебышевым» с помощью тождества

$$\left|\int f_i f_k\, dx\right| = \frac{1}{n+1}\int \dots \int \left|f_i(x_k)\right| \left|\varphi_i(x_k)\right| dx_1 \dots dx_{n+1}$$

(где $|a_{ik}|$ обозначает определитель порядка $n+1$ $(i, k = 0, 1, \dots, n)$ с элементами a_{ik}) выводится и исследуется дополнительный член в ряде, предложенном П. Л. Чебышевым (Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, 1882, стр. 94).

В конце книги даны «Примечания», где, кроме ссылок к указанным статьям, содержатся доказательства ряда теорем для пятимерного пространства, являющихся аналогами теорем, доказанных в первой статье. Книга рассчитана на читателей, знакомых с основами проективной геометрии.
В. А. Маневич

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

4426. **О применении знаний по математике на производстве выпускниками средней школы. Мухина Л. М.**, Уч. зап. Выборгск. гос. пед. ин-та, 1957, 2, 88—95

Описание результатов работы по изучению некоторых наиболее распространенных профессий машиностроительной промышленности (слесарей, токарей, фрезеровщиков) с точки зрения использования молодыми рабочими знаний по математике, полученных ими в средней школе. Сформулированы следующие выводы:

1. Знания по математике, которые дает средняя школа, используются молодыми рабочими при чтении технических чертежей и технологической карты, при выполнении несложных расчетов, связанных с работой у станка, при пользовании измерительными инструментами и, наконец, при овладении необходимыми для творческого труда специальными техническими знаниями.

2. Овладение специальными техническими знаниями, необходимыми для творческого труда, является основной формой использования знаний выпускника средней школы.

3. Содержание школьных программ по математике должно в значительной мере определяться содержанием математической стороны того теоретического материала, к которому обращается молодой рабочий в процессе своей творческой трудовой деятельности
Е. В. Вандышева

4427. **Вопрос о предмете и методах математики на повторительно-обобщающих уроках в десятом классе. Деев А. А.**, Уч. зап. Омского гос. пед. ин-та, 1957, вып. 6, 19—41.

Рассматривается содержание уроков математики в X классе, посвященных выяснению вопроса о предмете и методах математики.

Указывается, что всякая наука характеризуется своей системой понятий, в которой отражаются закономерности действительного мира. Перечисляются основные вопросы, которые изучаются в школьном курсе алгебры, геометрии и тригонометрии. Делается экскурс в область истории развития основных математических понятий; подчеркивается, что на протяжении истории математики боролись два взгляда на природу ее понятий — материалистический и идеалистический. Дается краткая характеристика этих взглядов. Рассматривается вопрос о том, как формировались математические абстракции в процессе исторического развития, указывается, что их возникновение связано с решением задач, поставленных перед людьми самой жизнью. В связи с этим отмечается, что главным фактором, определяющим развитие математики, служит постоянное противоречие между запросами практики и несовершенством теории.

Особое внимание обращается на историю развития понятия числа, понятия функциональной зависимости, возникновению нового взгляда на геометрию в связи с открытиями Н. И. Лобачевского. Отмечаются элементы высшей математики, используемые в средней школе.

Указывается связь математики с другими науками, в частности с геодезией и астрономией.
Е. В. Вандышева

4428. **Отношение отечественной методико-математической мысли XIX и начала XX века к вопросу об использовании элементов историзма в преподавании математики в средней школе. Хохлов А. Т.**, Уч. зап. Щербаковск. пед. ин-та, 1956, вып. 1, ч. 2, 201—286.

Статья состоит из четырех глав:

1) Идеи историзма в первой половине XIX в. (1805—1857).

2) Идеи историзма во второй половине XIX в. (1857—1890).

3) Вопросы историзма в конце XIX и начале XX в. (1890—1917).

4) Эволюция идей историзма в XIX и начале XX в.

В начале каждой из трех первых глав дается краткая характеристика соответствующей исторической эпохи, подчеркиваются основные идеи в области народного образования. В связи с анализом деятельности наиболее видных математиков-педагогов того времени рассматриваются их взгляды на вопрос о введении элементов историзма в процессе преподавания математики в средней школе.

В первой главе автор отмечает имена таких известных математиков первой половины XIX в., как Д. М. Перевощиков, Н. И. Лобачевский, Ф. И. Буссе, П. С. Гурьев, В. Я. Буняковский, М. В. Остроградский. Приведенный в статье анализ их деятельности показывает, что все они в большей или меньшей степени в своем преподавании использовали историко-математический материал и высказывались за употребление элементов историзма в курсе математики средней школы. Основным способом сообщения учащимся историко-математических сведений большинство из них считало ознакомление учащихся с биографиями выдающихся математиков.

Во второй главе рассматриваются идеи таких известных ученых и педагогов-математиков как П. Л. Лавров, П. Л. Чебышев, А. Ю. Давидов, А. Ф. Малинин, В. А. Латышев и др. Подробно дан анализ педагогической деятельности и высказываний в области методики преподавания математики П. Л. Лаврова, приводится анализ учебного плана гимназий, предложенного Лавровым. Лавров увязывает содержание используемых элементов историзма с возрастными особенностями учащихся. В начальных классах он предлагает ограничиваться, в основном, жизнеописаниями ученых и крупнейшими открытиями, излагая эти сведения в яркой форме. В последующих классах учеников следует знакомить и с научной деятельностью ученых, имена которых им уже известны. Наконец, историко-математические сведения по плану Лаврова должны найти себе место в заключительном курсе истории, где они рассматриваются как составные элементы общей истории человеческой культуры. Идея такого курса впервые высказана в России Лавровым. Относительно разновидностей элементов историзма можно сказать, что его столь широкий план историзма в обучении охватывает собой все области истории математики. Следует отметить, что Лавров нигде не выражает мысли о материалистическом происхождении математики.

Анализируя деятельность, высказывания в области преподавания математики и учебно-методические пособия других математиков-педагогов второй половины XIX в., автор приходит к выводу, что все они придавали большое значение элементам историзма в преподавании математики. В заключение главы отмечается, что вопросы историзма в преподавании математики в 80-х годах XIX в. оказываются предметом оживленного обсуждения на Западе, особенно в Германии и Франции. Появляются обстоятельные сочинения по истории математики, отражающие последние данные археологических находок (папирус Ринда и др.), например, сочинения Зутера (1873), Ганкеля (1874), М. Кантора (1880) и др. Французские и немецкие педагоги-математики снабжают свои учебники многочисленными примечаниями историко-математического содержания (например, Бальтцер, Шуберт и др.). Появляются и специальные высказывания в пользу историко-математических сообщений. Несомненно все это влияло в свою очередь на развитие историко-математической и методической мысли в России.

Вся третья глава посвящается в основном анализу деятельности В. В. Бобынина. Автор отмечает, что В. В. Бобынин был первым русским ученым, посвятившим всю свою жизнь истории математики и, в первую очередь, истории развития физико-математических наук в России. Бобынин был не только историком, но и педагогом-математиком в широком смысле слова. Его глубоко интересовала постановка преподавания математики в школах, развитие кругозора учителей, вопросы методики математики. Через все педагогические высказывания Бобынина красной нитью проходит одна идея: чтобы правильно поставить преподавание математики в школе, учителя должны знать историю математики и вводить ее элементы в преподавание. Приводится анализ работ В. В. Бобынина, имеющих непосредственное отношение к данному исследованию, причем вопрос об элементах историзма в преподавании математики рассматривается в связи с другими важными проблемами, содержащимися в работах Бобынина. Попутно рассматриваются также и взгляды других известных педагогов-математиков того времени: С. И. Шохор-Троцкого, В. П. Шереметевского, М. Г. Попруженко, К. М. Щербины и др.

В заключительной главе содержится схематическая картина развития идей историзма в преподавании математики в XIX и начале XX в. Эта картина является систематизацией материала, рассмотренного в предшествующих главах.

Примечание референта. Реферируемая статья является пособием для учителей математики средней школы и студентов педагогических вузов.

Е. В. Вандышева

4429. К вопросу об активизации преподавания предметов физико-математического цикла. Эрдниев П. М., Сов. педагогика, 1957, № 8, 22—31

Приводятся результаты опытной проверки, задача которой состояла в том, чтобы выявить понимание учащимися взаимоотношения между прямыми и обратными задачами, между прямыми и обратными теоремами, между исходным суждением и обращенным суждением вообще. Проверка показала большие недостатки в знаниях учащихся по этим вопросам. Подчеркивается чрезвычайная важность рассмотрения обратных вопросов в обучении математике и физике и отмечаются недостатки программ по этим предметам. (Например, линейная функция изучается в течение 5 лет, но обратная к ней задача — нахождение формулы линейной зависимости по двум ее точкам — не входит в программу).

Попутно поднимаются и другие вопросы, например об исследовании задач и их решений, о нахождении приближенных численных значений ответов, о проверке решения.

Е. В. Вандышева

4430. Вопросы развития понятия о числе в русских учебниках алгебры XIX века. Беляев В. И., Уч. зап. Коломенск. пед. ин-та, 1956, 1, 53—84

Автор описывает, как в нашей стране в XIX и начале XX в. в учебниках алгебры излагалось учение о числе (положительные и отрицательные числа, действительные числа и комплексные числа). Он показывает, что в тот период существовали и вели борьбу два направления: «реальное», представители которого стремились разъяснить учащимся действительный смысл новой категории чисел, и «символическое», сторонники которого вводили новые виды чисел, как символы, подчиняющиеся согласно условным соглашениям, лишь формальным целям (удобство преобразований алгебраических выражений, выполнимость обратных действий, разрешимость уравнений). Автор доказывает, что в начале XX в. ведущие методисты-математики (А. П. Ки-

селев, А. Н. Глаголев, К. Ф. Лебединцев) придерживались «реального» направления. По мнению автора, борьба между сторонниками «реального» и «символического» направлений отражала борьбу материализма и идеализма в математике. В. Н. Молодший

4431. Южно-азиатская конференция, посвященная вопросу математического образования. Бомбей, 22—28 февраля 1956 г. (Conferința sud-asiatică privitoare la învățămîntul matematic. Bombay, 22—28 febr., 1956), Gaz. mat. și. fiz., 1957, A9, № 9, 493—495 (рум).

4432. Место математики в американской школе и подготовка учителей. П. Пине (Matematikkens plass i amerikansk skole og lærerutdanning, П. Piene Kay), Nord. mat. tidskr., 1957, 5, № 2, 65—83, 119 (норв.; рез. англ.)

Продолжение обзора математического образования в школах США сравнительно с обучением в скандинавских странах (РЖМат, 1958, 1745). Формулируются выводы:

Преподавание в американской школе характерно стремлением к активизации работы учащихся, для чего служат лабораторные занятия, приборы и фильмы, не всегда с одинаковым успехом.

Тесты и экзамены в американской школе более распространены, чем в скандинавской. Применяются при этом такие тесты, которые направлены на культивирование механических навыков.

Подготовка учителей производится в учительских колледжах и университетах. Большое внимание в них уделяется вопросам общего воспитания и педагогическим вопросам, от чего страдает глубина изучения самого предмета математики. В США ощущается большой недостаток в квалифицированных учителях, труд которых оплачивается ниже по сравнению с оплатой скандинавских учителей и вообще низко. И. Я. Депман

4433. Роль статистики в общих математических курсах в колледжах. Розенберг (The role of statistics in general mathematics courses for college freshmen. Rosenberg Herman), Math. Teacher, 1957, 50, № 5, 343—346 (англ.)

Объединенная комиссия математической ассоциации Америки, Национальный совет учителей математики, Комитет Гарвардского университета и другие организации поддерживают идею включения статистики в общий курс математики. По вопросу об объеме и содержании статистики, включаемой в общий курс в колледжах, мнения разделились. Одни (Абендерфер) считают, что изучению статистики следует посвящать целый семестр, другие опасаются введения столь большого объема статистики. Автор приводит ряд соображений о включении отдельных вопросов статистики, учитывая профиль высшего учебного заведения. Г. П. Боев

4434. Теоремы Гюльдена и их применение в средней школе. Цопан (Teoremele lui Guldin și aplicațiile lor în școala medie. Țopan Gh.), Gaz. mat. și fiz., 1957, A9, № 8, 423—431 (рум.)

Краткая историческая справка о теоремах Гюльдена (1577—1643). Показывается, как при помощи этих теорем вычисляются: боковая поверхность цилиндра, объем цилиндра; боковая поверхность конуса, объем конуса; боковая поверхность усеченного конуса и его объем; площадь поверхности, полученной от вращения правильной ломаной линии многоугольника вокруг оси, которая проходит через центр многоугольника и объем тела вращения; площадь шара и его объем; объем сферического сегмента, объем и площадь сферической зоны. А. Н. Гливич

4435. Математический кабинет. Оливотто (Un cabinet de matematică. Olivotto I.), Gaz. mat. și fiz., 1957, A9, № 8, 432—433 (рум.)

Описывается математический кабинет в средней школе № 10 имени Зои Космодемьянской в Бухаресте, в котором проводятся занятия математического кружка. Наглядные пособия, которыми оборудован кабинет, изготовлены силами учащихся.

А. Н. Гливич

4436. Картина активного обучения. Бурненго (Panorami di insegnamento attivo. Burnengo Giuseppe), Archimede, 1956, 8, № 6, 254—256 (итал.)

Автор излагает свой опыт активизации преподавания математики.

4437. Подобие. Соотношение растяжения. Количественное соотношение. Польстер (Ähnlichkeit. Streckenverhältnisse. Zahlenverhältnisse. Polster Paul), Math. und Phys. Schule, 1957, 9, № 9, 479—484 (нем.)

Обосновывается тезис о целесообразности включения подобия фигур в курс математики 7-го и 8-го классов средней школы ГДР. Приводятся примеры использований подобия в школьном обучении и на практике.

Е. В. Вандышева

4438. Об учебнике тригонометрии С. И. Новоселова, изд. 1956 г. Барыбин К. С., Голуб А. М., Чертков И. Я., Беккер М. Б., Матем. в школе, 1957, № 5, 65—87

4439. Об учебнике алгебры А. Н. Барсукова, ч. I для VI—VII классов семилетней и средней школы. Сикорский К. П., Бекаревич А. Н., Буданцев П. А., Матем. в школе, 1957, № 5, 46—65

4440. Из опыта обучения логарифмической линейке в школе. Эппель Б. С., Матем. в школе, 1957, № 6, 59—67

4441 К. Основы математики. Ч. I. Цвирнер (Istituzioni di matematiche. Parte I, 4 ed. Zwirner Giuseppe. Padova, Casa ed. dott. A. Milani, 1957, XI+361., ill., 3000 L.) (итал.)

Книга представляет собой первую часть курса общей математики для высших технических учебных заведений. Кроме обычного материала по аналитической геометрии и математическому анализу, в книге содержится некоторый материал по школьному курсу математики и по вопросам высшей алгебры, а также глава по теории вероятностей и теории ошибок. Отсутствуют введение, предисловие и предметный указатель. М. К. Керимов

4442 К. Педагогика математики. Мрочек, Филиппович. Предисловие и перевод с русского. Митринович О. Д. (Pedagogija matematike. Istoriske i metodske studije. T. I. Mročck V., Filipović F. Prev. s rusk. Beograd, Nolit, 1957, 315 s., il.) (сербо-хорв.)

Перевод изданной в 1910 г. в Петербурге книги под тем же заглавием. В предисловии дается общая оценка книги, обзор ряда советских методических работ и биографическая справка о втором авторе книги Ф. В. Филипповиче, сведения о котором отсутствовали в нашей литературе.

Примечание референта. Книга Мрочека и Филипповича, оказавшая в свое время влияние на оживление преподавания математики, вместе с тем вызвала ряд критических замечаний.

И. Я. Депман

4443 К. Специальный курс тригонометрии. (Учебн. пособие для пед. ин-тов и ун-тов). Изд. 3-е. Новоселов С. И. М., «Сов. наука», 1957, 492 стр., илл., 10 р. 15 к.

4444 К. Метод математической индукции. Пособие для учителя. Депман И. Я. Л., Учпедгиз, 1957, 72 стр., 80 к.

4445 К. Сборник задач по высшей математике (Для втузов). Изд. 4-е, стереотип. Минорский В. П. М., Гостехиздат, 1957, 359 стр., илл., 6 р. 10 к.

4446 К. Элементы истории математики в программе втуза. Турчанинова З. И. Владивосток, Приморск. кн. изд-во, 1956, 20 стр., беспл.

4447 К. Математика для специалистов по электронике, с приложениями. Норделман, Смит (Mathematics for electronics, with applications. Nordelman Henry Mortimer, Smith Frederick Whittle. New York—London, McGraw—Hill, 1956, viii, 391 pp. 52sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 356. 14 (англ.)

4448 Д. К вопросу преподавания понятия функции в курсе алгебры средней школы (на материале школ города Кировабада Азербайджанской ССР). Мамедов М. А. Автореф. дисс. канд. пед. н., Азерб. гос. пед. ин-т, Кировабад, 1957

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, А. С. Есенин-Вольпин*

4449. Степени неразрешимости, связанные с классами формализованных теорий. Феферман (Degrees of unsolvability associated with classes of formalized theories. Feferman Solomon). J. Symbolic Logic, 1957, 22, № 2, 161—175 (англ.)

Реферируемая работа посвящена выяснению связи между перечислимыми подмножествами натурального ряда и проблемами разрешимости формализованных теорий и относится к направлению, основанному Постом (Post E., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 284—316).

Автор рассматривает теории T, формализованные в узком исчислении предикатов с отношением тождества. Каждая частная теория T определяется различием в нелогических константах, т. е. индивидуальными функциями и предикатами и классом предложений V_T, выводимых в узком исчислении с тождеством. Множество нелогических констант теории предполагается конечным.

Каждое выражение или последовательность выражений ξ теории T имеет гёделев номер ξ^*.

Каждое множество X выражений из T определяет множество X^* номеров этих выражений. Теория T называется аксиоматизируемой, если существует множество A предложений T, из которых логически выводимы формулы из V_T (и только они) и A^* рекурсивно.

Основной вопрос статьи: какие степени неразрешимости перечислимых множеств V_T^* возникают, когда T пробегает значения из некоторого класса теорий τ.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Каждому множеству X соответствует последовательная теория $T(X)$ такая, что 1) X и $V_{T(X)}^*$ имеют одинаковую степень неразрешимости, 2) если X рекурсивно перечислимо, то $T(X)$ аксиоматизируема.

Теория T называется креативной, если множество V_T^* креативно, N — означает натуральный ряд.

Теорема 2. Пусть даны последовательная теория T с бесконечной последовательностью термов $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \ldots$, не содержащих переменных и какая-либо формула $x \leqslant y$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) для каждого $n \in N$ $\forall x\,(x \leqslant \Delta_n \longleftrightarrow x = \Delta_0 \vee x = \Delta_1 \vee \ldots \vee x = \Delta_n) \in V_T^*$; 2) для каждого $n \in N$ $\forall x\,(x \leqslant \Delta_n \vee \Delta_n \leqslant x)$; 3) каждая рекурсивная функция определима в T; 4) T аксиоматизируема.

В таком случае теория T креативна. Согласно результату Майхилла, такая теория T имеет наивысшую степень неразрешимости.

$T^{(P)}$ — теория, получаемая из T добавлением к ней предиката P. Доказывается, что если P — одноместный предикат, непостоянный в T, то $T^{(P)}$ аксиоматизируема (конечно аксиоматизируема, креативна) тогда и только тогда, когда аксиоматизируема (конечно аксиоматизируема, креативна) T.

Конечно аксиоматизируемая теория Q, построенная Робинсоном, как показывает автор, креативна. τ_0 — класс теорий, в каждой из которых Q «достаточно просто» интерпретируется. Тогда все теории τ_0 креативны. τ_0 содержит, по мнению автора, все интересные в математическом отношении теории.

Автор критикует утверждение Майхилла (РЖМат, 1957, 2844) о том, что креативна всякая теория, неразрешимость которой доказана средствами следующих двух теорем: 1) формальная система, в которой представимо всякое рекурсивно перечислимое множество, неразрешима; 2) если теория $\sum_0$ неразрешима и переводима в $\sum$ (т. е. имеется алгоритм, сопоставляющий каждой формуле Φ_0 из $\sum_0$ некоторую формулу Φ из $\sum$, доказуемую в $\sum$ в том и только в том случае, если Φ_0 доказуема в $\sum_0$), то и $\sum$ неразрешима. Это утверждение, оказывается, остается недоказанным. Теорема 2 и некоторые другие результаты получены как раз в связи с этим обстоятельством.

В заключение автор ставит вопрос о существовании конечно-аксиоматизируемой теории с произвольной степенью неразрешимости перечислимого множества.

А. А. Мучник

4450. О степенях рекурсивной неразрешимости. Спектор (On degrees of recursive unsolvability. Spector Clifford), Ann. Math., 1956, 64, № 3, 581—592 (англ.)

Автор дает решение некоторых проблем, поставленных в хорошо известной работе Клини и Поста (РЖМат, 1956, 1910).

Первая из них состоит в том, обращается ли утверждение $a \leqslant b \to a' \leqslant b'$ (*) для произвольных степеней неразрешимости a и b. Доказывается:

Теорема 1. Для каждой степени d существуют степени a и b такие, что $a' \cup b' = a \cup b = a' = b' = d'$ & $a \mid b$ & $d < a < d'$ & $d < b < d'$ (доказательство проводится путем построения функций α и β, имеющих соответственно степени a и b, и $d < a$, $d < b$, $a' \cup b' \leqslant a \cup b \leqslant d'$). Поэтому (*) не обращается, ибо $a' = b'$, но $a \mid b$, а также $a' = d'$, но $a > d$. Кроме того, отсюда следует, что каждая полная степень d' есть точная верхняя грань (объединение) меньших степеней a и b, $d' = a \cup b$, a, $b < d'$. Однако не каждая степень обладает таким свойством, как показывает теорема 4 реферируемой статьи.

Автор в свою очередь ставит проблему: существуют ли степени a и b такие, что а) $a' | b'$ или б) $a | b$ & $a' < b'$.

Утвердительный ответ на а) следует из результата Фридберга (реф. 4451): всякая степень $\geqslant 0'$ полна.

В теореме 2 доказывается, что для всякой степени d существуют степени b_1 и b_2 такие, что

$$b_1' \cup b_2' = (b_1 \cup b_2)' = b_1' = b_2' =$$

$$= d' \,\&\, b_1 | b_2 \,\&\, d < b_1 < d' \,\&\, d < b_2 < d'$$

(в теореме 1 $a' \cup b' < (a \cup b)'$, ибо $d' < d''$). Клини и Пост (РЖМат, 1956, 1910) доказали существование степеней a и b, не имеющих точной нижней грани, т. е. что степени не образуют структуры.

Из теоремы 3 следует, что степени арифметических множеств не образуют структуры, а именно, существуют степени a и b (обе $< 0'$) без точной нижней грани. Оказывается также, что полуструктура степеней не является ω-полной относительно точной верхней грани. Более того, последовательность $a, a', a'', \ldots$ не имеет точной верхней грани (как вообще всякая строго возрастающая последовательность степеней). Эта теорема гласит: если $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ и $A(a, j)$ — двуместный предикат степени a такой, что $\lambda a A(a, j)$ имеет степень a_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, то существуют степени b_1 и b_2 такие, что (A) $b_1 < a'$ и $b_2 < a'$, (B) $a_j \leqslant b_1$ и $a_j \leqslant b_2$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ и (C) для каждой степени d, $d < b_1$, $d < b_2$ существует степень a_j, $d < a_j$. (Можно указать $A(a, j)$ такой, что $a' = 0'$. Поэтому степени b_1, $b_2 < 0'$ не имеют точной нижней грани.)

Перечисленные теоремы доказываются методом, примененным в работе Клини и Поста.

Однако наиболее интересным и трудным результатом автора является доказательство неплотности полуструктуры степеней. А именно, для всякой степени a существует степень c, $a < c < a''$, такая, что между a и c не содержится ни одной степени b.

В частности, существуют минимальные перекурсивные степени. (Из результатов референта (РЖМат, 1957, 49) следует, что степени перечислимых множеств, а также множеств $\leqslant 0'$, образуют плотное множество).

Доказательство последней теоремы потребовало дальнейшего развития метода Клини—Поста. Полученные автором результаты имеют большое значение для исследования степеней неразрешимости. А. А. Мучник

4451. Критерий полноты степеней неразрешимости. **Фридберг** (A criterion for completeness of degrees of unsolvability. Friedberg Richard), J. Symbolic Logic, 1957, 22, № 2, 159—160 (англ.)

Дается ответ на ряд вопросов, поставленных в статье Клини и Поста (РЖМат, 1956, 1910) о существовании полных независимых степеней между a и a', а также между a и $a^{(n)}$, не сравнимых со степенями $a', a'', \ldots, a^{(n)}$.

Решение этих задач вытекает из доказанной автором теоремы: Для каждой степени a существует степень b такая, что $b' = b \cup 0' = a \cup 0'$. Отсюда следует, что всякая степень $a \geqslant 0'$ полна ($a \cup 0' = a = b'$). Комбинируя метод данной заметки и метод, примененный автором при решении проблемы Поста (РЖМат, 1958, 1769), по утверждению автора, можно построить степень $a < 0'$ такую, что $0' < a' < 0''$.

А. А. Мучник

4452. О соотношениях между основными свойствами конструктивных функций. **Заславский И. Д., Цейтин Г. С.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 180—181

Вводятся понятия конструктивной вещественной функции, интегрируемой по Риману, и дифференцируемой конструктивной вещественной функции. Обобщенным интегралом на $[a, b]$ авторы называют предикат P над парами (f, I), состоящими из конструктивных функций f и конструктивных вещественных чисел I, удовлетворяющий следующим условиям: 1) если $f = g$ и $I_1 = I_2$, то $P(f, I_1)$ равносильно $P(g, I_2)$; 2) если $P(f, I_1)$ и $P(f, I_2)$, то $I_1 = I_2$; 3) если $P(f, I_1)$ и $P(g, I_2)$, то $P(f + g, I_1 + I_2)$; 4) если $f \geqslant 0$ и $P(f, I)$, то $I \geqslant 0$; 5) если $f(x)$ — полигональная функция, то $P\left(f, \int_a^b f(x)\,dx\right)$.

Формулируются следующие теоремы:

Теорема 1. Для всякого натурального m существует конструктивная последовательность сегментов с рациональными концами $[\alpha_n, \beta_n]$ такая, что для любого конструктивного вещественного числа x существует такое n_0, что $x \in [\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}]$, и для любого l $\sum_{n=1}^{l} (\beta_n - \alpha_n) < 2^{-m}$.

Теорема 2. Если конструктивная последовательность $[\alpha_n, \beta_n]$ такова, что последовательность сумм $\sum_{n=1}^{l} (\beta_n - \alpha_n)$ конструктивно сходится к некоторому пределу, то существует конструктивное вещественное число x, не входящее ни в один из промежутков $[\alpha_n, \beta_n]$.

Теорема 3. Существует непрерывная конструктивная функция, не интегрируемая по Риману на $[0, 1]$.

Теорема 4. Существует непрерывная конструктивная функция, не имеющая первообразной на $[0, 1]$.

Теорема 5. Существует такая непрерывная конструктивная функция $f(x)$, что $P(f, I)$ невозможно ни для какого обобщенного интеграла P на $[0, 1]$.

Н. М. Нагорный

4453. О применении структур в логике. **Расева, Сикорский** (An application of lattices to logic. Rasiowa H., Sikorski R.), Fundam. math., 1955, 42, № 1, 83—100 (англ.)

Статья содержит результаты изучения исчисления высказываний с кванторами. Авторы разработали свои методы и использовали их в своих предыдущих работах (РЖМат, 1955, 4824, 4825). Кванторы, связывающие переменные высказывания, интерпретируются как бесконечные суммы и произведения в соответствующих алгебрах (матрицах), которые являются структурами с псевдодополнением и единицей. Рассматриваются следующие исчисления высказываний с кванторами: $S_\varkappa$ (классическое исчисление), S_λ (модальное исчисление Льюиса), S_γ (интуиционистское исчисление Хейтинга) и S_μ (минимальное исчисление Йогансона). Для каждого из этих исчислений авторы формулируют необходимые и достаточные условия того, что какая-нибудь формула в указанных исчислениях является теоремой. Для неклассического исчисления эти условия можно сформулировать в топологической форме. Кроме того, авторы доказали следующие теоремы для неклассических исчислений:

1) Если дизъюнкция $\alpha + \beta$ есть теорема в S_γ (в S_μ), то или α или β является теоремой в S_γ (в S_μ); эта теорема имеет место также для исчисления S_λ, если $\alpha + \beta$ заменить на $\Box(\alpha + \beta)$, где $\Box$ — знак необходимости.

2) Если экзистенциальная формула $\sum_p \alpha(p)$ является теоремой в S_γ (в S_μ), то существует такая формула β, что $\alpha(\beta)$ есть теорема в S_γ (в S_μ); эта теорема верна также для исчисления S_λ, если $\sum_p \alpha(p)$ заменить на $\sum \Box \alpha(p)$.

3) В каждой из неклассических систем S_λ, $S_\varkappa$, S_μ существует бесконечно много замкнутых формул, не эквивалентных друг другу.

4) Существует преобразование ψ множества формул исчисления S_γ в множество формул исчисления S_λ, которое по сути дела является переводом, потому что имеет место следующее: формула α исчисления S_γ является теоремой в этом исчислении тогда и только тогда, если $\psi(\alpha)$ является теоремой в S_λ. R. Suszko

4454. От классических антиномий до логики Феврие-Детуш. Мок (Des antinomies classiques à la logique de Mme Février-Destouches. Moch François), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 12, 1562—1563 (франц.)

Классические антиномии исчезают, как только мы отказываемся от классической интерпретации предложений как истинных или ложных и допускаем третье значение «пренебрегаемых» — (méprisable) предложений. С этой точки зрения рассматривается парадокс лжеца; никаких других антиномий автор не рассматривает. Таким образом, в связи с изучением антиномий автор приходит к рассмотрению трехзначной логики, совпадающей с той, которую ввела Феврие-Детуш (Entretiens d'Amersfoort, 1938) в связи с изучением элементарных частиц. Отрицание пренебрегаемого предложения пренебрегаемо, конъюнкция пренебрегаема, коль скоро пренебрегаем хоть один из ее членов, дизъюнкция пренебрегаема лишь в случае, когда пренебрегаемы оба члена. В этой логике различается произведение (т. е. конъюнкция) разложимых и неразложимых предложений; наряду с отрицанием N, переставляющим утверждение и отрицание, имеется отрицание I, переставляющее утверждение и пренебрежение; различаются сильная и слабая импликация и эквивалентность (identité), но обо всем этом сказано в реферируемой статье явно недостаточно.

А. С. Есенин-Вольпин

4455. Логика позиций. Мок (La logique des attitudes. Moch François) C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 16, 1943—1945 (франц.)

Позиция (attitude) — это пара чисел (i, j), каждое из которых может принимать одно из трех значений: — 1, 0, 1. Позиции ставятся в соответствие с предложениями. При этом первый индекс i равен 1, если известно, что предложение является истинным (у автора — принятым, proposition acceptée). равен —1, если известно, что предложение не является истинным, и равен 0, если неизвестно, является ли предложение истинным. Аналогично, второй индекс j равен 1, если известно, что предложение является ложным (отвергнутым, proposition rejetée), —1, если известно, что предложение не является ложным, и 0, если неизвестно, является ли предложение ложным. Индексы 1 и —1 называются окончательными (fixés), а индекс 0 — предварительным (en attente). Позиция называется окончательной, если оба ее индекса окончательны. Каждому предложению ставится в соответствие (в некоторой данной теории) не более 4 позиций, в том числе одна окончательная. Окончательная позиция (1, —1) означает, что предложение истинно, (—1, 1) — предложение ложно, (1, 1) — предложение содержит свободную переменную и может быть как истинным, так и ложным, (—1, —1) — предложение неформализуемо (n'est pas formalisable), например (РЖМат, 1957, 6809), если P есть предложение «P ложно», то P неформализуемо.

Если (i, j) есть позиция для предложения P, то (j, i) есть позиция для предложения $\neg P$.

Если (i, j) есть позиция для предложения P, а (i', j') — позиция для предложения P', то позиция (I, J) для предложения $P \& P'$ определяется следующим образом: $(I, J) = (-1, -1)$, если известно, что P и P' &-несоединимы (пример: P есть предложение «P' содержит $P \& P'$», а P' есть предложение «$P \& P'$ ложно»), $I = -1$, если известно, что P и P' не могут быть истинны одновременно: $I = 0$, если $i = i' = 1$ и неизвестно, могут ли P и P' быть истинны одновременно; $J = 0$, если $j = j' = 1$ и неизвестно, &-соединимы P и P' или нет; $J = 1$, если известно, что P и P' &-соединимы и не могут быть истинны одновременно; в остальных случаях I есть наименьший из индексов i, i', а J есть наибольший из индексов j, j'.

Аналогично определяется позиция для дизъюнкции двух предложений.

Как следует из этих определений, позиция для самого предложения совпадает с позицией для отрицания его отрицания; позиция для отрицания конъюнкции совпадает с позицией для дизъюнкции отрицаний и т. д., как в классической логике.

Доказательство от противного допускается во всех случаях, где исключена возможность позиции (—1, —1).

Вводится понятие логического момента (instant logique), определяемого как множество позиций, принимаемых ее предложениями в согласии с аксиомами этой теории и изложенными правилами. Для каждой данной теории множество логических моментов частично упорядочено; именно, момент t предшествует моменту t', если каждая позиция, относительно которой t отличен от t', является в t предварительной.

Отмечается, что предлагаемая логика охватывает ранее предложенные автором системы логики (C. r. Acad. sci., 1951, 232, № 2, 201—202; РЖМат, 1957, 6809; реф. 4445) и логику, предложенную г-жой Феврие-Детуш (Mme Février-Destouches, Entretiens d'Amersfoort, 1938).

Утверждается, что «логика позиций» дает одновременно теорию произвольного макроскопического объекта (как классическая логика) и теорию произвольного микроскопического объекта (как логика г-жи Феврие-Детуш) и что она преодолевает классические антиномии.

Э. С. Орловский

См. также: 4375.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

4456. Об экспонентных суммах. Хуа Ло-гэн (On exponential sums. Hua Loo-keng), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1957, 1, № 1, 1—4 (англ.)

Пусть $k \geqslant 2$ — целое; $(h, q) = 1$. При любом $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{x=1}^{p} \exp \frac{2\pi i h x^k}{q} = \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{q} \exp \frac{2\pi i h x^k}{q} + O(q^{1/2+\varepsilon}).$$

Эта оценка основана на теореме Вейля (Weil A. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1941, 27, 345—347).

Ю. В. Линник

4457. О наименьшем первообразном корне простого числа. Эрдёш, Шапиро (On the least primitive root of a prime. Erdös Paul, Shapiro Harold N.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 1, 861—865 (англ.)

Доказывается новая лемма о неглавных характерах $\chi \bmod p$. Пусть S и T — две системы чисел таких, что в S и в T нет чисел, попарно сравнимых (mod p); $N(S)$, $N(T)$ — количество чисел в S и T. Тогда:

$$\Big|\sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} \chi(u+v)\Big| \leqslant (pN(S)N(T))^{1/2}.$$

При помощи ее улучшается оценка для наименьшего первообразного корня $g(p)$ Хуа Ло-гэна (Hua L. K., Bull. Amer. Math. Soc., 1942, 48, 726—730); получается $g(p) = O(m^c p^{1,2})$, где $c > 0$ — константа, а m — число различных простых делителей $p-1$.

Ю. В. Линник

4458. Асимптотическая формула в теории чисел. Халберстам (An asymptotic formula in the theory of numbers. Halberstam H.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 84, № 2, 338—351 (англ.)

Рамануджан (Ramanujan S., Collected papers, p. 137) указал гипотетическую формулу:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \sigma_\alpha(\nu)\sigma_\beta(n-\nu) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \times$$

$$\times \frac{\zeta(\alpha+1)\zeta(\beta+1)}{\zeta(\alpha+\beta+2)}\sigma_{\alpha+\beta+1}(n) = o(\sigma_{\alpha+\beta+1}(n)),$$

где $\sigma_c(n)$ — сумма c-ых степеней делителей n, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — константы.

Для случая $\alpha+\beta<1$ доказывается более точное утверждение:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \sigma_\alpha(\nu)\sigma_\beta(n-\nu) = A_1\sigma_{\alpha+\beta+1}(n) + A_2 n^\alpha \sigma_{-\alpha+\beta+1}(n) +$$

$$+ A_3 n^\beta \sigma_{\alpha-\beta+1}(n) + A_4 n^{\alpha+\beta}\sigma_{-\alpha-\beta+1}(n) +$$

$$+ O(n^{\omega_1}(\ln n)^{3+\varkappa}),$$

где A_1 — константа Рамануджана, A_2, A_3, A_4 — константы, выражаемые через ζ-функцию Римана; $\omega_1 = 3/4 + (\alpha+\beta)/2$, если $\alpha+\beta<1/2$, $\omega_1 = 1/2+\alpha+\beta$, если $\alpha+\beta \geqslant 1/2$; $\varkappa = 1$, если $\alpha+\beta = 1/2$, $\varkappa = 0$, если $\alpha+\beta \neq 1/2$. Если $\alpha+\beta \geqslant 1/2$, остаточный член может поглотить часть аппроксимирующей суммы.

Ю. В. Линник

4459. Об одном приложении нового метода к теории дзета-функции Римана. Туран (Über eine Anwendung einer neuen Methode auf die Theorie der Riemannschen Zetafunktion. Turán Paul), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1955—1956, 5, № 4, 281—285) (нем.; рез. англ., франц., русск.) Работа содержит условное доказательство оценки

$$N(\alpha, T) < T^{5(1-\alpha)/2}$$

для $1-d_2 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $N(\alpha, T)$ — число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Доказательство базируется на гипотезе автора. Пусть R — прямоугольник $T \leqslant t \leqslant T+1$, $1/2+\delta \leqslant \sigma \leqslant 1$; δ, $\varepsilon > 0$; прямоугольник $U \subset R$ и определяется условиями: 1) $\alpha - \varepsilon \lg \varepsilon^{-1} \leqslant \sigma \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau+1$. 2) U примыкает к другому прямоугольнику $U_1 = [\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1; |t-\tau| \leqslant \omega, |\tau_1 - \tau| \leqslant \omega/2, \omega > 0]$, который не содержит нулей $\zeta(s)$. Автор требует, чтобы U содержал не более чем $\varepsilon \lg T$ нулей $\zeta(s)$.

Н. Г. Чудаков

4460. Об однозначности функционального продолжения. Лампрехт (Zur Eindeutigkeit von Funktionalprimdivisoren. Lamprecht Erich), Arch. Math., 1957, 8, № 1, 30—38 (нем.)

Пусть K — поле постоянных, x трансцендентно над K; A — сепарабельное конечное расширение $K(x)$, $\mathfrak{p}$ — простой дивизор K. Назовем функциональным простым дивизором такой дивизор $\mathfrak{P}$ поля A, продолжающий $\mathfrak{p}$, для которого $|x|_{\mathfrak{P}} = 1$. Существует конечное число значений $\mathfrak{P}$, продолжающих $\mathfrak{p}$ для данного x. Пусть $K\mathfrak{p}$ и $A\mathfrak{P}$ — поля классов вычетов соответственно по mod $\mathfrak{p}$ и mod $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}$ называется инертным относительно x, если A является полем инерции над $K(x)$ относительно $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}$ постоянно над K, если поле $K\mathfrak{P} = K\mathfrak{p}$ является точным полем постоянных для $A\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ — регулярен, если этот дивизор инертен для некоторого x и постоянен.

Теорема 1. Если существуют два различных регулярных продолжения $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$, то существует такое $x \in A \setminus K$, для которого $\mathfrak{p}$ имеет только эти два продолжения $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$.

Пусть $g(A/K)$ — жанр поля A над K, $G(A/K)$ — наименьшее значение $g(A/K)$, которое можно достигнуть конечным расширением K. Поле A называется консервативным, если $g(A/K) = G(A/K)$. В противном случае оно называется неконсервативным. Для консервативного случая имеет место

Теорема 2. Если $g(A/K) \geqslant 2$, то для каждого $\mathfrak{p}$ существует самое большее одно регулярное $\mathfrak{P}$, причем

$$g(A\mathfrak{P}/K\mathfrak{p}) \geqslant \frac{1}{2}(g(A/K)+1).$$

Для неконсервативного случая имеем:

Теорема 3. Если A сепарабельно над K в смысле Шевалле и $G(A/K) \geqslant 2$, то для каждого $\mathfrak{p}$ существует самое большее одно регулярное продолжение $\mathfrak{P}$, причем

$$G(A\mathfrak{P}/K\mathfrak{p}) \geqslant \frac{1}{2}(G(A/K)+1).$$

Н. Г. Чудаков

4461. Достаточные условия справедливости гипотезы Римана. Фёлькер (Condiciones suficientes para la validez de la hipotesis de Riemann. Voelker Dietrich), Rev. Univ. nac. Tucuman. Fac. cienc. exactas y tecnol., 1954 (1955), A10, № 1-2, 141—149 (исп.; рез. нем.)

4462. Обобщения основных функций теории чисел. Фёлькер (Generalizacion de funciones fundamentales de la teoria de los numeros. Voelker Dietrich), Rev. Univ. nac. Tucuman. Fac. cienc. exactas y tecnol., 1954 (1955), A10, № 1—2, 137—139 (исп.; рез. нем.)

Даются обобщения известных в теории чисел функций $\lambda(n)$ и $\mu(n)$. Приводятся преобразования Лапласа суматорных функций указанных обобщенных функций, которые связывают последние с дзета-функцией Римана. Указывается, что абсциссы сходимости полученных интегралов расположены в отрезке $[0, 1]$.

Э. Апарисио

4463. Собственные значения операторной дзета-функции. Абдуллаев Х. А., Тр. Узбекского ун-та, 1956, № 65, 93—111

Рассматривается операторная ζ-функция Л. Г. Шнирельмана—Н. П. Романова, $\zeta(s+\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{s+\lambda}$ (λ — линейный оператор) и в некоторых случаях исследуются собственные значения, т. е. точки s, для которых $\zeta^{-1}(s+\lambda)f(x)$ не существует. Например, при $\lambda = -a\frac{d}{dx}$, $a = \alpha+\beta i$ (α, β реальны), $f(x) =$

$= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, собственные значения образуют ряд точек, куда входят и критические нули ζ-функции Римана. Иногда собственных значений нет, например, при

$$u^{-\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\ln u)} \int_0^x (x-t)^{\ln u - 1} f(t)\, dt; \quad u \geqslant 1;$$

$f(t)$ ограничена и интегрируема на всей оси (пример Н. П. Романова).

Примечание референта. Имеется много опечаток; часто не формулируются явно нужные условия. Ю. В. Линник

4464. Замечания к распределению цифр в канторовом ряду действительных чисел. Сюс (Megjegyzések a számjegyek eloszlásáról valós számok Cantor-sorában. Szűsz Péter), Mat. lapok, 1957, 8, № 1—2, 68—78 (венг.; рез. нем., русск.)

Доказываются следующие две теоремы:

I. Пусть x — число в интервале $(0, 1)$, и $a_2, a_3, \ldots$ — последовательность любых действительных чисел, не меньше 2. При этих условиях существует такая последовательность целых чисел $q_1, q_2, \ldots$, что

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1, q_2 \ldots q_k}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_k(x) \geqslant 1$ — целые числа, $1 \leqslant \varepsilon_k(x) \leqslant q_k - 1$ и $0 \leqslant q_k - a_k < 16$ $(k = 2, 3, \ldots)$.

II. Пусть x — число в интервале $(0, 1)$, и $c_2, c_3, \ldots$ — последовательность неотрицательных целых чисел, содержащая только конечное число нулей. При таких условиях можно найти последовательность целых чисел $q_1, q_2, \ldots$ таких, что в выражении x по (1) $\varepsilon_2(x) = c_2$, $\varepsilon_3(x) = c_3$, ... Резюме автора

4465. Ограниченные представления целых чисел квадратичными формами. Уотсон (Bounded representations of integers by quadratic forms. Watson G. L.), Mathematika, 1957, 4, № 7, 17—24 (англ.)

Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ — квадратичная форма с целыми коэффициентами и ненулевым определителем. Пусть $n \neq 0$ — целое число, представимое формой f; тогда найдутся такие целые числа $x_1, \ldots, x_k$, что

$$f(x_1, \ldots, x_k) = n. \qquad (1)$$

Говорим, что (1) есть ограниченное представление числа n формой f, если

$$\max(|x_1|, \ldots, |x_k|) \ll |n|^{1/2}.$$

Говорим, что f представляет целые числа ограниченно, если для каждого числа n, представимого формой f, найдется ограниченное представление. Форма f называется нулевой, если она представляет 0 нетривиально. Доказаны две теоремы: 1. Если $k \geqslant 4$, а f — нулевая форма, то f представляет целые числа ограниченно. 2. Любая ненулевая форма f представляет целые числа ограниченно, причем ограниченное представление числа n формой f может быть получено из любого представления n формой f посредством подходяще подобранного автоморфизма f. А. В. Малышев

4466. О теореме Вороного. Барнс (On a theorem of Voronoi. Barnes E. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. Sci., 1957, 53, № 2, 537—539 (англ.)

Дается новое доказательство известной теоремы Вороного (Voronoi G., J. reine und angew. Math., 1908, 133, 126—130) о необходимом и достаточном условии того, чтобы данная положительная квадратичная форма была предельной в смысле Коркина—Золотарева. Б. А. Венков

4467. Неоднородная задача в геометрии чисел. Главка (Das inhomogene Problem in der Geometrie der Zahlen. Hlawka Edmund), Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1954. 3, Groningen-Amsterdam, 1956, 20—27 (нем.)

Статья носит обзорный характер. Пусть T — множество в евклидовом пространстве R^n, обладающее внутренними точками, $\mathfrak{G}$ — n-мерная решетка в R^n такого рода, что совокупность множеств, получаемых параллельными переносами T на векторы $\mathfrak{G}$, покрывает R^n (покрытие может быть кратным). Исследование свойств таких решеток $\mathfrak{G}$ (при данном T) и называется неоднородной задачей. Статья содержит довольно полный обзор результатов, полученных по указанной проблеме, за период 1950 — 54 гг., со времени появления обзорного доклада Давенпорта по геометрии чисел (Davenport H., Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1950, 1, 166—174). Библ. 33 назв. Б. А. Венков

4468. О периодических непрерывных дробях. Джерасимович (О периодичним верижним разломцима. Ђерасимовић Божидар), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 3-4, 137—146 (сербо-хорв.; рез. нем.)

Каждой паре действительных квадратичных иррациональных чисел сопоставляется один и только один комплекс натуральных чисел и, обратно, каждому такому комплексу, удовлетворяющему условиям теоремы 1, сопоставляется одна и только одна пара действительных квадратичных иррациональностей. Доказывается, что с помощью такого комплекса можно определять наименьшие натуральные решения уравнения Пелля. В. А. Голубев

4469. Замечания к распределению кубических вычетов. Пилер (Bemerkungen zur Verteilung der kubischen Reste. Piehler Joachim), Math. Ann., 1957, 134, № 1, 50—52 (нем.)

Если простое $p \equiv 1 \pmod 3$, то, как известно, существует $(p-1)/3$ кубических вычетов (класс 0) и $2(p-1)/3$ кубических невычетов двух родов (классы 1 и 2). Пусть z_0, z_1, z_2 — представители этих классов, h_{ijk} — число чисел класса k, которые получаются при сложении какого-либо числа класса j со всеми числами класса i. При этом i, j, k могут независимо друг от друга принимать значения 0, 1, 2; h_{ijk} не зависит от выбора числа из класса j. Числа h_{ijk} определяются при помощи теоремы 1:

Число h_{ijk} зависит только от значения сравнения по модулю 3 суммы индексов, если это значение $s \equiv 1$ или $2 \pmod 3$. Если $i + j + k \equiv 0 \pmod 3$, то имеются два различных значения для h_{ijk}, зависящих от того, будут ли i, j, k равными или различными; первые значения получаются из вторых вычитанием 1.

2-я теорема уточняет значения h_{ijk}:

Если $i + j + k \equiv 0 \pmod 3$, то $h_{ijk} \equiv \frac{p-8}{9} - \frac{1}{9} \times$

$$\times \binom{2\frac{p-1}{3}}{\frac{p-1}{3}} \pmod p \text{ или } h_{ijk} \equiv \frac{p+1}{9} - \frac{1}{9} \binom{2\frac{p-1}{3}}{\frac{p-1}{3}} \pmod p$$

в зависимости от того, будут ли индексы одинаковыми или различными. Если $i + j + k \not\equiv 0 \pmod 3$, то $h_{ijk} \equiv \frac{p-2}{9} - \frac{1}{9} \binom{1\frac{p-1}{3}}{\frac{p-1}{3}} z_i^{\frac{p-1}{3}} \pmod 3$.

Ввиду $0 \leqslant h_{ijk} \leqslant (p-1)/3$ значения h_{ijk} этим определяются однозначно. В. А. Голубев

4470. Решение диофантова уравнения $x^4 + y^2 = z^6$. **Брчич-Костич** (Rešenje diofantske jednacine $x^4 + y^2 = z^6$. Brčić-Kostić Mato), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 3-4, 125—136 (сербо-хорв.; рез. эсперанто)

Доказывается теорема: Если x, y, z — взаимно простые числа, то уравнение $x^4 + y^2 = z^6$ не имеет целочисленных решений; если же $(x, y, z) \neq 1$, то частных целочисленных решений бесконечно много.

В. А. Голубев

4471. Три диофантовых системы. Керудакес, Мёснер (Three diophantine systems. Xeroudakes George, Moessner Alfred), Euclides, 1957, 17, № 193—194, 63-71 (англ.)

Доказывается, что система $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$ имеет решения в поле $K(\sqrt{-2})$. Дано решение в целых числах системы:

$$x + y + z = u + w,\ x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + w^2,\ z^2 = x^2 + y^2.$$

Приведены числовые примеры. Из решения системы (1) выводится решение в рациональных числах более сложной системы 4 уравнений. В. А. Голубев

4472. О суммах квадратов последовательных чисел. Ийер (On sums of squares of consecutive numbers. Iyer R. Venkachatalam), Scripta Math., 1957, 22, № 3-4, 270—273 (англ.)

Показано, что уравнение

$$\frac{u^2 + (u+1)^2 + \ldots + (u+n-1)^2}{v^2 + (v+1)^2 + \ldots + (v+n-1)^2} = 2$$

не имеет целочисленных решений при n четном; оно имеет целочисленные решения до $n \leqslant 101$ при $n = 5$, 7, 13, 47, 49, 55, 83, 95, 97, 101. В. А. Голубев

4473. Треугольные числа и пифагоровы числа. Ийер (Triangular numbers and Pythagorean numbers. Iyer R. Venkachatalam), Scripta Math., 1957, 22, № 3-4, 286—288 (англ.)

При помощи элементарных формул для целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ выводятся формулы целочисленных решений уравнения $\Delta x + \Delta y = \Delta z$, где $\Delta t = t(t+1)/2$. Даны числовые примеры.

В. А. Голубев

4474. Квадратные уравнения. Цеккендорф (Les équations quadratiques. Zeckendorf E.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1957, 26, № 3, 112—122 (франц.)

К рекуррентным последовательностям данного порядка принадлежат две геометрические прогрессии со знаменателями $r > 0$ и $-r$. Доказывается формула для членов последовательности и знаменателей прогрессии. Сравнение двух выведенных формул для произведения $r^z(-r)^z$ приводит к решению диофантова уравнения второй степени. Рассматриваются различные случаи в зависимости от порядка и первых членов последовательностей. Даны примеры числовых решений уравнений. В. А. Голубев

4475. Диофантова проблема. Мёснер (Ein diophantisches Problem. Moessner Alfred), Euclides, 1957, 17, № 195-196, 115—120 (нем.)

Из уравнения

$$A^{2n} + B^2 = C^2 \qquad (1),$$

где $C - B = 1$, A — нечетное, при помощи известных тождеств, автор получает формулы решений многостепенных систем уравнений

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \overset{k}{=} \sum_{i=1}^{r} e_i, \text{ где } k = 1, 2, 3 \text{ или } k = 1, 2, 3, 4,$$

а также систем вида

$$\sum_{i=1}^{r} d_i = \sum_{i=1}^{r} e_i,\ \prod_{i=1}^{r} d_i \overset{k}{=} \prod_{i=1}^{r} e_i.$$

Даны числовые примеры.

Примечание референта. Уравнение (1) дано неверно в виде $A^n + B^2 = C^2$, так как отсюда не вытекает $B = (A^{2n} - 1)/2$, $C = (A^{2n} - 1)/2$, на чем автор базируется в дальнейшем. Отсюда и два первых числовых примера неверны. Вместо $3^3 + 364^2 = 365^2$ нужно $3^6 + 364^2 = 365^2$ (или $3^3 + 13^2 = 14^2$), вместо $3^4 + 3280^2 = 3281^2$ нужно $3^8 + 3280^2 = 3281^2$ (или $3^4 + 40^2 = 41^2$). Есть опечатки. В. А. Голубев

4476. О теореме Каталана. Лурсманашвили А. П., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 4 (52), 35—38 (рез. груз.)

Исследуется гипотеза Каталана о том, что уравнение

$$x^m - y^n = 1 \qquad (1)$$

имеет лишь одно решение в целых, больших единицы, числах x, y, m, n, именно, $x = 3$, $y = 2$, $m = 2$, $n = 3$. Натуччи (РЖМат, 1955, 1097) исследовал значения $x = 2$, 3, 4. Доказывается, что если $y \leqslant 99$ — нечетное число, то уравнение (1) не имеет решения в целых числах. В. А. Голубев

4477. Заметка о числах Бернулли высокого порядка. Карлиц (A note on Bernoulli numbers of higher order. Carlitz L.), Scripta Math., 1957, 22, № 3—4, 217—221 (англ.)

Число Бернулли $B_m^{(k)}$ порядка k определяется из соотношения $\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(k)} x^m/x! = (x/(e^x - 1))^k$. Доказывается теорема: Пусть $k = a_1 p^{i_1} + \ldots + a_r p^{i_r}$ $(0 \leqslant i_1 < \ldots < i_r;\ 0 \leqslant a_i \leqslant p-1)$. Тогда $p^r B_m^{(k)}$ — целое по модулю p для всех m. Результат этот является специальным случаем общей теоремы, доказанной автором ранее (Duke Math. J., 1949, 16, 285—295).

В. А. Голубев

4478. Доказательство иррациональности числа π. Вочино (Una dimostrazione dell'irrazionalita'di π. Vocino Luigi), Ricerca, 1956, 7, 70—77 (итал.)

Выводится известное разложение $\operatorname{tg} x$ в цепную дробь. Исходя из полученного разложения доказывается, что если $x \neq 0$ — рациональное число, то $\operatorname{tg} x$ является иррациональным. Отсюда вытекает иррациональность числа π. Э. Апарисио

4479. О теоремах Вилсона и Ферма. Мозер (On the theorems of Wilson and Fermat. Moser Leo), Scripta Math., 1957, 22, № 3—4, 288 (англ.)

Дано общее геометрическо-комбинаторное доказательство теорем Вилсона и Ферма $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ и $a^p \equiv a \pmod{p}$. В. А. Голубев

4480. Доказательство теоремы Вилсона. Абад-Флорес (Una demostracion del teorema de Wilson. Abad Flores Odon Luis), Euclides, 1955, 15, № 177—178, 396 (исп.)

4481. Вопросы арифметики. Тебо (Questions d'arithmétique. Thébault Victor), Mathesis, 1956, 65, № 10, Suppl., 1—17 (франц.)

Даны решения восьми вопросов «занимательной арифметики». Например: Определить квадраты целых чисел, состоящие из $2n$ цифр, основания которых равны сумме двух чисел, полученных разделением цифр квадрата на две части по n последовательных цифр в каждой. Даны и числовые решения этого вопроса до $n = 9$, например, $45^2 = 2025$; $20 + 25 = 45$.

В. А. Голубев

4482. Числа обратные единице по модулю m (положительное целое). Росси (I numeri inversi

all'unita rispetto al modulo m. (Intero positivo). Rossi F. S.), Archimede, 1956, 8, № 6, 279—281 (итал.)

4483. **Замечание о длине периода десятичной дроби.** Бурьян В. Ю., Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 15, 127—129

4484 К. **Лекции по аналитической теории чисел.** Радемахер (Lectures on analytic number theory. Rademacher H. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1954—1955) (англ.)

Литографированные лекции, являющиеся весьма доступным введением в аналитическую (аддитивную) теорию чисел в духе Харди—Литлвуда. Ясное представление о книге дает подробное оглавление, которое мы и приводим, давая — в случае необходимости — пояснения в скобках.

Глава I. Формальные степенные ряды (в этой главе находятся порождающие функции для некоторых аддитивных задач): Введение. Кольцо степенных рядов. Разбиение числа на нечетные слагаемые. Поле степенных рядов. Разбиение числа на ограниченное количество слагаемых и слагаемых ограниченного размера. Графические методы исследования разбиений. Порождающая функция для $p(n)$ ($p(n)$ — количество представлений числа n в виде $n = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots$, $n_j \geqslant 0$). Треугольные, квадратные и пятиугольные числа. Эйлерово доказательство теоремы о пятиугольных числах (тождество: $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda}x^{\lambda(3\lambda-1)/2}$). Свойства пятиугольных чисел. Вычисление $p(n)$ с помощью теоремы Эйлера. Формальное дифференцирование степенных рядов. Связь между $p(n)$ и $\sigma(n) = \sum_{d \setminus n} d$. Тождество Якоби

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+\zeta x^{2n-1})(1+\zeta^{-1}x^{2n-1}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\zeta^k x^{k^2}\right).$$

Другое доказательство теоремы Эйлера. Дальнейшие приложения тождества Якоби. Сравнения для $p(n)$. Тождества Роджерса-Рамануджана. Интерпретация в терминах разбиений на слагаемые. Доказательство тождеств с использованием полиномов Гаусса.

Глава II. Тета-функции: Аналитическое доказательство тождества Якоби. Четыре тета-функции и их периодичность. Дальнейшие соотношения между тета-функциями. Обозначение Эрмита и дифференциальное уравнение для тета-функций. Нули тета-функции. Соотношения: $\vartheta_1' = \pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$; $\vartheta_3^4 = \vartheta_2^4 + \vartheta_4^4$. Приложения — теорема Лагранжа о представлении чисел четырьмя квадратами. Формула обращения Якоби. Общее модулярное преобразование; определение знака в формуле. Функция Дедекинда $\eta(\tau)$.

Глава III. Аналитическая теория разбиений на слагаемые: $p(n)$ как контурный интеграл. Ряды Фарея. Выбор контура интегрирования. Вычисление $p(n)$. Вывод асимптотической формулы Харди-Рамануджана. Интерпретация формы для $p(n)$ в случае $n < 0$. Формула Сельберга для $A_k(n)$ ($A_k(n)$ — функция, входящая в формулу Рамануджана). Вычисление $A_k(n)$. Формула преобразования для $\log\eta(\tau)$. Суммы Дедекинда $s(h, k)$. Геометрическое доказательство формулы взаимности для $s(h, k)$. Приложение к квадратичным вычетам. Дальнейшие свойства сумм Дедекинда. Другое доказательство формулы взаимности.

Глава IV. Представление квадратами (в этой главе находятся асимптотические формулы для количества представлений целых чисел суммами квадратов). Порождающая функция и интегральная формула для количества представлений $A_r(n)$ числа n суммой r квадратов. Разбиение на дуги Фарея. Преобразование подинтегрального выражения. Введение сумм Гаусса. Остаточный член. Интегралы по дугам Фарея. Формула для $A_r(n)$; особый ряд. Суммы Гаусса, их свойства и вычисление. Исследование особого ряда. Главный член в $A_r(n)$; его плотностная интерпретация. Метод Клостермана для $r = 4$ (и представление числа n формой $an_1^2 + bn_2^2 + cn_3^2 + dn_4^2$). Суммы Клостермана.

А. В. Малышев

4485 К. **Введение в теорию трансцендентных чисел.** Шнейдер (Einführung in die transzendenten Zahlen. Schneider Theodor. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1957, 150 S., 24.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 32, 2232 (нем.)

4486 К. **Целые точки в многомерных шарах.** Вальфиш (Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln. Walfisz Arnold. (Monogr. mat., PAN, 33), Warszawa, PWN. 1957, 471 S., ill.) (нем.)

4487 К. **Аддитивная арифметика. Аспекты и проблемы.** Риччи (Aritmetica additiva. Aspetti e problemi. Ricci Giovanni. Bari, G. Laterza e F., 1956, 32 p., 700 L.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 668, 837 (итал.)

4488 К. **Варианты к работе «Доказательство последней теоремы Ферма».** Честари (Varianti a «L'ultimo teorema di Fermat dimostrato». Cestari Riccardo. Gubbio, Ed. tip Oderisi, 1957, iv, XVIII p.), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 671, 205 (итал.)

4489 К. **Четверка Пифагора в пространстве, рассмотренная элементарным путем.** Кьяппалоне (La quaterna pitagorica dello spazio per via elementare. Alcune proprietà del numeri. Chiappalone Vincenzo. Imola, Ed. Paolo Galeati, 1956, 24 p., 350 L.), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 669, 79 (итал.)

См. также: 4653

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

4490 К. **Алгебра (Для педагогических и технических институтов)** Фадини (Algebra. Per ist. magistr. e per ist. tecnico. Fadini Angelo. Napoli, Ed. Ist. ed. Mezzogiorno, 1956, 323 p., 800 L.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 668, 688 (итал.)

4491 К. **Алгебра (Для технических институтов).** Аверна, Ди-Франко (Algebra. Per istituti tecnici. Averna A., Di Franco S. Bologna, L. Cappelli, 1957, 455 p., 1400 L.), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 671, 173 (итал.)

4492 К. **Упражнения по алгебре. Ч. 2. Уравнения, системы, задачи.** Алипранди (Esercitazioni di algebra. Ed. completam. rinov. Parte 2: Equazioni, sistemi, problemi. Aliprandi Giuseppe. Padova, Ed. tip. Casa ed. dott. A. Milani, 1956, x, 430 p., 2200 L.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 668, 831 (итал.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

4493. Аддитивные полиномы. Уэйплс (Additive polynomials. Whaples G.), Duke Math. J., 1954, 21, № 1. 55—65 (англ.)

Пусть $u_i(x)$ — элементы кольца $k[x]$, где k — некоторое поле. Полином $u_3(x) = u_1(u_2(x))$ называется композицией полиномов $u_1(x)$ и $u_2(x)$, а тождество $u_{r+1}(x) = u_1(u_2(\ldots(u_r(x))\ldots)$ — разложением полинома $u_{r+1}(x)$.

Рассматриваются вопросы, связанные с композицией и разложением аддитивных полиномов над полем k характеристики $p \neq 0$, т. е. полиномов, удовлетворяющих тождеству $f(x+y) = f(x) + f(y)$, которые, очевидно, имеют вид $f(x) = \sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu x^{p^\nu}$. Достаточно подробно они изучались многими авторами и раньше, но в реферируемой работе получены новые результаты за счет наложения на основное поле k дополнительных ограничений. Предполагается, что k не имеет несепарабельных расширений, а для каждого положительного числа n оно имеет (в любом алгебраическом замыкании) не более одного расширения степени n и точно одно расширение степени $n = p$. Подгруппа v аддитивной группы k^+ поля k называется открытой, если существует такой многочлен $u(x)$ над k, что $v \supset u(k) = \{u(\alpha) \mid \alpha \in k\}$. Доказано, в частности, что v является открытой подгруппой в том и только в том случае, если $v = f(k^+)$ для некоторого аддитивного полинома $f(x)$.

Индекс $(k^+ : f(k^+))$ равен числу нулей полинома $f(x)$ в поле k. Если $v = g(k^+)$, то нули полинома $g(x)$ лежат в поле k, а любой аддитивный полином $f(x)$, у которого $f(k^+) \subset v$, имеет разложение $f(x) = g(h(x))$.

Доказывается также, что аддитивные полиномы определяют всюду плотное подкольцо кольца E всех непрерывных эндоморфизмов группы k^+. Топология в E при этом индуцируется топологией в k^+ (систему окрестностей нуля в группе составляют определенные выше открытые подгруппы). А. И. Кострикин

4494. Об одном аксиоматическом определении определителей. Климеску (O definiţil axiomatică a determinanţilor. Climescu Al.), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1956, 2, № 3-4, 1—7 (рум.; рез. русск., франц.)

4495. Среднее значение случайных определителей. Белман (A note on the mean value of random determinants. Bellman Richard), Quart. Appl. Math., 1955, 13, № 3, 322—324 (англ.)

Вычисление математического ожидания степеней определителя

$$D_n = |x_{ij}|; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где x_{ij} — независимые случайные величины. Для этого автор вводит дифференциальный оператор

$$\theta_n = |\partial/\partial z_{kl}|; \quad k, l = 1, 2, \ldots, n,$$

в частности,

$$\theta_1 = \partial/\partial z_{11}, \qquad \theta_2 = \frac{\partial}{\partial z_{11}}\frac{\partial}{\partial z_{22}} - \frac{\partial}{\partial z_{12}}\frac{\partial}{\partial z_{21}}$$

Обозначим через

$$\varphi_{kl}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izs} dG_{kl}(x)$$

характеристическую функцию случайной величины x_{kl}.

Основным результатом работы является следующая формула

$$i^{nr} E(D_n^r) = \theta_n^r \left[\prod_{k,l} \varphi_{kl}(z_{kl})\right]_{z_{kl}} = 0.$$

В конце приведены некоторые специальные случаи этой общей формулы. И. И. Пятецкий-Шапиро

4496. Об обобщении одной теоремы Стилтьеса. Арус (Su una generalizzazione di un teorema di Stjelties. Arus Lorenzo), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 2, 278—283 (итал.)

Утверждается следующая теорема: Если в квадратной матрице n-го порядка все неглавные миноры порядка ν отрицательны, а все главные миноры порядков $r = \nu, \nu+1, \ldots, n-1$ положительны, то положительными являются и алгебраические дополнения всех миноров порядка ν.

Доказательство проводится для случая, когда $\nu = 1$. Указывается, что в общем случае теорема доказывается аналогично, если применить теорему Лапласа. Б. Э. Апарисио

4497. К решению систем линейных уравнений с помощью многомерных детерминантов. Соколов Н. П., Тр. Киевск. гидромелиор. ин-та, 1956, вып. 6, 277—283

Рассматривается система n^{p-1} $(p \geqslant 3)$ линейных уравнений с n неизвестными $x_\nu^{(p)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$:

$$\sum_{\alpha_p=1}^{n} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\alpha_p} x_{\alpha_p}^{(p)} = B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}}$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1} = 1, \ldots, n). \qquad (1)$$

Совместность этой системы и существование у нее единственного решения равносильны возможности однозначного приведения p-линейной формы $F_p = \sum^n A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} x_{\alpha_1}^{(1)} \ldots x_{\alpha_p}^{(p)}$ с pn переменными к $(p-1)$-линейной форме $F_{p-1} = \sum_1^n B_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} x_{\alpha_1}^{(1)} \ldots x_{\alpha_{p-1}}^{(p-1)}$ с $(p-1)n$ переменными, необходимым и достаточным условием чего является равенство двумерных рангов по индексу α_p p-мерной матрицы $A_p = \|A_{\alpha_1} \ldots A_{\alpha_p}\|$ и расширенной матрицы $\overline{A}_p$, полученной присоединением к A_p матрицы $B_{p-1} = \|B_{\alpha_1} \ldots B_{\alpha_{p-1}}\|$ (рассматриваемой как $(n+1)$-е сечение ориентации (α_p)). В предположении, что это условие выполнено, находится решение системы (1) с помощью p-мерных детерминантов. А. Г. Школьник

4498. О взаимоотношении между некоторыми формулами детерминантной и бездетерминантной теорий систем линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Круковский (Круковский-Синевич) Б. В., Тр. Киевск. автомоб.-дор. ин-та, 1955, вып. 2, 176—188

Указывается на возможность получения в некоторых частных случаях явных выражений для неизвестных системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных, не пользуясь классическим детерминантным аппаратом.

Чтение работы затруднено наличием большого числа опечаток. Г. Ш. Рубинштейн

4499. Методы доказательства в линейной алгебре. Фландерс (Methods of proof in linear algebra. Flanders Harley), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 1, 1—15 (англ.)

Рассматриваются различные методы доказательств в линейной алгебре, основанные на изменении базиса, подходящем выборе линейных пространств, поля коэффициентов и т. д. В качестве примеров приводятся различные хорошо известные теоремы линейной алгебры. Н. Я. Виленкин

4500. Побочно-симметрические матрицы. Еккель (Nebensymmetrische Matrizen. Jaeckel K.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 9-10, 400—401 (нем.)

Исследуются свойства $n \times n$-матриц B, эрмитово-симметричных относительно 2-й диагонали. При этом каждая такая матрица B представляется в виде произведения $B = S\bar{B}'S$, где $'$ — знак транспонирования, а S — $n \times n$-матрица, у которой элементы 2-й диагонали равны единице, а все остальные элементы — нулю. Ф. Р. Гантмахер

4501. О симметрических функциях собственных значений. Маркус, Томпсон (A note on symmetric functions of eigenvalues. Marcus M., Thompson R.), Duke Math. J., 1957, 24, № 1, 43—45 (англ.)

Пусть R_n — унитарное n-мерное пространство со скалярным произведением (x, y), и $E_r(a_1, \ldots, a_p)$, $1 \leqslant r \leqslant p$, — элементарная симметрическая функция степени r от p переменных; A — эрмитово преобразование пространства R_n в себя с собственными значениями $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, $\rho_i = \alpha_{n-i+1}$, S — совокупность целых чисел из интервала $[1, n]$, элементы которой удовлетворяют условию $i < j < \ldots < m$; s — действительное число, причем $0 \leqslant s \leqslant 1$; $c_i \geqslant c_j \geqslant \ldots \geqslant c_m$ — неотрицательные числа.

Доказываются следующие утверждения:

1) Если преобразование A неотрицательно, то

$$\min_{R_{p+k}} \max_{x} E_r((Ax_1, x_1)^s, \ldots, (Ax_k, x_k)^s) = \binom{k}{r}\left(\frac{\rho_{p+1} + \ldots + \rho_{p+k}}{k}\right)^{sr},$$

$$2) \sum_{\delta \in s} c_\delta \alpha_\delta = \max_{R} \min_{x} \sum_{\delta \in S} c_\delta (Ax_\delta, x_\delta).$$

Здесь максимум рассматривается над всеми совокупностями k ортонормированных векторов $x_1, \ldots, x_k$ фиксированного подпространства R_{p+k} размерности $p + k \leqslant n$, $\min_{R_{p+k}}$ — наименьший из этих максимумов при всевозможных изменениях R_{p+k}.

А. Ф. Голубчиков

4502 К. Матричное исчисление. Керубино (Calcolo delle matrici. Cherubino Salvatore. (Monotr. mat. Consiglio naz. ricerche, 4), Roma. Ed. Cremonese, 1957, VII, 322 p., 4000 L.) (итал.)

ГРУППЫ

4503. Об изоморфных неприводимых линейных представлениях конечных групп. Жмудь Э. М., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 80, Зап. Матем. отд. физ-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 25, 199—204

Пусть Γ — конечная группа; R — групповая алгебра группы Γ над полем P, характеристика которого не делит порядок группы; R_0 — центр алгебры R; M — множества всех минимальных нормальных делителей группы G; A — композит всех минимальных абелевых нормальных делителей группы; $Q_1, \ldots, Q_m$ — все силовские p-подгруппы группы A. Каждому нормальному делителю H группы G соответствует идемпотент

$$i_H = \frac{1}{[H]} \sum_{a \in H} a \in R_0, \text{ где } [H] \text{ — порядок подгруппы } H.$$

Если S — некоторое множество нормальных делителей группы G, то

$$\varphi(S) = \prod_{H \in S} (1 - i_H) = e_1 + \ldots + e_q,$$

где $e_1, \ldots, e_q$ — все минимальные идемпотенты алгебры R_0, которым соответствуют неприводимые представления группы G над полем P с ядрами, не входящими в множество S.

Отсюда вытекает, что группа G тогда и только тогда допускает неприводимые изоморфные представления над полем P, когда $\varphi(M) \neq 0$.

Оказывается, что последнее условие эквивалентно системе условий $\varphi(S_i) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, где S_i — множество всех минимальных нормальных делителей группы Q_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Следствием этих результатов является теорема, другим путем ранее полученная Вайснером (Weisner L., Amer. J. Math., 1939, 61, 709—712).

Группа Γ тогда и только тогда обладает изоморфными неприводимыми над полем P представлениями, когда каждая силовская p-подгруппа Q_i группы A содержит подгруппу индекса p, не содержащую ни одного нормального делителя группы Γ.

С. Д. Берман

4504. Об инвариантах подгрупп в неприводимых представлениях группы A_2. Симония В. Т., Тр. Сталинирск. гос. пед. ин-та, 1956, 3, 577—581

Унимодулярная группа A_2 размерности 8 содержит только две нетривиальные подгруппы

$$A_1' = \left\{ \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{matrix} \right\| \right\} \text{ и}$$

$$A_1'' = \left\{ \left\| \begin{matrix} a_{11}^2 & 2a_{11}a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{21}^2 & 2a_{21}a_{22} & a_{22} \end{matrix} \right\| \right\},$$

где $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$.

Доказана теорема: Неприводимое представление группы A_2 веса $n\lambda_1 + m(\lambda_1 + \lambda_2)$ индуцирует на A_1' представление, содержащее точно одну одномерную компоненту, а на A_1'' — представление, которое содержит единственную одномерную компоненту тогда и только тогда, когда n и m—четные числа.

С. Д. Берман

4505. О заметке Флетчера «Кампанологические группы». Диккинсон (On Fletcher's paper «Campanological Groups». Dickinson D. J.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 5, 331—332 (англ.)

Групповым методом исследуется задача построения одного специального колокола из звонков (РЖМат, 1957, 8441). С. Д. Берман

4506. О группах без П-кручения. Эйдинов М. И., Уч. зап. Уральского ун-та, 1956, вып. 19, 61—66

Пусть П — некоторое множество простых чисел и пусть $n \mid \Pi$ означает, что все простые множители числа n принадлежат П. Следуя работе Лазара (РЖМат, 1955, 4895), автор называет группу G группой без П-кручения, если из $x \in G$, $n \mid \Pi$, $x^n = e$ следует $x = e$. Подгруппа H группы G называется П-изолированной, если из $x \in G$, $n \mid \Pi$, $x^n \in H$, $x^n = e$ следует $x \in H$.

Если G — группа без П-кручения и H — ее инвариантная подгруппа, то $G \mid H$ тогда и только тогда является группой без П-кручения, когда H — П-изолированная подгруппа.

Группа G без П-кручения называется ΠR-группой, если для любой пары ее элементов x, y при $n \mid \Pi$ из $x^n = y^n$ следует $x = y$.

Группа G без П-кручения тогда и только тогда является ΠR-группой, когда централизатор каждого ее элемента является П-изолированной подгруппой.

Автор переносит на группы без П-кручения и ПR-группы некоторые результаты П. Г. Конторовича (Матем. сб., 1946, 19 (61), № 2, 287—308; 1948, 22 (64), № 1, 79—100) и референта (Матем. сб., 1952, 30 (72), № 1, 197—212; РЖМат, 1954, 5458), ранее установленные для групп без кручения и R-групп. В частности, отмечается следующий факт.

Всякая нильгруппа без П-кручения является ПR-группой. Примером ПR-группы служит также всякая периодическая группа без П-кручения.

Б. И. Плоткин

4507. **О структуре подгрупп слойно-конечной группы.** Берлинков М. Л., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 267—271

Дается теоретико-структурная характеристика слойно-конечных групп, т. е. групп, у которых множество элементов каждого порядка конечно. В качестве непосредственных следствий полученной характеристики отмечаются два следующих предложения.

1. Если две группы структурно изоморфны и одна из них слойно-конечна, то и другая слойно-конечна.

2. Если две группы структурно изоморфны и одна из них является слойно-конечной группой без бесконечных p-подгрупп, то другая группа также обладает этими свойствами.

С. Н. Черников

4508. **К теории нильпотентных групп.** Чарин В. С., Уч. зап. Уральского ун-та, 1956, вып. 19, 21—25

Доказана теорема: Если группа обладает конечным нормальным рядом, все бесконечные факторы которого являются нециклическими рациональными группами, то в такой группе имеется нильпотентная подгруппа конечного индекса.

Б. И. Плоткин

4509. **О p-длине p-разрешимых групп и о редукционных теоремах для проблемы Бернсайда.** Холл, Хигман (On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem. Hall P., Higman Graham), Proc. London Math. Soc., 1956, 6, № 21, 1—42 (англ.)

Следуя Чунихину (Докл. АН СССР, 1947, 55, 477—480), авторы называют p-разрешимой группу, каждый из композиционных факторов которой есть или p-группа, или же p'-группа (т. е. группа порядка m, $(m, p)=1$). Для p-разрешимой группы G определяется верхний p-ряд:

$$1=P_0\leqslant N_0<P_1<N_1<\ldots<P_l\leqslant N_l=G,$$

где N_k/P_k — максимальная нормальная p'-подгруппа в G/P_k, а P_{k+1}/N_k — максимальная нормальная p-подгруппа в G/N_k.

Число $l_p=\min_{N_l=G} l$ называется p-длиной группы G. Целью работы является получение неравенств между p-длиной l_p группы G и ее силовскими p-инвариантами, в качестве которых берутся b_p (p^{b_p} — порядок силовской p-подгруппы S), c_p — класс нильпотентности S, d_p — длина ряда коммутантов S и e_p (p^{e_p} — экспонента S, т. е. наибольший порядок элементов из S). При доказательстве основных теорем используются некоторые факты о p-разрешимых линейных группах над полем характеристики p, которым посвящен специальный параграф работы. Часть содержащихся здесь результатов представляет самостоятельный интерес. Предполагается всюду (кроме теоремы 1, 2, 6), что p — нечетное простое число, однако и при этом условии простые числа Ферма ($p=2^n+1$) составляют исключение. Авторы применяют различные методы для получения более точных результатов в обоих случаях.

Доказаны следующие неравенства:

$$p\neq 2^n+1\colon\ 1)\ a_p\geqslant l_p,\ 2)\ e_p\geqslant l_p,\ 3)\ c_p\geqslant p^{l_p-1},$$

$$4)\ b_p\geqslant (p^{l_p}-1)/(p-1);$$

$$p=2^n+1\colon\ 1')\ a_p\geqslant l_p,\ 2')\ e_p\geqslant\left[\frac{l_p+1}{2}\right],$$

$$3')\ c_p\geqslant((p-2)^{l_p}-1)/(p-3),$$

если $p>3$; $c_p\geqslant 2^{l_p-1}$, если $p=3$.

$$4')\ b_p\geqslant\frac{((p-2)^{l_p+1}-l_p(p-3)-p+2)}{(p-3)^2},\ \text{если}\ p>3;$$

$$b_p\geqslant 2^{l_p-1}+l_p-1,\ \text{если}\ p=3.$$

Построением соответствующих примеров установлено, что неравенства 1)—4) и 1')—2') нельзя улучшить. Найдена также оценка для длины d ряда коммутантов разрешимой группы G:

$$d\leqslant c_2+\sum\nolimits_{p>2}\frac{1}{2}d_p(d_p+1).$$

В последнем разделе работы рассматриваются вопросы, связанные с ослабленной проблемой Бернсайда. Через S_n обозначается следующее гипотетическое утверждение. Для любого положительного числа k существует число $s_{n,k}$ такое, что всякая разрешимая группа экспоненты n, порожденная k элементами, имеет порядок $\leqslant s_{n,k}$. Пусть $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$. С помощью полученных неравенств для l_p доказывается, что S_n имеет место, если верно $Sp_i^{\alpha_i}$ для $i=1,\ldots,r$ (теорема 4.3.1).

Используя известную теорему Бернсайда о разрешимости групп порядка $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, авторы получают решение ослабленной проблемы Бернсайда для $n=6$ и 12.

Если S_n доказано и n свободно от квадратов ($\alpha_i=1$), то имеет место формула:

$$s_{n,k}=\prod\nolimits_{i=1}^{r}s_{p_i,k_i},$$

где $k_i=1+(k-1)s_{m_i,k_i}$, $m_i=n/p_i$. В конце статьи сформулированы некоторые теоретико-групповые задачи, решение которых привело бы к доказательству ослабленной гипотезы Бернсайда или по крайней мере позволило бы снять условие разрешимости групп в редукционной теореме 4.3.1.

А. И. Кострикин

4510. **О рядах Фукса—Рабиновича для свободных групп.** Линдон (On the Fouxe—Rabinovitch series for free groups. Lyndon R. C.), Portug. math., 1953, 12, № 3—4, 115—118 (англ.)

С каждым элементом w свободной группы F с образующими x_i ассоциируется множество целых чисел $\pi_\sigma(w)$, определенных Фуксом—Рабиновичем (Матем. сб., нов. сер., 1940, 7) и названных ими детерминаторами. Индекс σ пробегает все последовательности $x_{\sigma_1}\ldots x_{\sigma_n}$, которые можно считать одночленами в кольце R формальных степенных рядов с целыми коэффициентами. Автор приводит другое определение детерминаторов и дает очень простую их характеристику, пользуясь производящими рядами

$$\pi(w)=\sum\pi_\sigma(w)\,\sigma.$$

Устанавливается тождество

$$1+\pi(uv)=[1+\pi(u)]\,[1+\pi(v)\,\pi(u)]^{-1}\,[1+\pi(v)],$$

которое сопоставляется с законом композиции

$$1+D(uv)=[1+D(u)]\,[1+D(v)]$$

рядов $D(w)=\sum D_\sigma(w)\,\sigma$ в магнусовском представлении группы F. Коэффициенты $D_\tau(w)$ равны значению производных Фокса (РЖМат, 1955, 1666) при $x_i=1$. Доказывается, что через них вполне определенным образом выражаются и детерминаторы Фукса—Рабиновича. А. И. Кострикин

4511. Принципы Хассе в ортогональных группах. **Оно**, Сугаку, 1956, 7, № 1, 15—22 (японск.)

Пусть K — алгебраическое числовое поле или поле алгебраических функций одного переменного над конечным полем характеристики $\neq 2$. Пусть K_J — J-адическое расширение поля K, S_1 и S_2 — две невырожденные симметричные матрицы n-го порядка над полем K. Если для любого J имеется матрица Γ_J и число λ_p из поля K_J такие, что $\Gamma_J S_1 \Gamma_J' = \lambda_J S_2$, то имеется матрица Γ и число λ из поля K такие, что $\Gamma S_1 \Gamma' = \lambda S_2$. Далее, пусть $O(K, S_1)$ — группа матриц T из K, удовлетворяющих условию $TS_1T'=S_1$. Тогда, если $O(K_J, S_1)$ и $O(K_J, S_2)$ изоморфны для всех J, то группы $O(K, S_1)$ и $O(R, S_2)$ сопряжены в общей линейной группе над полем K при $n \geqslant 3$. Hua Loo-Keng

4512. О клеточных разбиениях унитарных групп. **Йокота** (On the cellular decompositions of unitary groups. Yokota Ichiro), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1956, A7, № 1—2, 39—49 (англ.)

Строятся клеточные разбиения комплексных многообразий Штифеля и, в частности, унимодулярных унитарных групп. Затем вычисляются группы гомологий, алгебры когомологий и действие приведенных степеней Стинрода в этих пространствах. А. Л. Онищик

4513. Замечания о локально компактных группах, правая и левая равномерные структуры на которых совпадают. **Браконье** (Remarques sur les groupes localement compacts dont les structures uniformes droite et gauche sont égales. Braconnier Jean), Ann. Univ. Lyon, 1955, A, № 18, 15—19 (франц.)

Рассматриваются топологические группы, правая и левая равномерные структуры на которых совпадают, или, что то же, группы, обладающие фундаментальной системой окрестностей единицы, переходящих в себя при всех внутренних автоморфизмах. Доказывается, что связная локально компактная группа удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда является прямым произведением компактной группы и векторного пространства. А. Л. Онищик

4514. К теории нильпотентных локально бикомпактных групп. **Глушков В. М.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, 20, № 4, 513—546

Рассматриваются локально бикомпактные группы, обладающие конечными центральными рядами и имеющие конечные p-ряды (p-рядом называется нормальный ряд, все факторы которого топологически изоморфны подгруппам аддитивной группы p-адических чисел или конечным циклическим группам). Пусть L — нильпотентная алгебра Ли над полем F_p p-адических чисел. Топологизируя эту алгебру и строя по формулам Кэмпбелла—Хаусдорфа соответствующую группу Ли, получают топологическую группу, называемую нильпотентной группой Ли конечного ранга над F_p. Каждую нильпотентную бикомпактную группу с конечным p-адическим рядом (т. е. p-рядом без циклических факторов) можно вложить с сохранением топологии в качестве открытой подгруппы в нильпотентную группу Ли конечного ранга над полем p-адических чисел. При этом изоморфным алгебрам Ли соответствуют группы с изоморфными открытыми подгруппами. Ранг алгебры Ли бикомпактной группы G с конечным p-адическим рядом равен p-адическому рангу группы G (максимальному числу p-адических факторов). Всякая нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-адическим рядом изоморфна замкнутой подгруппе группы специальных треугольных матриц некоторого конечного порядка над кольцом целых p-адических чисел. Обратно, такие подгруппы являются нильпотентными бикомпактными группами с конечными p-адическими рядами.

Для абстрактных групп можно построить некоторые топологизации, превращающие их во вполне несвязные p-группы. Это позволяет установить связь между теорией нильпотентных бикомпактных групп с конечным p-рядом и теорией абстрактных нильпотентных групп с конечным числом образующих. Любая нильпотентная бикомпактная группа с конечным p-рядом изоморфна фактор-группе нильпотентной бикомпактной группы с конечным p-адическим рядом. В работе рассматриваются также разрешимые и нильпотентные локально бикомпактные группы с условием максимальности для замкнутых подгрупп. Н. Я. Виленкин

4515. О структурно упорядоченных группах, ассоциированных с данной частично упорядоченной группой. **Жаффар** (Sur les groupes réticulés associés à un groupe ordonné. Jaffard P.), Publs scient. Univ. Alger, 1955, A2, № 2, 173—203 (франц.)

Продолжение статьи автора (РЖМат, 1956, 7902).

Гомоморфизм f частично упорядоченных групп G и G' называется возрастающим, если для любых элементов $x,\ y \in G$ отношение $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$. Когда G и G' являются структурно упорядоченными группами, тогда гомоморфизм f называется собственным, если $f(\inf(x, y)) = \inf(f(x), f(y))$, каковы бы ни были элементы x и y группы G. Всякий возрастающий гомоморфизм частично упорядоченной группы G в упорядоченную группу называется нормой группы G. Пусть $(v_i)_{i\in I}$ есть такое множество норм частично упорядоченной группы G, что $1 \leqslant x \lneq \{1 \leqslant v_i(x)$ для всякого $i \in I\}$. Обозначим через Γ_i образ $v_i(G)$ и через Γ—кардинальное прямое произведение $\prod_{i\in I}\Gamma_i$. Отождествляя элемент $x \in G$ с элементом $\prod_{i\in I} v_i(x) \in \Gamma$, можно рассматривать группу G как подгруппу частично упорядоченной группы Γ. Говорят, что таким образом получается реализация группы G. Пусть на данной частично упорядоченной группе задана система r-идеалов. Норма v группы G называется r-нормой, если для всякого конечного множества X группы G и всякого $x \in X_r$ существует такой элемент $a \in X$, что $v(x) \geqslant v(a)$.

Пусть дано семейство $(v_i)_{i\in I}$ норм частично упорядоченной группы G, определяющее реализацию группы G, тогда на G можно следующим образом определить систему r-идеалов. Для всякого конечного подмножества X группы G полагаем: $x \in X_r \rightleftarrows \{\forall i \in I,\ \exists a_i \in X$ так, что $v(a_i) \leqslant v(x)\}$. Полученная таким образом система идеалов называется системой, определяемой условиями I-норм. Когда на частично упорядоченной группе G дана система r-идеалов, то говорят, что реализация группы G, получаемая посредством норм $(v_i)_{i\in I}$, является r-реализацией группы G, если система r-идеалов определяется условиями I-норм.

Если группа G обладает системой r-идеалов, удовлетворяющих закону сокращения, то такая система идеалов определяет группу Лоренцена Λ_r группы G и каждая r-норма v группы G продолжается до такой собственной нормы группы Λ_r, что $v_i(\Lambda_r) = G_i$, где в качестве G_i взята упорядоченная группа, полученная доупорядочением частично упорядоченной

группы G. Реализация группы G семейством $(v_i)_{i\in I}$ r-норм в прямое произведение $\Gamma=\Pi_{i\in I}G_i$ продолжается до собственной реализации Λ_r в Γ тогда и только тогда, когда r-идеалы являются теми, которые определяются условиями I-норм. Множество $(v_i)_{i\in I}$ собственных r-норм группы Λ_r, определяющих ее r-реализацию, называется неприводимым, если для всякого $\alpha\in I$ r-система идеалов не может быть определена посредством условий $(I-\{\alpha\})$-норм. Соответствующая реализация группы Λ_r называется неприводимой, если для всякого $\alpha\in I$ система $(v_i)_{i\in(I-\{\alpha\})}$ не определяет более реализацию группы Λ_r. Оказывается, что совокупность $(v_i)_{i\in I}$ тогда и только тогда определяет неприводимую реализацию группы Λ_r, когда она есть неприводимая совокупность r-норм. Если существует неприводимая система r-норм группы G, то она единственная.

Предположим, что частично упорядоченная группа G является подгруппой частично упорядоченной группы G' и пусть на G' задается система r'-идеалов. Тогда на G естественно определяется система r-идеалов: $X_r=X_{r'}\cap G$. Получаемая таким образом r-система на G называется отпечатком r'-системы. На примере показывается, что на G может существовать система идеалов, которая не является отпечатком никакой системы, определенной на G'. Изучение соотношений между группами Лоренцена, ассоциированными с группой G, и группами Лоренцена, ассоциированными с G', приводит к рассмотрению соответствия между системой идеалов, определенных на G', и отпечатком, который определяет эта система на G.

Вместо системы конечных r-идеалов, т. е. идеалов, порождаемых конечными подмножествами группы G, можно рассматривать характеризуемые теми же аксиомами r-идеалы, порождаемые ограниченными снизу произвольными подмножествами частично упорядоченной группы G.

Пусть дана структурно упорядоченная группа и $(v_i)_{i\in I}$ — множество всех собственных норм этой группы, тогда t-идеалы данной группы определяются условиями I-норм. Изучение r-идеалов частично упорядоченной группы сведено к изучению t-идеалов группы Λ_r. Установлено, в каком случае получается взаимно однозначное соответствие между t-идеалами группы Лоренцена Λ_r и r-идеалами группы G.

В заключение работы изучаются соотношения между простыми r-идеалами частично упорядоченной группы G и простыми t-идеалами ассоциированной группы Лоренцена Λ_r. А. А. Виноградов

4516. О пополнении частично упорядоченных групп. Банашевский (Über die Vervollständigung geordneter Gruppen. Banaschewski Bernhard), Math. Nachr., 1957, 16, № 1, 51—71 (нем.)

Пусть G — частично упорядоченная (ч. у.) группа с аддитивно записываемой операцией. Через uM обозначим множество всех нижних границ подмножества $M\subseteq G$, через oM — множество всех верхних границ того же подмножества. Множество $A\subseteq G$, содержащее вместе с каждым элементом $a\in A$ также все элементы $x\in G$, для которых $x\leq a$, автор называет началом (Anfang) множества G. Начала вида $A=ua$ называются главными началами, а пересечение главных начал — дедекиндовым началом. Имеем, очевидно, $uM=\bigcap_{x\in M}ux$ и потому uM есть дедекиндово начало; обратно, каждое дедекиндово начало имеет этот вид. Совокупность всех отличных от нулевого множества и множества G дедекиндовых начал множества G называется дедекиндовым замыканием множества G и обозначается через δG. При помощи отображения $x\to ux$ множество G погружается с сохранением частичного упорядочения в δG, причем отношение частичного упорядочения в последнем определяется как отношение теоретико-множественного включения. Ч. у. множество δG превращается в ч. у. полугруппу относительно операции сложения, задаваемой правилом: $z+z'=\sup_{\dot{\in}G}(uz+uz')$. Причем здесь z, z' обозначают элементы множества δG, uz — множество всех тех $x\in G$, которые входят в дедекиндово начало z. Ч. у. полугруппа δG является полной в смысле частичного упорядочения, т. е. в ней каждое ограниченное сверху (снизу) непустое подмножество ее элементов имеет супремум (инфимум). Через z^* для произвольного $z\in\delta G$, обозначим такой элемент из δG, для которого $uz^*=-oz$. Совокупность всех $z\in\delta G$ со свойством: $z+z^*=z^*+z=0$ образует группу G^*, являющуюся наибольшей группой в δG среди всех тех групп, для которых G является подгруппой.

Рассматривается такая ч. у. группа G, в которой существует (не обязательно однозначно определенное) подмножество E элементов $\varepsilon>0$, обладающее следующими свойствами: I. Для каждых двух элементов ε, ε' из E существует в E элемент $\delta\leq\varepsilon,\varepsilon'$. II. Для любого элемента $\varepsilon\in E$ имеется элемент $\delta\in E$ такой, что $2\delta\leq\varepsilon$. III. Для произвольных элементов $\varepsilon\in E$, $x\in G$ существует элемент $\delta\in E$ такой, что $\delta\leq x+\varepsilon-x$. IV. $\inf_G E=0$. Множество E со свойствами I—IV называется множеством топологических единиц. Через B_ε обозначается совокупность тех $x\in G$, для которых $-\varepsilon\leq x\leq\varepsilon$. Все B_ε образуют систему окрестностей нуля в групповой топологии на G. Таким образом определенная с помощью E топология на G называется порядковой топологией группы G. В работе отмечены некоторые особенности порядковой топологии для общих структурно упорядоченных групп, а также для частных видов этих групп: целозамкнутых и упорядоченных.

Далее предполагается, что группа G является топологической относительно порядковой топологии, определяемой с помощью множества E топологических единиц. На δG определяются бинарные отношения $\Re$ следующим образом: $z\Re_\varepsilon z'$ означает $z-\varepsilon\leq z'\leq z+\varepsilon$. Отношения $\Re_\varepsilon$ определяют на δG униформную структуру (РЖМат, 1954, 2546), а топологическая группа G является при этом униформным подпространством униформного пространства δG относительно своей правосторонней униформной структуры, которая непосредственно определяется отношениями $-x+y\in B_\varepsilon$. Униформное пространство δG, определенное с помощью E, является топологически полным. Топологически полное замыкание группы G относительно своей правосторонней униформной структуры (заданной с помощью E) обозначается через τG. В статье доказано, что τG есть подполугруппа полугруппы δG и всегда $\tau G\subseteq G^*$. Для упорядоченной группы G имеем $\tau G=G^*$. Если G является плотной в G^* в смысле частичной упорядоченности, то $\tau G=G^*$ при каждой порядковой топологии в G. Устанавливаются также некоторые другие свойства полугруппы τG, зависящие от характера E или от типа группы G. Среди них укажем еще на такие: если G есть структурно упорядоченная группа, то τG является всегда структурно упорядоченной полугруппой; структурно упорядоченная группа τG не может быть компактной ни при какой своей порядковой топологии.

Множество $E\subseteq G$ элементов $\varepsilon>0$, удовлетворяющее только условиям I и IV, не определяет больше топологии на G. Для такого случая в реферируемой работе определена порядковая сходимость и изучены свойства этой сходимости. А. А. Виноградов

4517. Вполне приводимые подгруппы алгебраических групп. Мостов (Fully reducible subgroups of algebraic groups. Mostow G. D.), Amer. J. Math., 1956, 78, № 1, 200—221 (англ.)

Пусть G — алгебраическая группа Ли (вообще говоря, несвязная), а N — множество унипотентных элементов (т. е. таких, что их собственные значения равны 1) ее радикала. Пусть M — максимальная вполне приводимая подгруппа в G. Тогда N является связным нормальным делителем и имеет место полупрямое разложение $G = M \cdot N$. Любые две максимальные вполне приводимые подгруппы алгебраической группы Ли сопряжены при помощи внутреннего автоморфизма. Если G — алгебраическая группа и E — ее обертывающая ассоциативная алгебра, то существует веддербарновское разложение $E = S + T$ для E (S — полупросто, T — радикал) такое, что: а) $S \cap G$ является максимальной вполне приводимой подгруппой в G; б) $(I + T) \cap G$, где I — единица группы, является подгруппой унипотентных элементов в радикале группы G; в) $T \cap U$ является идеалом нильпотентных элементов для радикала алгебры Ли U группы G.

Аналогичные теоремы справедливы для алгебраических алгебр Ли. Вполне приводимая группа автоморфизмов алгебры Ли оставляет инвариантной максимальную полупростую подалгебру, а если алгебра Ли разрешима, то и картанову подалгебру. Вполне приводимая группа автоморфизмов лиевой, иордановой или ассоциативной алгебры оставляет инвариантной максимальную полупростую подалгебру.

Н. Я. Виленкин

4518. Математическая формулировка схемы Гелла—Манна—Нисидзимы для новых частиц. Ханава (Mathematical formulation of the Gell—Mann—Nishijima scheme for new particles. Hanawa Sigeo), Progr. Theoret. Phys., 1957, 17, № 4, 592—602 (англ.)

См. РЖФиз, 1958, № 2, 2864.

4519. К вопросу об образующих и необразующих элементах полугруппы, инвариантной в группе. Кацман А. Д., Уч. зап. Уральского ун-та, 1956, вып. 19, 43—50

Рассматривается полугруппа F с единицей, инвариантная в группе без кручения G. Как и для групп, вводится понятие Ф-подполугруппы (подполугруппы Фраттини), состоящей из всех необразующих элементов полугруппы Г, которая является также пересечением всех максимальных подполугрупп из Г. Если $\Gamma = K \cup R$, где K — ядро (групповая часть) и R — чистая часть, то $\Phi_\Gamma = \Phi_K \cup \Phi_R$.

Рассматриваются также некоторые свойства базиса полугруппы (РЖМат, 1957, 1174). Имеются опечатки: в заголовке статьи должно быть «полугруппы» вместо «полугрупп»; в лемме 1, стр. 45, должно быть $M = \Gamma - g$ вместо $M = \Gamma g$ и т. п. П. Г. Конторович

4520. Максимальные идеалы и структура полугрупп. Шварц (Maximalne idéály a štruktúra pologrúp. Schwarz Š.), Mat. fyz časop., 1953, 3, № 1—2, 17—39 (словац.; рез. русск.)

В полугруппе S, имеющей хотя бы один максимальный левый идеал, могут иметь место два случая:

1) Существуют по крайней мере два различных максимальных левых идеала; следовательно, полугруппа S является теоретико-множественной суммой своих левых идеалов.

2) Существует единственный максимальный левый идеал L. Следовательно, каждый левый идеал, который можно включить в некоторый максимальный, необходимо является частью L. Если в таком случае вообще существует некоторый левый идеал l, который не является частью L, то l нельзя дополнить до максимального.

Если полугруппа содержит единственный максимальный левый идеал L^*, который включает каждый левый идеал полугруппы S, то говорят, что в полугруппе S существует L^*. Пусть M^* имеет такое же значение для случая двусторонних идеалов.

В работе, прежде всего, приводятся некоторые достаточные условия существования L^* и соответственно M^*. Одним из основных результатов является следующий: Пусть в полугруппе S существует L^*. Пусть S имеет хотя бы один двусторонний идеал $\neq S$. Тогда существует и M^*.

Далее следует ряд выводов, касающихся структуры множества $S - L(S - M)$, где $L(M)$ — произвольный максимальный левый (максимальный двусторонний) идеал в S.

Приводятся условия, при которых структура этих множеств может быть легко описана; при выполнении этих условий $S - L$ является полугруппой, $S - M$ — группой. Эти теоремы применяются далее для случая существования L^* и M^*.

Результаты этой работы были затем в основном обобщены автором (РЖМат, 1955, 1673). V. Pták

4521. Независимость аксиом сверхгруппы. Исканде ров Р. И., Тр. Узбекского ун-та, 1956, № 65, 155—166

Работа посвящена аксиоматике сверхгрупп. Автор не дает определения этого понятия, но из текста можно заключить, что имеется в виду сверхгруппа Раутера (Сушкевич, Теория обобщенных групп, Гостехиздат Украины, Х.—К., 1937, № 51). Для каждого из свойств, входящих в определение сверхгруппы Раутера, строится пример системы элементов, которая не обладает данным свойством, но обладает всеми остальными свойствами. Е. С. Ляпин

4522 К. Группы Ли. Кон (Lie groups. Cohn P. M. (Cambridge Tracts Math. and Math. Phys., № 46). Cambridge, Univ. Press, 1957, 164 pp., 22 sh. 6 d.) (англ.)

Книга является учебником по теории групп Ли. Первые две ее главы содержат элементы теории аналитических многообразий, касательных векторов, инфинитезимальных преобразований и дифференциальных форм на них, а также топологических групп и групп Ли. В гл. 3 вводится операция коммутирования инфинитезимальных преобразований и строится алгебра Ли группы Ли, состоящая из инфинитезимальных правых сдвигов на этой группе. Гл. 4 посвящена операциям над дифференциальными формами и завершается выводом уравнений Маурера—Картана. Эти уравнения применяются в гл. 5 для доказательства существования и единственности локальной группы Ли, имеющей данную алгебру Ли. Используемые при этом факты из теории дифференциальных уравнений доказываются в приложении. В гл. 6 изучается связь между подгруппами и гомоморфизмами групп Ли и подалгебрами и гомоморфизмами их алгебр Ли. В частности, доказывается, что всякий непрерывный гомоморфизм групп Ли аналитичен и что всякая замкнутая подгруппа группы Ли является группой Ли. Последняя глава содержит конструкцию универсальной накрывающей группы для любой связной группы Ли. А. Л. Онищик

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

4523. Функция норменного типа в алгебраических расширениях. Фландерс (The norm function of an algebraic field extension, II. Flanders Harley), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 4, 519—528 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1954, 2880. Простые доказательства некоторых элементарных свойств нормы элемента в конечных расширениях. Доказывается также теорема: Пусть K/k — конечное расширение с базисом $\omega_1, \ldots, \omega_n$, а φ: $K \to k$ — отображение, обладающее свойствами: 1) $\varphi\left(\sum a_i\omega_i\right)$ есть многочлен степени $\leqslant n$ от $a_1, \ldots, a_n$, 2) $\varphi(AB) = \varphi(A)\cdot\varphi(B)$ и 3) $\varphi(a) = a^n$, $A, B \in K$, $a \in k$; тогда $\varphi(A) = N_{K/k}A$ для всех $A \in K$.

И. Р. Шафаревич

4524. Об основной проблеме теории единиц алгебраического числового поля. Леопольдт (Über ein Fundamentalproblem der Theorie der Einheiten algebraischer Zahlkörper. Leopoldt Heinrich-Wolfgang), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1956 (1957), 41—48 (нем.)

Краткое сообщение об эффективном методе построения систем основных единиц вещественного абсолютно абелева поля путем конечного числа теоретико-групповых действий.

Пусть K — вещественное циклическое поле степени g над полем рациональных чисел P. Если $\Phi(x)$ — многочлен деления окружности на g частей, то единицы H поля K характеризуются равенством

$$H^{\Phi(\sigma_1)} = \pm 1,$$

где σ_1 — образующая группа Галуа $\mathfrak{G}_K$ поля K. Для единиц $H \neq \pm 1$, E поля K всегда можно определить натуральное число m и целочисленный многочлен $P(x)$, удовлетворяющие равенству

$$E^m = \pm H^{P(\sigma_1)}.$$

Показатели $(m, P(x))$ определяются заданием единиц E, H однозначно.

Метод построения основных единиц основан на двух теоремах конечности (Endlichkeitssätze), из которых первая состоит в следующем.

Теорема 1. Существует конечная система показателей $\mathfrak{S} = (m_\rho, P_\rho(x))$, $\rho = 1, \ldots, r$, зависящая только от g и обладающая тем свойством, что во всякой максимальной $\mathfrak{G}_K$-циклической подгруппе группы единиц поля K (т. е. циклической подгруппе $\{H^s\}$, где H — единица поля K, $\sigma \in \mathfrak{G}_K$), в которой содержится единица E_0 поля K с численно наименьшим значением для $s(E_0) = \mathrm{spur}\,(E_0^2 + E_0^{-2})$, найдется единица E поля K, порождающая эту циклическую группу и обладающая показателем относительно единицы E_0, лежащей в системе $\mathfrak{S}$.

Подробных доказательств этих теорем в работе не приводится.

Б. М. Уразбаев

4525. О полях четвертой степени сигнатуры один с малыми дискриминантами. Годуин (On quartic fields of signature one with small discriminant. Godwin H. J.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 31, 214—222 (англ.)

Составляются таблицы полей 4-й степени сигнатуры один, не содержащих или содержащих квадратичные подполя (таблицы 1—2), дискриминанты которых лежат в пределах $-3280 \leqslant \Delta < 0$. Базисы у всех этих полей, исключая поля дискриминанта — 2787, у которого базис $1, \theta, \theta^2, 1/3\,(\theta^3 + \theta^2)$, оказываются степенными.

В монографии Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева (Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1940, **11**), методами которой пользуется автор, таблицы подобных полей вычислены для дискриминантов $-848 \leqslant \Delta < 0$ с полной их характеристикой (т. е. коэффициенты уравнений, базисы полей, дискриминанты подполей и их группы Галуа). В таблицах автора даются коэффициенты уравнений и базисы соответствующих полей.

Б. М. Уразбаев

4526. Об обобщенной теореме о главном идеале. Танака (On the generalized principal ideal theorem. Tannaka Tadao), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 65—70 (англ.)

Пусть k — поле алгебраических чисел, а K — «лучевое» поле классов над k с ведущим дивизором $\mathfrak{f}$ и с группой Галуа G. Доказывается, что если идеал $\mathfrak{a}$ поля K удовлетворяет условиям

$$\mathfrak{a}^{1-\sigma} = (A_\sigma), \quad \frac{A_\tau A_\sigma^\tau}{A_{\sigma\tau}} = \varepsilon_{\sigma,\tau} = \varepsilon_{\tau,\sigma} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$$

$$(\sigma, \tau \in G; \quad A_\sigma \in K),$$

то он является главным идеалом (в поле K).

З. И. Боревич

4527. Обобщение теоремы о главном идеале. Эрада (A generalization of the principal ideal theorem. Terada Fumiyuki), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 264—265 (англ.)

Обобщенная теорема о главном идеале (РЖМат, 1956, 6445) излагается в когомологических терминах.

З. И. Боревич

4528. Системы классов. III. Кавада (Class formations. III. Kawada Yukiyosi), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, Suppl. dec., 453—490 (англ.)

Начало см. РЖМат, 1956, 5127; 1958, 1864.

Пусть Ω/k_0 — бесконечное сепарабельное нормальное расширение поля k_0, $\mathfrak{R}$ — множество всех конечных расширений K/k_0, содержащихся в Ω, и $\{E(K)\}$, $K \in \mathfrak{R}$ — система классов для расширения Ω/k_0 (РЖМат, 1956, 5127). Для каждого нормального расширения K/k (k, $K \in \mathfrak{R}$) с группой Галуа $G(K/k)$ в группе $H^2(G(K/k), E(K))$ можно выбрать образующий элемент $c_{K/k}$ так, чтобы для полей $k \subset l \subset K \subset L$ из $\mathfrak{R}$ (L/k и K/k нормальны) имели место равенства $\lambda c_{K/k} = c_{L/k}^m$, $m = [L:K]$, $\rho c_{K/k} = c_{K/l}$, где λ изоморфизм подъема, а ρ — гомоморфизм ограничения для соответствующих групп когомологий. Обозначим через $W(K/k)$ расширение группы $E(K)$ при помощи $G(K/k)$, соответствующее элементу $c_{K/k}$. В работе изучается система групп $\{W(K/k)\}$, названная автором системой групп Вейля, ассоциированной с данной системой классов. Для случая поля алгебраических чисел эти группы были введены Вейлем (Weil A., J. Math. Soc. Japan, 1951, 3, № 1, 1—35). При некоторых ограничительных предположениях рассматривается также система $\{W(k)\}$ так называемых обобщенных групп Вейля, являющихся пределами обратных спектров групп $\{W(k/k)\}$ с фиксированным k. В случае системы классов для максимального неразветвленного расширения Ω/k_0 поля алгебраических функций k_0 от одной переменной над полем комплексных чисел дается явное описание групп $\{W(K/k)\}$ и $\{W(k)\}$.

З. И. Боревич

4529. Некоторые замечания о системах классов. Кавада (Some remarks on class formations. Kawada Yukiyosi), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 239—241 (англ.)

Краткое обозрение ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1956, 5127; 1958, 1864; реф. 4528).

4530. Связь между различными теориями абелева расширения и теорией полей классов. Кавада, Сугаку, 1954, **6**, № 3, 129—150 (японск.)

1-я часть статьи (§§ 1—3) воспроизводит предыдущую работу автора (РЖМат, 1956, 5127).

В § 4 автор дает обобщение теории Вейля расширений групп для полей алгебраических чисел (Weil A., J. Math. Soc. Japan, 1951, 3, 1—35). Пусть Ω — сепарабельное бесконечное нормальное расширение поля K_0 и пусть $\{A(k)\}$ — система классов для подполей k, которые конечны над K_0. Доказывается, что всегда существует система $\{W_{K,k}\}$ групп, называемых группами Вейля, подобных группам, определенных Вейлем для полей алгебраических чисел. Кроме того, для данной системы классов и фиксированного символа норменного вычета, любые две системы групп Вейля изоморфны, если выполнены следующие условия: (p) для всякого нормального расширения K/k существует циклическое расширение z/k такое, что $[K:k]$ делится на $[z:k]$; (p') имеется фундаментальная последовательность конечных расширений $k_0 \subset K_1 \subset K_2 \ldots$ такая, что $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

В § 5 упомянутая выше теория групп Вейля применяется к случаю неразветвленных расширений поля алгебраических функций над полем комплексных чисел, а также вводится и изучается каноническое выражение для групп. Вейль упоминает в своей статье понятие универсальной группы для поля рациональных чисел Q, которая является проективным пределом последовательности групп Вейля G_{K_nQ}.

Автор в § 6 рассматривает соответствующие группы $W_{\Omega,k}$ для конечного неразветвленного расширения k поля алгебраических функций k_0. Он показывает, что точное выражение для $W_{\Omega,k}$ может быть дано посредством множества канонических образующих $\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g$ и основных соотношений между ними $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \ldots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1$ для фундаментальной группы римановой поверхности.

В § 7 дан перечень нерешенных проблем.

Ван Сян-хао

4531. Расширения нормальных базисов и поля с вполне нормальными базисами. Фейт (Extensions of normal bases and completely basic fields. Faith Carl C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 2, 406—427 (англ.)

Пусть R — конечное нормальное сепарабельное расширение поля F; $G = \{S_1, \ldots, S_n\}$ — группа Галуа поля R над F; m — наименьшее общее кратное порядков элементов $S_1, \ldots, S_n$ группы G. Элемент $w \in R$ называется нормальным, если элементы $w^{S_1}, \ldots, w^{S_n}$ образуют базис поля R над F (нормальный базис над F), и вполне нормальным, если для любого промежуточного подполя P ($F \subseteq P \subseteq R$) элемент w порождает нормальный базис поля R над P.

Доказывается, что расширение R всегда содержит вполне нормальный элемент и что существуют расширения, не всякий нормальный элемент которых является вполне нормальным.

Поля R, для которых понятия нормального и вполне нормального элементов совпадают, называются полями с вполне нормальными базисами.

Если имеет место прямое разложение

$$R = R_1 \times \ldots \times R_k \quad (R_i \geqslant F),$$

то R является полем с вполне нормальными базисами тогда и только тогда, когда каждое из подполей $R_i \subset R$ обладает этим свойством.

Отсюда следует, что изучение абелевых расширений с вполне нормальными базисами сводится к такой же задаче для циклических расширений R' степени p^l над F (p — простое).

Показано, что если поле F содержит первообразный корень степени p из 1, то R' будет полем с вполне нормальными базисами тогда и только тогда, когда $g(F, p) = g(R', p)$, где $g(F, p)$ — наибольшее такое целое число, что все корни полинома $x^{p^g} - 1$ лежат в поле F.

Доказано также, что расширения Куммера поля F (абелевы расширения R, для которых поле F содержит первообразный корень степени m из 1) суть поля с вполне нормальными базисами. С. Д. Берман

4532. Относительно полные поля. Док Сэн Лим (Relatively complete fields. Dock Sang Rim), Duke Math. J., 1957, 24, № 2, 197—200 (англ.)

Неархимедовски нормированное поле K называется относительно полным, если для него справедлива лемма Гензеля (Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. I, М., Гостехиздат, 1947, стр. 316). Оказывается, что поле K относительно полно тогда и только тогда, когда существует единственное продолжение нормы этого поля на его алгебраическое замыкание.

Доказаны также теоремы о связи между относительной полнотой поля и подполя. С. Д. Берман

4533. Теорема об аппроксимации нормирований Крулля. Рибенбойм (Le théorème d'approximation pour les valuations de Krull. Ribenboim P.), Math. Z., 1957, 68, № 1, 1—18 (франц.)

Дается обобщение теоремы Крулля о нормах поля (J. reine und angew. Math., 1932, 167, 160—196).

Пусть $w_1, \ldots, w_r$ — нормы поля K, не обязательно попарно независимые, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ — группы значений этих норм, $a_1, \ldots, a_r$ — элементы соответственно из групп $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$.

Включение $(a_1, \ldots, a_r) \in \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_r$ называется совместимым (compatible), если для произвольных двух значков i, j ($i \neq j$) $\bar{a}_i = \bar{a}_j$. Здесь $\bar{a}_i$, $\bar{a}_j$ — образы элементов a_i, a_j при гомоморфизмах

$$\Gamma_i \to \Gamma_i/\Delta_{ij}, \quad \Gamma_j \to \Gamma_j/\Delta_{ji},$$

где Δ_{ij}, Δ_{ji} — изолированные подгруппы групп Γ_i, Γ_j, соответствующие наибольшему простому идеалу $\mathfrak{p}$, содержащемуся одновременно в кольцах нормирований w_i, w_j. Тогда, очевидно, $\Gamma_i/\Delta_{ij} \cong \Gamma_j/\Delta_{ji}$ (РЖМат, 1956, 5455). Равенство $\bar{a}_i = \bar{a}_j$ понимается в смысле упорядочения норм w_i, w_j относительно включения $\leqslant$: $w_i \leqslant w_j$, если $A_i \supseteq A_j$, где A_i, A_j — кольца нормирований w_i, w_j.

Обобщение состоит в следующем: для существования элемента $x \in K$, обладающего свойством $w_i(x) = a_i$ для всех $i = 1, \ldots, r$, необходимо и достаточно, чтобы элемент $(a_1, \ldots, a_r)$ удовлетворял отношению совместимости (теорема 5).

Дается применение этой теоремы к изучению арифметических свойств пересечения колец нормирований (теорема 6). Пусть $w_1, \ldots, w_r$ — нормы поля K, попарно несравнимые между собой относительно отношения порядка $\leqslant$, $A_1, \ldots, A_r$ — кольца нормирований $w_1, \ldots, w_r$ и пусть $A = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$ — пересечение колец $A_1, \ldots, A_r$. Далее, пусть $\mathfrak{p}_i^{(1)}$ — простой идеал кольца A_i, соответствующий норме w_i (РЖМат, 1956, 5455), $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A_i, удовлетворяющий условию $\mathfrak{p}_i^{(1)} \subset \mathfrak{a}_i \subseteq A_i$ и $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$ — идеал пересечения A. Тогда имеют место равенства: $\mathfrak{a}_i = A_i \cdot \mathfrak{a}$ ($i = 1, \ldots, r$). Наоборот, если $\mathfrak{a}$ — идеал кольца $A = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$, удовлетворяющий для всех $i = 1, \ldots, r$ условию $\mathfrak{p}_i^{(1)} \subset \mathfrak{a}_i = A_i \cdot \mathfrak{a}$, то тогда $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$. Б. М. Уразбаев

4534. Замечание о консервативных полях алгебраических функций. Масуда (Note on conservative

algebraic function fields. Masuda K.), Tôhoku Math. J., 1953, 5, 2 ser., № 1, 12—17 (англ.)

Поле алгебраических функций от одной переменной называется консервативным, если его род не меняется при любом расширении поля констант. Пусть R — сепарабельно порождаемое поле алгебраических функций от одной переменной характеристики $p \neq 0$ над полем констант K, и пусть x — сепарабельно порождающая переменная поля R. Доказывается, что поле консервативно тогда и только тогда, если каждая точка поля $K(x)$, соответствующая неприводимому многочлену вида $f(x^p)$, неразветвлена в поле R. З. И. Боревич

4535. Исправления. Накано (Berichtigungen. Nakano Noboru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1956, A20, № 1, 47 (нем.)

Некоторые исправления статей автора (РЖМат, 1955, 106, 5637, 5641; J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, 19, 239—253).

4536. Основы теории фробениусовых расширений. Каш (Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen. Kasch Friedrich), Math. Ann., 1954, 127, 453—474 (нем.)

Согласно известному критерию Брауэра и Несбита, алгебра Фробениуса σ над полем A характеризуется существованием двухстороннего A-операторного гомоморфизма σ на A, при котором ни один отличный от нуля правый или левый идеал из σ не переходит в нуль. В работе исследуется совершенно произвольное кольцо σ, обладающее подобного рода операторным гомоморфизмом на некоторое подкольцо A. Предполагается, что подкольцо A обладает единицей, удовлетворяет условию максимальности для идеалов и правый (левый) аннулятор в A любого собственного левого (правого) идеала $I_e \subset A$ отличен от нуля. Кольцо A кратко называется S-кольцом.

В гл. I развивается теория скалярного произведения $\langle l, r\rangle$ левого векторного пространства (в. п.) L и правого в. п. R над S-кольцом A. Скалярное произведение называется регулярным, если из условий $\langle l, R\rangle = 0$ и $\langle L, r\rangle = 0$ следует, что $l = r = 0$.

Пусть Ω — общее допустимое кольцо операторов, правых — для L и левых — для R, т. е. $(al)\omega = a(l\omega)$, $\omega(ra) = (\omega r)a$, $a \in A$, $\omega \in \Omega$, $\langle l\omega, r\rangle = \langle l, \omega r\rangle$.

По определению, L, R образуют фробениусову пару (F-пару), если при некотором выборе базисов в L/A и R/A соответствующие представления Ω в A эквивалентны.

В гл. II кольцо σ с единицей рассматривается как двустороннее в. п. над S-кольцом A. Регулярные скалярные произведения и двусторонние A-операторные гомоморфизмы σ на A, не содержащие в ядре никаких отличных от нуля идеалов (F-гомоморфизмы), взаимно соответствуют друг другу: σ/A называется F-расширением, если σ обладает F-гомоморфизмом в A. Доказывается, что σ, σ является F-парой над A относительно σ как допустимой области операторов в том и только в том случае, когда σ/A есть F-расширение. Ядро F-гомоморфизма σ на A является двусторонним A-допустимым подпространством размерности $n-1$.

На основе этого критерия показывается эквивалентность утверждений: 1) σ/A — F-расширение конечного ранга, 2) кольцо всех эндоморфизмов кольца σ как левого A-модуля есть F-расширение кольца эндоморфизмов σ^r, порожденного правыми мультипликаторами из σ. В частности, если A есть подкольцо Галуа (в смысле Накаямы (Nakayama T.)) простого кольца σ, то σ/A является F-расширением. Доказывается также, что класс F-колец и квази-F-колец замкнут относительно F-расширений.

В последней гл. III свойства F-расширений используются для доказательства одной теоремы приводимости, являющейся широким обобщением теоремы Машке о полной приводимости группового кольца и связанных с этим вопросом результатов Гашютца. А. И. Кострикин

4537. Коммутативные подалгебры наивысшей размерности алгебр Ли B_n, C_n и D_n. Чжао Сы-юань, Бэйцзин дасюэ сюэбао (Цзыжань кэсюэ), 1957, 3, № 2, 127—157 (кит.; рез. русск.)

Пусть G — алгебра матриц типа B_n, C_n или D_n над полем характеристики $\neq 2$, J — матрица билинейной формы, инвариантной относительно G. Для всякой матрицы U, такой, что $UJU' = J$, соответствие $X \to U^{-1}XU$ является автоморфизмом алгебры G. Две подалгебры алгебры G, сопряженные относительно такого автоморфизма, автор называет подобными. Доказывается, что в алгебрах B_n ($n > 4$ или $n = 3$), C_n ($n > 1$) и D_n ($n > 4$ или $n = 3$) все коммутативные подалгебры наивысшей размерности нильпотентны и подобны друг другу. Коммутативные подалгебры наивысшей размерности алгебр B_3 и D_3 также нильпотентны, но распадаются на два класса подобия. В алгебре C_1, кроме класса нильпотентных подалгебр, существуют также ненильпотентные коммутативные подалгебры наивысшей размерности; если из каждого элемента поля K можно извлечь квадратный корень, то все эти подалгебры также подобны друг другу. А. Л. Онищик

4538. Поправки. Чжао Сы-юань, Бэйцзин дасюэ сюэбао. Цзыжань кэсюэ, Acta Scient. natur. Univ. pekinensis, 1957, 3, № 3, (кит.)

Поправки к ранее опубликованной статье (реф. 4537)

4539. О коммутанте нормальной простой алгебры. Кодама (On the commutator group of normal simple algebra. Kodama Tetsuo), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A., 1956, 10, № 2, 141—149 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}/K$ — нормальная простая алгебра над полем K характеристики 0. Доказано, что если α — элемент из $\mathfrak{A}$, редуцированная норма которого $N_{\mathfrak{A}/K}\alpha$ равна 1, то α содержится в коммутанте $\mathfrak{A}^*$ группы $\mathfrak{A}'$ всех регулярных элементов алгебры $\mathfrak{A}$.

Иначе говоря, имеет место равенство $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — ядро связанного с редуцированной нормой гомоморфизма $\mathfrak{A}'$ в K (очевидно, всегда выполнено включение $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}'$).

Ранее аналогичный результат был получен для p-адической алгебры с делением (Nakayama T., Matsushima Y., Proc. Imp. Acad. Japan, 1943, 19) и для нормальной простой алгебры над полем алгебраических чисел (Wang S., Amer. J. Math., 1950, 72, 323—334). А. И. Кострикин

4540. Замечания к теории алгебр. Митас (Bemerkungen zur Algebrentheorie. Mitas Günter), J. reine und angew. Math., 1957, 197, № 1—2, 68—75 (нем.)

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — базис алгебры $\mathfrak{A}$ над полем Ω и пусть $\mathrm{Sp}(a)$ обозначает след матрицы регулярного представления элемента $a \in \mathfrak{A}$. Если матрица $(\mathrm{Sp}(u_i u_j))$ неособенная, то $\mathfrak{A}$ называется регулярно сепарабельной алгеброй. Доказываются утверждения: 1) Кольцо вычетов $\Omega[x]$ $(f(x))$ является регулярно сепарабельной алгеброй над Ω тогда и только тогда, если многочлен $f(x)$ взаимно прост со своей производной. 2) Если $\mathfrak{B}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, то при надлежащих предположениях относительно $\mathfrak{B}$ алгебра $\mathfrak{A}$ над Ω будет регулярно сепарабельной тогда и только тогда, если алгебры $\mathfrak{B}$ над Ω и $\mathfrak{A}$ над $\mathfrak{B}$ регулярно сепарабельны. 3) Пусть алгебра $\mathfrak{B} = \Omega[b]$, порожденная одним элементом b, регулярно сепарабельна. Если поле Ω бесконечно, то коммутативная алгебра вида $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}[a]$ порождается одним элементом: $\mathfrak{A} = \Omega[c]$, где $c = a + \omega b$, $\omega \in \Omega$. З. И. Боревич

4541. Теоремы сходимости, получаемые для индуцированных гомоморфизмов групповой алгебры. Джерисон, Рабсон (Convergence theorems obtained from induced homomorphisms of a group algebra. Jerison M., Rabson G.), Ann. Math., 1956, 63, № 1, 176—190 (англ.)

Рассматриваются отображения пространств функций, заданных на локально компактных группах G и Γ, индуцированные гомоморфным отображением π группы G на Γ. Одно из них определяется формулой $\varphi(\gamma) \to \varphi(\pi^{-1}\gamma)$, а другое — формулой $f(g) \to \int_{\pi^{-1}\gamma} f(g)\,dg$ (интегрирование ведется по мере Хаара ядра гомоморфизма). Формулируются некоторые соотношения между этими отображениями, а также теорема о приближении функции $f(g)$ функциями вида $\int_{\pi^{-1}\gamma} f(g)\,dg$, хорошо известная всем, занимавшимся функциями на топологических группах. Даются приложения этой теоремы к рядам по функциям Уолша и некоторым аналогичным системам функций. Эти приложения содержались в статье референта (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1947, 11, 363—400). Н. Я. Виленкин

4542. Дополнения и исправления к моей статье «Об алгебрах с ограниченными представлениями». Йосии (Supplements and corrections to my paper: «On algebras of bounded representation type». Yoshii Tensho), Osaka Math. J., 1957, 9, № 1, 67—85 (англ.)

Приводится более подробное доказательство одной из теорем статьи, указанной в заглавии (РЖМат, 1957, 4647), и устраняются допущенные в ней неточности. Кроме того, упрощено доказательство результата другой работы автора (РЖМат, 1957, 3840).

З. И. Боревич.

4543. Эквивалентность теорем Кронекера—Гензеля и Секереша об идеалах в кольце полиномов от одного переменного над кольцом главных идеалов с разложением на простые множители. Редеи (Äquivalenz der Sätze von Kronecker—Hensel und von Szekeres für die Ideale des Polynomringes einer Unbestimmten über einem kommutativen Hauptidealring mit Primzerlegung. Rédei Ladislaus), Acta scient. math., 1956, 17, № 3—4, 198—202 (нем.)

Пусть R — коммутативное кольцо главных идеалов; R' — система представителей классов ассоциированных между собой отличных от нуля элементов кольца R; $R(\rho)$ — полная система вычетов кольца R по mod ρ ($\rho \in R'$). Секереш (Amer. Math. Monthly, 1952, 59, 379—386) показал, что каждой системе элементов $\rho_1, \ldots, \rho_m \in R'$ ($m \geqslant 0$; $\rho_s \neq 1$) и системам вычетов $\rho_{ki} \in R(\rho_k)$ ($i = 0, \ldots, k-1$; $k = 1, \ldots, m$) однозначно соответствует примитивный идеал $I = (g_0(x), \ldots, g_m(x))$ (т. е. идеал со взаимно простыми в совокупности элементами) кольца полиномов $R[x]$, где полиномы $g_0(x), \ldots, g_m(x)$ определяются из рекуррентных соотношений:

$$g_0(x) = \rho_1 \ldots \rho_m;\ \rho_k g_k(x) = x g_{k-1}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_{ki} g_i(x),$$

причем все примитивные идеалы кольца $R[x]$ могут быть получены таким путем.

Другое описание идеалов кольца $R(x)$ (на языке модулей) получено Кронекером и Гензелем (Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig, 1901).

Доказывается эквивалентность теорем Секереша и Кронекера—Гензеля. С. Д. Берман

4544. Одно условие коммутативности колец. Херстейн (A condition for the commutativity of rings. Herstein I. N.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 4, 583—586 (англ.)

Доказывается, что если для любых элементов x, y ассоциативного кольца A существует такое целое число $n(x, y)$, $n(x, y) > 1$, что $(xy - yx)^{n(x,y)} = xy - yx$, то кольцо A коммутативно. Этот результат обобщает известное достаточное условие коммутативности, доказанное Джекобсоном (Jacobson N., Ann. Math., 1945, 46, 695—707). А. И. Ширшов

4545. Кольца с делителями нуля. Картан (Anneaux où zéro a des diviseurs. Cartan M. H.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1956, 36, № 179, 37—45 (франц)

4546. Модулярные идеалы, радикалы и полупростота колец. Андрунакиевич В. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 133—139

В последнее время в теории колец выделились два важных подкласса колец без нильпотентных идеалов, а именно полупростые кольца в смысле Джекобсона и полупростые кольца в смысле Брауна—Маккоя и Сегала.

Автор решает вопрос, каковы те более слабые условия, при которых указанные выше полупростые кольца представимы в виде конечной прямой суммы полных матричных колец над некоторыми телами. Попутно устанавливаются необходимые и достаточные условия, чтобы радикальные кольца в смысле Брауна—Маккоя и Сегала совпадали с радикальными кольцами в смысле Джекобсона.

В формулировках и доказательствах этих условий используются модулярные (регулярные, отмеченные) идеалы. Пусть K — произвольное ассоциативное кольцо. Правый идеал I называется правым модулярным (регулярным) идеалом, если в кольце K существует левая единица по модулю I, т. е. такой элемент e, что $ex - x \in I$ для любого x из K. Пусть a — произвольный элемент кольца K. Множество $\{ax - x\}$, где x пробегает кольцо K, является правым модулярным идеалом. Он обозначен через $[a]_r$. $[a]_r$ есть пересечение всех тех правых модулярных идеалов, по модулю которых элемент a является левой единицей.

Кольцо K называется квазирегулярным, если оно не содержит правых модулярных идеалов, отличных от K. Правый идеал I некоторого кольца K называется правым квазирегулярным идеалом, если кольцо I является квазирегулярным. Сумма всех правых квазирегулярных идеалов есть двусторонний квазирегулярный идеал.

Этот единственный максимальный двусторонний квазирегулярный идеал J называется радикалом кольца K в смысле Джекобсона. Радикал J содержит все односторонние ниль-идеалы.

Фактор-кольцо $\overline{K} = K/J$ является полупростым в смысле Джекобсона.

Теорема 1. Кольцо K без радикала J и с условием минимальности для главных правых модулярных идеалов является конечной прямой суммой полных матричных колец над некоторыми телами. Обратное утверждение очевидно.

Модулярный идеал I кольца K называется собственным, если I отличен от K.

Теорема 2. Если в ненулевом кольце K радикал $J(K)$ не является собственным модулярным идеалом, то кольцо K будет квазирегулярным тогда и только тогда, когда оно содержит хотя бы один минимальный правый модулярный идеал.

Кольцо K называется присоединенно-простым, если оно не допускает гомоморфных отображений на ненулевые кольца с единицей. Идеал I некоторого кольца K называется присоединенно-простым, если I — присоединенно-простое кольцо. Сумма всех присоединенно-простых идеалов является также присоединенно-простым идеалом. Этот единственный максимальный при-

соединенно-простой идеал и есть радикал в смысле Брауна—Маккоя и Сегала. Он обозначается через $N(K)$ или просто N. Радикал N содержит радикал J, но, вообще говоря, не совпадает с ним. Если $N=0$, то кольцо K называется полупростым в смысле Брауна—Маккоя и Сегала. Фактор-кольцо $\overline{K}=K/N$ является кольцом без радикала.

Теорема 3. Кольцо без радикала N и с условием минимальности для главных идеалов является дискретной прямой суммой простых колец с единицей. Обратное утверждение очевидно.

Следствие. Кольцо K без радикала N и с условием минимальности для главных правых идеалов есть дискретная прямая сумма полных матричных колец над некоторыми телами.

Теорема 4. Кольцо без радикала N и с условием минимальности для главных модулярных идеалов есть конечная прямая сумма простых колец с единицей. Обратное утверждение очевидно.

Теорема 5. Если в ненулевом кольце K радикал $N(K)$ не является собственным модулярным идеалом, то кольцо K присоединенно-просто тогда и только тогда, когда оно содержит хотя бы один минимальный модулярный идеал. В. И. Шнейдмюллер

4547. **Об определяющих уравнениях для матричных единиц в примарном кольце.** Хенке (Über die definierenden Gleichungen für Matrizeneinheiten in primären Ringen. Hoehnke Hans-Jürgen), Wiss. Z. Martin—Luther—Univ. Halle—Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 1956—1957, 6, № 1, 1—4 (нем.)

Пусть A — кольцо с единицей, а R — его радикал. Если фактор-кольцо $\bar{A}=A/R$ просто, то кольцо A называется примарным кольцом. Число слагаемых r в разложении $\bar{A}$ в прямую сумму минимальных левых идеалов называется степенью A.

Доказано, что в кольце A существует r^2 элементов l_{ij} таких, что $A=\sum_i\sum_j De_{ij}$, где $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$, $de_{ij}=e_{ij}d$, $d\in D$, D — некоторое подкольцо кольца A. Если, кроме того, некоторые r^2 элементов u_{ij} кольца A удовлетворяют системе уравнений

$$u_{ij}u_{kl}=\delta_{jk}u_{il}$$

и не все u_{ij} равны нулю, то в кольце A существует такой регулярный элемент a, что $u_{ij}=ae_{ij}a^{-1}$.

Д. А. Супруненко

4548. **Алгебраическая характеристика фиксированных идеалов в некоторых функциональных кольцах.** Перселл (An algebraic characterization of fixed ideals in certain function rings. Pursell Lyle E.), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 2, 963—969 (англ.)

Рассматривается кольцо R функций, заданных на регулярном топологическом пространстве X и принимающих значения в теле D. Идеал I в R называется фиксированным, если существует точка x такая, что $f(x)=0$ для всех f из I. Через $A(f)$ обозначается совокупность всех функций g таких, что $fg=gf=0$, и через $H(f)$ множество всех ненулевых функций g из R таких, что образ f имеет обратный элемент в фактор-кольце $R/A(g)$. Идеал I называется ограниченным функцией f, если $H(f)\supset H(g)$ для всех g из I. Автор рассматривает некоторый класс колец функций, для которых, в частности, понятия ограниченного и фиксированного идеалов совпадают. Для таких колец строится топологическое пространство ограниченных максимальных идеалов, которое оказывается гомеоморфным пространству X. Устанавливается связь между автоморфизмами кольца R и гомеоморфизмами пространства X. К рассматриваемому классу колец относятся кольца непрерывных функций на нормальных хаусдорфовых пространствах, все точки которых суть G_δ, кольца r раз дифференцируемых функций на r раз дифференцируемых многообразиях и др. Н. Я. Виленкин

4549. **О линейно топологических алгебрах.** Баллир (Über lineartopologische Algebren. Ballier Friedhorst), J. reine und angew. Math., 1956, 195, № 1—2, 42—75 (нем.)

Алгебра L над полем K называется линейно топологической, если в ней введена отделимая топология T такая, что: а) существует система окрестностей нуля, состоящая из подалгебр, б) алгебраические операции непрерывны в топологии T, в) окрестности любой точки получаются перенесением в эту точку окрестностей нуля. Это понятие инвариантно относительно основных алгебраических и топологических операций, как, например, перехода к подалгебре, фактор-алгебре, пополнению, образованию топологической прямой суммы и т. д. Для того чтобы произведение в алгебре L было равномерно непрерывно относительно обоих сомножителей, необходимо и достаточно, чтобы в алгебре L существовала система окрестностей нуля, состоящая из двусторонних идеалов. Рассматриваются различные свойства радикалов, спектры, представления различных классов алгебр в виде проективных пределов дискретных алгебр и т. д. Если алгебра L линейно компактна, то ее радикал замкнут, регулярен, топологически нильпотентен и равен пересечению содержащих его открытых максимальных двусторонних идеалов. Для коммутативных линейно компактных алгебр радикал является совокупностью элементов, n-е степени которых стремятся к нулю. Рассматриваются также линейно топологические алгебры, обладающие достаточным числом непрерывных гомоморфных отображений на основное поле. Н. Я. Виленкин

4550. **Линейно компактные модули и кольца. II.** Лептин (Linear kompakte Moduln und Ringe. II. Leptin Horst), Math. Z., 1957, 66, № 4, 289—327 (нем.)

Часть 1 см. РЖМат, 1956, 1091.

Линейно компактным в узком смысле модулем называется полный линейно топологический модуль, в котором дискретные фактор-модули удовлетворяют условию минимальности. R-модуль $\mathfrak{M}$ называется точным, если из того, что $\xi\mathfrak{M}=0$ ($\xi\in R$) следует, что $\xi=0$. Точный линейно компактный модуль над линейно компактным кольцом R тогда и только тогда является прямой суммой минимальных подмодулей, когда R полупросто. Если R — линейно компактное кольцо с радикалом N, то либо ${}_*N=N_*=N_k$, где k — натуральное число, либо ${}_*N+N_*=N_\omega=\bigcap_{k=1}^{\infty}N^k$ (относительно всех обозначений см. РЖМат, 1956, 1091). В работе указана конструкция широкого класса колец (колец сверхнепрерывных эндоморфизмов некоторых прямых сумм неприводимых модулей). Среди колец этого класса есть кольца с идемпотентным радикалом. Ряд теорем доказан о кольцах матриц над полными линейно топологическими кольцами (при этом рассматриваются и бесконечные матрицы). В частности, если кольцо R имеет единицу, то между замкнутыми двусторонними идеалами в R и в кольце матриц R^a существует взаимно однозначное соответствие. Если кольца R и R^a линейно компактны, то радикалы этих колец при этом соответствуют друг другу. Линейно компактное в узком смысле кольцо R с единицей является прямой суммой неразложимых левых идеалов $R=\sum_\alpha Re_\alpha$, порожденных минимальными ортогональными идемпотентами e_α. Рассматриваются также некоторые свойства чистых гомоморфизмов модулей. По-

строен также аналог теории двойственности для локально линейно компактных модулей. Н. Я. Виленкин

4551. Дифференцирования нильпотентных лиевых алгебр. Дикмье, Листер (Derivations of nilpotent Lie algebras. Dixmier J., Lister W. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 155—158 (англ.)

Джекобсон (РЖМат, 1956, 7917) доказал, что если лиева алгебра над полем характеристики нуль обладает неособенным дифференцированием, то она нильпотентна. В работе строится пример лиевой алгебры нулевой характеристики, нильпотентной относительно своей алгебры дифференцирований. Отсюда следует, что результат Джекобсона обратить нельзя.

Б. И. Плоткин

4552. Обобщение теоремы о простых альтернативных кольцах. Клейнфельд (Generalization of a theorem on simple alternative rings. Kleinfeld Erwin), Portugaliae math., 1955, 14, № 3—4, 91—94 (англ.)

Доказано, что если пересечение I ненулевых идеалов альтернативного кольца R не является ниль-кольцом, то R или ассоциативно или является алгеброй Кэли—Диксона (ср. РЖМат, 1955, 1119). Строится пример, показывающий недостаточность допущения $I \neq 0$.

Л. А. Скорняков

4553. Характеристические свойства фильтров алгебры Буля. Монтейро (Propiedades caracteristicas de los filtros de un algebra de Boole. Monteiro Antonio), Acta cuyana ingenieria, 1954, 1, № 5, 6 p.) (исп.)

Структура R с нулем 0 называется дизъюнктивной, если для любых ее таких элементов a, b, что $a \neq a \cap b$, существует такой элемент z, что $a \cap z \neq 0$ и $b \cap z = 0$. Структура R с нулем 0 называется компактной, если из того, что $0 = \bigcap_i x_i$, следует существование конечного числа индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ таких, что $0 = x_{i_1} \cap x_{i_2} \cap \ldots \cap x_{i_n}$. Элемент z в дистрибутивной структуре R с нулем 0 и единицей 1 называется булевым, если для него существует дополнение z' ($z \cup z' = 1$ и $z \cap z' = 0$). Структура R называется регулярной разъединяемой, если каждый ее элемент является произведением булевых элементов. Подмножество S в структуре R называется подбазой в R, если всякий элемент $x \in R$ является произведением конечного числа конечных сумм элементов из S. Подмножество P в структуре R называется совместным, если всякое конечное произведение элементов из P отлично от 0. Подмножество P в структуре R называется центрированным, если существует элемент c ($\neq 0$) такой, что $c \leqslant k$, где k — произвольный элемент из P. Подмножество P в структуре R называется компактным, если всякое его подмножество совместимо и центрированно.

Доказано две теоремы.

Теорема 1. Для изоморфизма дистрибутивной структуры R множеству всех фильтров (идеалов) некоторой булевой алгебры необходимо и достаточно, чтобы R была полной, компактной и регулярно разъединяемой.

Теорема 2. Для изоморфизма дистрибутивной структуры R множеству всех фильтров (идеалов) некоторой булевой алгебры необходимо и достаточно, чтобы R была полной и содержала подбазу S, состоящую из булевых элементов.

Ю. И. Соркин

4554. К дистрибутивным подструктурам модулярных структур. Мусти, Буттафуоко (Sui subreticoli distributivi dei reticoli modulari. Musti Romolo, Buttafuoco Ettore), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 4, 584—587 (итал.)

Йоунссон (РЖМат, 1956, 7210) показал, что необходимым и достаточным условием того, чтобы подсистема элементов X порождала в модулярной структуре дистрибутивную подструктуру, является выполнение равенств

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \prod_{j=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i \prod_{j=1}^{n} y_j\right),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ — произвольные элементы из X. Эти равенства в общем случае не являются независимыми, в чем легко убедиться на случае, когда система X состоит из 3 или 4 элементов. Автор показывает, что можно ограничиться требованием выполнения всего $n - 2$ равенств:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)\, x_{r+1} x_{r+2}, \ldots, x_n =$$
$$= x_1 x_{r+1} x_{r+2} \ldots x_n + x_2 x_{r+1} x_{r+2} \ldots x_n + \ldots +$$
$$+ x_r x_{r+1} x_{r+2} \ldots x_n, \quad r = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Ю. И. Соркин

4555. Универсальные относительные системы. Йоунссон (Universal relational systems. Jónsson Bjarni), Math. scand., 1956, 4, № 2, 193—208 (англ.)

Пусть α — порядковое число и пусть дан некоторый класс K систем (множество с некоторым множеством отношений). Система $\mathfrak{A} \in K$ называется ($\aleph_\alpha$, K)-универсальной, если мощность системы $\mathfrak{A}$ равна $\aleph_\alpha$ и всякая система $\mathfrak{B} \in K$ такая, что ее мощность не превышает $\aleph_\alpha$, изоморфна некоторой подсистеме системы $\mathfrak{A}$. Изучается вопрос о существовании ($\aleph_\alpha$, K)-универсальных систем. Найдены достаточные условия существования ($\aleph_\alpha$, K)-универсальных систем в предположении справедливости обобщенной гипотезы континуума. Показано, в частности, что эти условия выполнены (при $\alpha > 0$), когда K является классом всех групп, классом всех группоидов, классом всех структур или классом всех частично упорядоченных множеств, мощности которых соответственно не превышают $\aleph_\alpha$.

Ю. И. Соркин

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

4556. Равносильные преобразования релейных схем класса П. Рогинский В. Н., Докл. АН СССР, 1957, 113, № 2, 328—331

Под равносильными понимаются такие релейные схемы, в которых при одинаковом характере и порядке воздействия извне реле работают в одинаковом порядке и исполнительные цепи находятся в одинаковом состоянии. Излагаются принципы преобразований релейных схем класса П, приводящих к равносильным схемам. Рассматриваемые преобразования затрагивают не только чисто контактные схемы, но и схемы, содержащие также элементы конечной проводимости G (сопротивления, обмотки реле и т. п.). В отличие от контактов, обладающих двумя крайними значениями проводимости: 0 (разрыв) и 1 (короткое замыкание), проводимость элементов G удовлетворяет неравенству $0 < G < 1$.

Вводится понятие «порядок проводимости», характеризующее воздействие проводимости на работу реле. Например, если проводимость G, включенная последовательно с реле A, приводит к такому уменьшению тока в обмотке, что реле отпускается, а параллельное подключение этой же проводимости не нарушает работы реле, то принимается, что порядок проводимости G меньше порядка проводимости A. Такая проводимость G обозначается символом $G_{<A}$.

С помощью аналогичных рассуждений определяется порядок проводимости и для других случаев, где используются символы $G_{>A}$, $G_{\geqslant A}$, $G_{\leqslant A}$, $G_{=A}$.

Выводятся законы, справедливые для релейных схем с конечными проводимостями, и формулируются правила преобразования таких схем. В заключение приведен пример синтеза схемы двоичного счетчика, иллюстрирующий предложенные равносильности и правила преобразования релейных схем. Полученная схема имеет по одному контакту на каждом реле. Библ. 8 назв. В. Г. Лазарев

4557. К вопросу о структурном проектировании симметрических контактных схем. Поваров (До питання про структурне проектування симетричних контактних схем. Поваров Г. М.), Автоматика, АН УкрССР, 1956, № 4, 48—53 (укр.; рез. русск.)

Излагается чисто графический вариант метода каскадов, специально приспособленный для конструирования симметрических контактных $(1, k)$-полюсников. Ранее метод каскадов был изложен в алгебраическом варианте (РЖМат, 1955, 4012). Условия проводимости симметрического $(1, k)$-полюсника с n приемными элементами задаются k симметрическими булевыми функциями n переменных, которые однозначно определяются своими рабочими числами. Индексация приемных элементов произвольна. Приводится пример синтеза двоичного сумматора на три слагаемых.

Пусть переменная x_j обладает целочисленным весом $q_j \geqslant 1$. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется квазисимметрической относительно взвешивания $q_1, q_2, \ldots, q_n$, если ее значение однозначно определяется суммой весов тех переменных, что приняли значение 1. Каждая сумма весов, при которой функция принимает значение 1, называется рабочим числом квазисимметрической функции. Графический вариант метода каскадов применим и для синтеза квазисимметрических $(1, k)$-полюсников, но индексация приемных элементов здесь уже небезразлична. Как пример приводится схема электрической браковки. Любая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является квазисимметрической относительно взвешивания $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. Рабочими числами служат номера конституентов единицы, на которые функция разлагается. Таким образом, графический вариант метода каскадов пригоден для любых $(1, k)$-полюсников. Для перевода функции из числовой формы в алгебраическую и обратно можно использовать методику Свободы (РЖМат, 1957, 5401). Из резюме автора

4558. Реализация симметрических функций в классе П-схем. Коробков В. К., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 2, 260—263

4559. Переключательные функции вообще и симметрические в частности. Риги (Le funzioni di commutazione in genere e quelle simmetriche in particolare. Righi Rigo), Ingegneria ferroviaria, 1955, 10, № 10, 719—737 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Разбираются возражения противников алгебры релейно-контактных схем, обвиняющих ее в практической бесполезности. Главный довод обвинения — неприспособленность этой алгебры к записи и упрощению структуры мостиковых схем. Соглашаясь, что сведение преобразований мостиковых схем к преобразованиям параллельно-последовательных схем искажает характер изучаемого явления, автор призывает к поискам «простой и надежной связи» между булевыми («переключательными») функциями и оптимальными вариантами схем и к изучению инвариантных свойств булевых функций относительно различных операций.

Затем после кратких замечаний о разложении булевых функций на конституенты единицы («элементарные функции») и о типах булевых функций (РЖМат, 1953, 1113) исследуются симметрические булевы функции (с.б.ф.) и их схемы. Перечисляются основные свойства с.б.ф., и дается 45 формул их разложения, в том числе ряд новых. По примеру Гилберта (РЖМат, 1955, 4017), с.б.ф., записываемые без операции отрицания, названы фронтальными; отрицания фронтальных с.б.ф. названы антифронтальными с.б.ф., прочие с.б.ф. названы полными. Перечислены самодвойственные фронтальные и антифронтальные с.б.ф. Рассматриваются также функции одного типа с с.б.ф. («обобщенные с.б.ф.») и частично симметрические булевы функции. Описывается геометрическое представление функций одного типа с с.б.ф. множествами вершин многомерного гиперкуба, и исследуется метрика этих функций. Предлагается геометрический критерий для опознания функций одного типа с с.б.ф., который кратко можно сформулировать так: булева функция является с.б.ф. или функцией одного типа с с.б.ф. тогда и только тогда, когда вершины, изображающие ее конституенты, целиком заполняют либо целиком не заполняют каждый сегмент, вырезанный гиперкубом в каждой из концентрических сфер, описанных вокруг какой-либо вершины гиперкуба.

Примечание референта. Референт получил некоторые аналогичные результаты другим путем (РЖМат, 1957, 7720). Г. Н. Поваров

4560. Синтез контактных (p, q)-полюсников. Блох А. Ш., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 5, 1017—1020

4561. Складное дерево. Бёркс, Мак-Нотон, Полмар, Уоррен, Райт (The folded tree. Burks Arthur W., McNaughton Robert, Pollmar Carl H., Warren Don W., Wright Jesse B.), J. Franklin Inst., 1955, 260, № 2, 115—126 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1956, 5772.

Дается математическое обоснование метода расщепления и исследуется экономичность складного дерева (с. д.). Схемы рассматриваются абстрактно, как графические диаграммы. Доказывается, что n-ярусное с. д. имеет минимальное число переключающих контактов в классе прогрессивных схем с n-приемными реле. Прогрессивной называется схема с 1 входом и 2^n выходами, которая по условиям проводимости между входом и выходом равносильна полному декодирующему дереву и состоит из переключающих контактов, причем каждая исполнительная цепь проходит через переключающие контакты только в направлении от подвижной к неподвижной пружине. Высказывается догадка, что с. д. вообще минимально по числу контактов среди равносильных ему контактных схем. В заключение теория с. д. обобщается на многопозиционные приемные элементы, имеющие m-ламельные контактные поля. Определяется понятие с. д. для таких элементов и доказывается, что последовательность $S(1, 2)$ для n-ярусного с. д. есть допустимая последовательность (д. п.) с n ненулевыми членами; здесь д. п. — это последовательность, в которой есть хотя бы одна единица, сумма членов равна $(m^p - 1)/(m - 1)$ (где p — число ненулевых членов), при $k \leqslant p$ всегда $M(S) \geqslant (m^k - 1)/(m - 1)$ и $a_k - 1$ всегда делится на $m - 1$. В приложении показано, что любое с. д., в том числе при $m > 2$, получается из стандартного дерева перестановками приемных элементов в различных поддеревьях. Г. Н. Поваров

4562. Об уменьшении числа контактов путем перехода к мостиковым схемам. Сопряженные непосредственные проводимости. Константинеску (Asupra reducerii numărului de contacte prin introducerea circuitelor în punte. Conductibilităţi directe conjugate. Constantinescu Paul), Studii şi cercetări mat., 1956, 7, № 3-4, 399—419 (рум.; рез. русск., франц.)

Определяется понятие сопряженных непосредственных проводимостей как проводимостей вида:

$$a_{\alpha\mu} = P + RS, \quad a_{\alpha\nu} = R + PS,$$

где P, R, S — булевы функции. При помощи введенного понятия доказывается ряд теорем, позволяющих упрощать схемы из некоторого подкласса класса Π-схем. Доказывается, что всякая полная проводимость $\chi_{\alpha\beta}(A)$ между полюсами α и β может быть представлена в виде (1):

$$\chi_{\alpha\beta}(A) = a_{\alpha\beta} + a_{\alpha 1}\overset{\hat{a}}{\chi}_{1\beta}(A) + \ldots + a_{\alpha,\,\alpha-1}\overset{\hat{a}}{\chi}_{\alpha-1,\,\beta}(A) +$$

$$+ a_{\alpha,\,\alpha+1}\overset{\hat{a}}{\chi}_{\alpha+1,\,\beta}(A) + \ldots + a_{\alpha,\,\beta-1}\overset{\hat{a}}{\chi}_{\beta-1,\,\beta}(A) +$$

$$+ a_{\alpha,\,\beta+1}\overset{\hat{a}}{\chi}_{\beta+1,\,\beta}(A) + \ldots + a_{\alpha,\,n}\overset{\hat{a}}{\chi}_{n\beta}(A).$$

Здесь $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ — непосредственная проводимость между полюсами α и β; $\overset{\lambda}{\chi}_{ij}(A)$ — полная проводимость между полюсами i и j, в которую не включена проводимость через узел λ.

Указывается, что, разлагая все $\overset{\lambda}{\chi}_{ij}(A)$ по формуле, аналогичной (1), и подставляя это разложение в (1), можно убедиться в том, что полная проводимость между двумя полюсами α и β есть сумма проводимостей всех возможных цепей между этими полюсами. Рассматривается p-полюсник, содержащий n узлов и заданный матрицей $A = \{a_{ij}\}$ непосредственных проводимостей. Предполагается, что существуют две сопряженные непосредственные проводимости: $a_{\alpha\mu} = P + RS$, $a_{\alpha\nu} = R + PS$; $a_{ij} = 0$, если $i = \alpha$, $j \neq \mu, \nu, \alpha$ или если $i \neq \mu, \nu, \alpha$, $j = \alpha$. Строится новый многополюсник с матрицей $B = \{b_{ij}\}$ непосредственных проводимостей ($ij = 1, 2, \ldots, n$), где $b_{\alpha\mu} = P$, $b_{\alpha\nu} = R$, $b_{\nu\mu} = b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + S$, а остальные $b_{ij} = a_{ij}$. Доказывается, что в этом случае $\chi_{\alpha\beta}(A) = \chi_{\alpha\beta}(B)$.

Рассматривается такой многополюсник с матрицей $A = \{a_{ij}\}$ непосредственных проводимостей, что $a_{ij} = 0$ при всех $i, j \neq \alpha$; $a_{ij} = 1$, если $i = j$, и $a_{\alpha\mu} = P + RS$, $a_{\alpha\nu} = R + PS$. Строится многополюсник с матрицей $B = \{b_{ij}\}$ непосредственных проводимостей, где $b_{\alpha\mu} = P$, $b_{\alpha\nu} = R$, $b_{\mu\nu} = S$, а остальные $b_{ij} = a_{ij}$. Доказывается, что в этом случае $\chi_{\alpha\beta}(A) = \chi_{\alpha\beta}(B)$ $\beta = 1, \ldots, n$.

Указывается, что обе теоремы полезны при построении $(1, k)$-полюсника (в том числе и в случае $k = 1$). Рассматривается многополюсник с матрицей $A = \{a_{ij}\}$ непосредственных проводимостей такой, что

$$\left.\begin{aligned} a_{\rho\mu} &= P_\rho + R_\rho S \\ a_{\rho\nu} &= R_\rho + P_\rho S \end{aligned}\right\} \text{ для всех } \rho \neq \mu, \nu$$

(т. е. такой, что непосредственные проводимости между узлами μ и i попарно сопряжены непосредственными проводимостями между узлами ν и i, $i = 1, 2, \ldots$). Строится новый многополюсник с матрицей непосредственных проводимостей $B = \{b_{ij}\}_{i,\,j=1,\ldots,n}$ такой, что

$$\left.\begin{aligned} b_{\rho\mu} &= P_\rho \\ b_{\rho\nu} &= R_\rho \end{aligned}\right\} \text{ для всех } \rho \neq \mu, \nu \text{ и } b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + S, \text{ остальные } b_{ij} = a_{ij}$$

Доказывается, что $\chi_{\alpha\beta}(A) = \chi_{\alpha\beta}(B)$ для всех пар значений α и β, кроме пары (μ, ν) (а следовательно, и пары (ν, μ)). Указывается, что последнее утверждение может оказаться полезным при упрощении как $(1, k)$-полюсников, так и неориентированных многополюсников. Приводятся примеры упрощения схем путем введения мостиковых элементов на основе доказанных соотношений. В. М. Остиану

4563. Переходные режимы в релейно-контактных схемах. Меклер Я. И., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, XIII, № 1, 59—70

Рассматриваются нарушения работы схем при добавлении нуля и умножении на единицу, и дается методика, позволяющая избежать эти нарушения и строить надежные схемы. Эта методика позволяет легко преобразовать схемы, требующие перекрытия контактов или, наоборот, требующие неперекрытия, в нормальные схемы, свободные от этих требований.

Резюме автора

4564. Метод синтеза схем с заданными программами работы. Моисил (O metodă pentru sinteza schemelor cu programe de lucru date. Moisil Gr. C.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR. Fil. Iaşi, 1955, Ser. 1, 6, № 1-2, 19—27 (рум.; рез. русск., франц.)

Предлагается метод синтеза релейно-контактных схем по заданной программе работы исполнительных элементов. Этот метод проще метода, предложенного ранее автором (РЖМат, 1958, 1048), однако может не привести к схеме с минимальным числом реле (промежуточных элементов).

Если a есть какой-либо приемный элемент, то программа приказов π_j, передаваемых приемными элементами исполнительным, записывается в виде последовательности равенств

$$a_N = a_N, \ldots, a_{N+H} = a_{N+H},$$

где a_i принимают значения 0 или 1. Для упрощения записи вводится оператор Ω равенствами:

$$\Omega' a = a, \quad \Omega'' a = \bar{a}, \quad \Omega''' a = 1.$$

Программа приказов приемных элементов может быть записана семейством таких операторов.

Рассматриваются три случая работы исполнительного элемента:

1) исполнительный элемент W срабатывает в такте $N + H$ при условии, что была выполнена одна из программ приказов $\pi_1, \ldots, \pi_s$ в тактах $N, \ldots, N + H$, и не срабатывает в остальных случаях;

2) исполнительный элемент с блокировкой W срабатывает в такте $N + H$ при условии, что одна из программ приказов $\pi_1, \ldots, \pi_s$ выполнена на протяжении $N + 1$ тактов, предшествующих $(N + H)$-му такту, и не срабатывает в $(N + H)$-м также во всех остальных случаях;

3) исполнительный элемент W срабатывает и затем сохраняет свое состояние до нового приказа; это понятие срабатывания с автоматической памятью до изменения приказа отличается от предыдущего понятия срабатывания с блокировкой тем, что элемент, включенный однажды на блокировку, уже не может быть деблокирован никаким приказом.

Для этих трех случаев выводятся рекуррентные уравнения для W и промежуточных реле. Синтез сводится к составлению этих уравнений. Изложенный метод иллюстрируется на 4 примерах. Библ. 4 назв.

В. М. Остиану

4565. Использование мнимых чисел Галуа в теории автоматических механизмов. VI. Классификация эволюций схем с двумя промежуточными элементами. Вайда (Întrebuinţarea imaginarelor lui Galois în teoria mecanismelor automate. VI. Clasificarea evoluţiilor schemelor cu două elemente intermediare. Vaida D.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. R. Secţia de ştiinţe mat. şi fiz., 1956, 8, № 1, 21—29 (рум.; рез. русск., франц.)

Предыдущие части см. РЖМат, 1956, 790, 791; 1957, 3832, 7718, 7719. Приводится классификация эволюций схем (релейно-контактных. *Ред.*) с двумя промежу-

точными элементами без запаздывания. Рекуррентное уравнение схемы этого типа имеет вид

$$Z_{N+1} = az_N^3 + bz_N^2 + cz_n + a \qquad (1)$$

с коэффициентами в $GF(2^2)$. При помощи преобразований

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \lambda\zeta + \mu \\ \zeta &= \lambda\zeta^2 + \mu \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

с коэффициентами в $GF(2^2)$ и с $\lambda \neq 0$, произведенных над Z_N и z_{N+1}, 256 полиномов (1) сводятся к 19 каноническим формам. Любая схема рассматриваемого типа изоморфна, согласно (2), одной из схем, данных этими каноническими полиномами. Таким образом, указанные 256 схем с двумя промежуточными элементами без запаздывания сводятся к 19.

Из резюме автора

4566. **О методе введения вторичных реле в релейные схемы.** Гото (Goto M.), Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab., 1955, 19, № 10, 40—48 (японск.; рез. англ.)

Автор расширяет свой предыдущий метод введения вторичных реле в релейные схемы, комбинируя новую многомерную кубическую диаграмму и методику Хафмена (РЖМат, 1955, 3444). Г. Н. Поваров

4567. **Об алгебраической теории работы мигающих устройств.** Попович (Asupra teoriei algebrice a funcţionării sclipitorilor. Popovici Constantin P.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 2, 245—252 (рум.; рез. русск. франц.)

Рассматривается работа мигающих устройств различных конструкций. Под мигающим устройством понимается устройство, состоящее из U-образной трубки, заполненной ртутью. Уровни ртути могут быть изменены нагреванием при помощи электрического тока. При изменении уровней ртути электрическая цепь разрывается, нагревание прекращается и ртуть возвращается в первоначальное положение. Указывается, что ввиду устойчивости уровней ртути мигающее устройство может быть рассматриваемо как элемент релейного действия. Структурные формулы мигающих устройств различных конструкций были получены при помощи алгебраических преобразований Моисилом (РЖМат, 1958, 1048). Автор предлагает другой метод вывода структурных формул мигающих устройств, исходя из учета веса ртути в момент изменения уровней, инерции массы ртути, давления расширяющегося слоя газа, прилегающего к нагреваемой части ртути, а также из учета положений уровней в предшествующий момент времени. Доказывается, что полученные этим методом структурные формулы эквивалентны формулам, полученным по методу Моисила. Изложение метода иллюстрируется примерами. В. М. Остиану

4568. **К алгебраическому исследованию электрических схем на реле и многопозиционных элементах.** Гоилав (Contribuţii la tratarea algebrică a schemelor electrice cu relee şi contacte multipoziţionale. Goilav E.), Electrotehnica, 1956, 4, № 3, 130—138 (рум.; рез. русск., нем.)

Указывается, что обычно релейные схемы проектируются в предположении, что контакты входящих в них реле удовлетворяют соотношениям: $a\bar{a} = 0$; $a + \bar{a} = 1$. Однако в переходном процессе какое-либо из этих соотношений (в зависимости от конструкции элементов) нарушается, и поэтому в действительности схема может не выполнить предписанную ей программу. Контакты элементов, переходный процесс в которых влияет на работу схемы, названы многопозиционными. Показывается на примерах, что в некоторых случаях неправильную работу схемы, происходящую из-за идеализации работы контактов, удается устранить. Если структурная формула схемы содержит переменные, соответствующие как двухпозиционным, так и многопозиционным контактам, то следует исключить переменные, соответствующие многопозиционным контактам, из тех членов структурной формулы, в которых эти переменные меняют значение. Этого можно достичь, используя преобразования булевой алгебры. Если структурная формула содержит переменные, соответствующие только многопозиционным контактам, то соответствующая схема выполнит предписанную программу только в том случае, когда в каждом такте хотя бы одна из переменных не изменяет своего значения.

В. М. Остиану

4569. **О некоторых релейных схемах с временными и токовыми зависимостями.** Неделку Мариана, Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, 1, № 2, 237—255

Излагаются приемы анализа и синтеза релейных схем, в которых по условиям работы необходимо применить реле с замедлением или с токовыми (параметрическими) зависимостями.

Для временных зависимостей автор определяет замедление как число тактов от момента подачи или прекращения воздействия до момента, когда реле сработает или отпустит. Указывается, как учитывать эти замедления при построении схем.

При выявлении таковых зависимостей в схеме с n реле $X_1, X_2, \ldots, X_n$ автор обозначает через ξ^* силу тока, причем ξ^{*0} соответствует току, от которого не срабатывает ни одно реле, а ξ^{*i} — минимальному току, от которого срабатывает реле X_i. Предполагается, что $\xi^{*0} < \xi^{*1} < \ldots < \xi^{*n}$. Вводится переменная ξ^i, принимающая два значения: $\xi^i = 1$, когда ток принимает значение ξ^{*i}, и $\xi^i = 0$ во всех других случаях. Работа реле X_i характеризуется переменной γ_1^i такой, что $\gamma_1^i = 1$, когда реле X^i работает, и $\gamma_1^i = 0$, когда оно не работает. В этом случае получаются соотношения

$$\gamma_1^i = \xi^i + \xi^{i+1} + \ldots + \xi^n.$$

Переменные γ_1^i позволяют рассматривать реле с токовыми зависимостями как обычные реле. Приводится пример анализа схемы защиты трехфазной линии, и затем дан синтез этой схемы. В. Н. Рогинский

4570. **Синтез схем с шаговыми переключателями.** Иоанин (Sinteza schemelor în care intră selectori. Ioanin Gh.), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1956, 8, № 3, 489—500 (рум.; рез. русск., франц.)

Объясняется конструкция обычного шагового переключателя и кратко излагается алгебраическое описание его работы. На примерах схем, состоящих из одного-двух шаговых переключателей и одной кнопки управления, излагается метод синтеза схем с шаговыми переключателями по заданной программе работы переключателя от воздействий кнопки управления. Этот метод основывается на составлении характеристических уравнений для каждого переключателя на основе заданной программы работы. Метод составления характеристических уравнений берется из работы Моисила (РЖМат, 1958, 1048). В. М. Остиану

4571. **Описание структуры и работы информационных преобразователей дискретного действия с помощью исчисления эквивалентностей.** Фромме (Die Beschreibung der Struktur und Funktion von digital arbeitenden Informationswandlern durch den Äquivalenzkalkül. Fromme Theodor), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 218—219, 223 (нем.; рез. англ.)

Под названием «исчисление эквивалентностей» кратко описывается алгебра, являющаяся подалгеброй двух-

элементной булевой алгебры по операциям объединения $\cup$ и пересечения $\cdot$, определяемым в исчислении эквивалентностей тождествами:

$$0 \cup x = x, \quad 1 \cdot x = x, \quad 0 \cdot x = 0;$$

здесь x — переменная над любой областью значений W_x. Кроме того, исчисление эквивалентностей содержит операцию эквивалентности

$$x^y = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{при} & x \neq y \\ 1 & \text{при} & x = y \end{matrix} \right\},$$

которая обобщает операцию отрицания из булевой алгебры, так как при $W_x = \{0, 1\}$

$$\bar{x} = x^0, \quad x^1 = x.$$

С помощью исчисления эквивалентностей любую функцию от переменной x, определенной над конечной областью значений W_x, можно представить в виде

$$y = \cup_n a_n x^n \ (n \in W_x),$$

где

$$\cup_n a_n = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n \ (n \in W_x),$$

или, применяя сокращение Эйнштейна, в виде

$$y = a_n x^n.$$

Случай многих переменных можно свести к случаю одной переменной с помощью векторов. Например, в булевой алгебре можно записать

$$x^{\bar{y}} v^{\bar{w}} = x^1 y^0 v^1 w^0 = (x, y, v, w)^{(1010)} = \xi^{1010} = \xi^{10},$$

где 10 — десятичный эквивалент двоичного числа 1010. В резюме исчисление эквивалентностей названо «некоторым тензорным формализмом».

Рассматриваются возможности применять исчисление эквивалентностей к описанию структуры и работы вычислительных машин и других дискретных преобразователей информации. Состояние каждой части машины изображается отдельной переменной x с конечной областью значений W_x. Состояние всей машины изображается векторами. Для рассмотрения последовательностей состояний вводится целочисленная переменная τ, нумерующая состояния во времени. Формулируются постулаты: 1) для каждого τ каждая переменная x принимает одно и только одно значение (определение τ); 2) вектор состояния всей машины принимает для одного τ только одно значение (постулируется возможность сгладить различия в счете времени для разных частей машины); 3) состояние информации $\xi(\tau+1)$ есть однозначная функция состояния информации $\xi(\tau)$ и не зависит от каких-либо других влияний. Указывается, что эти постулаты взяты из практики информационной техники и что без них дискретная обработка информации затруднительна. Из постулата 3 вытекает возможность описания дискретных информационных машин с помощью исчисления эквивалентностей. Тем самым обобщается методика описания релейных схем с помощью булевой алгебры. Все функциональные зависимости между частями машины выразимы уравнениями исчисления эквивалентностей. Кратко обрисовано содержание теории систем уравнений исчисления эквивалентностей. Отмечается существование алгорифма для однозначного получения всего многообразия решений системы таких уравнений и возможность машинизации этого алгорифма.

Обсуждается также применение исчисления эквивалентностей при программировании, в частности для упрощения и формализации записи машинных команд и подпрограмм. С помощью точного определения знака переноса $\Longrightarrow$ устанавливается связь между исчислением эквивалентностей и исчислением планов, которое предложил Цузе. Пусть m — номер запоминающего устройства и a — место переноса информации из запоминающего устройства m, например сумматор. Формула $y_m \Longrightarrow a$ полагается равносильной с уравнением $a(\tau+1) = y_m(\tau)$, где τ нумерует уже не состояния частей, а циклы работы машины (периоды исполнения команд). Формула $y_m \Longrightarrow a$ соответствует обычной записи операции переноса $\langle m \rangle \Longrightarrow a$, где $\langle m \rangle$ — содержимое запоминающего устройства m. Условный перенос записывается в виде $z^d y_m \Longrightarrow a$, где равенство z и d есть условие переноса; $0 \Longrightarrow a$, где 0 — булев нуль, считается пустой формулой, тогда как перенос арифметического нуля в a обозначается через $0' \Longrightarrow a$. В этих символах, например, программа табулирования $\sin y$ вплоть до $y = \pi$ выражается через подпрограммы следующим образом:

1) $\sin y_3 \Longrightarrow y_4$, 2) $y_4 \Longrightarrow$ печатающее устройство, 3) $0{,}01 + y_3 \Longrightarrow y_3$, 4) $\operatorname{sign}(y_3 - \pi)^{(-)}$. (начало 1) $\Longrightarrow$ регистр команд, 5) стоп $\Longrightarrow$ регистр команд.

Включение в исчисление эквивалентностей так определенного знака $\Longrightarrow$ делает это исчисление формально равносильным указанному выше исчислению планов.

Примечание референта. Операцией x^y в той же форме для области значений $\{0, 1, \ldots, l\}$ пользовалась также В. М. Остиану (РЖМат, 1956, 3386).

Г. Н. Поваров

4572. Полные декодирующие сети. Общая теория и минимальность. Бёркс, Мак-Нотон, Полмар, Уоррен, Райт (Complete decoding nets: General theory and minimality. Burks Arthur W., McNaughton Robert, Pollmar Carl H., Warren Don W., Wright Jesse B.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1954, 2, № 4, 201—243 (англ.)

Статья посвящена изучению общей теории и вопросов минимизации частного класса логических сетей — «полных декодирующих сетей» (п. д. с.).

П. д. с. есть логическая сеть со следующими 6-ю свойствами: 1) Топологический носитель сети — конечный ориентированный граф, не содержащий изолированных узлов и ориентированных циклов, ориентация которых совпадает с ориентацией входящих в них ветвей. 2) Каждый элемент сети состоит из «ядра» и присоединенных к нему входных «проводов» и одного выходного «провода». Физически элементы сети изображают электронные, релейные или нервные устройства. 3) узлами сети служат «ядра» элементов и точки соединения (т. с.) «проводов»; последние служат ориентированными ветвями сети. К каждой т. с. подходит не более одного входного провода. Т. с. без входного провода есть вход сети, т. с. без выходных проводов есть вход сети. 4) Каждая т. с. находится в одном из двух состояний: 0 или 1. Каждому элементу соответствует булева функция, определяющая состояние выходного провода в зависимости от состояний входных проводов. Состояние проводов совпадает с состоянием тех т. с., с которыми они соединены. Поэтому состояния всех т. с. определяются комбинацией состояний входов сети. 5) Входы сети разбиты, быть может, на два и более непересекающихся множеств. В этом случае в каждом множестве ровно один вход должен быть в состоянии 1, а прочие — в состоянии 0. 6) При любой допустимой комбинации состояний входов существует единственная т. с., которая при этой комбинации находится в состоянии 1 и при всех других допустимых комбинациях находится в состоянии 0; эта т. с. называется «декодирующей».

«П. д. с. типа $b - d$» есть п. д. с., где входы разбиты на d множеств по b входов в каждом. П. д. с. типа $b - d$ содержит b^d декодирующих т. с. Рассматриваются специальные классы п. д. с. типа $b - d$,

состоящие из соединенных друг с другом «мультипликативных переключателей» (м. п.). М. п. типа $i_1, i_2, \ldots, i_d$ есть п. д. с. с $i_1+i_2+\ldots+i_d$ входами, разбитыми на d множеств, содержащих соответственно $i_1, i_2, \ldots, i_d$ входов, с $i_1, i_2, \ldots, i_d$ выходами и с $i_1, i_2, \ldots, i_d$ элементами, каждому из которых соответствует конъюнкция d переменных. Определяются 3 класса п. д. с. типа $b-d$: 1) «Экспоненциальный переключатель типа $b-d$» есть м. п. типа $b, b, \ldots, b$, где b повторено d раз. 2) «Дерево типа $b-d$» состоит из м. п. типа b, b, м. п. типа $b^2, b, \ldots$ и м. п. типа b^{d-1}, b, причем выходы м. п. типа b^j, b соединяются со входами м. п. типа b^{j+1}, b, принадлежащими к одному и тому же множеству. 3) «Равновесная сеть типа $b-d$» есть п. д. с. типа $b-d$, где выходной м. п. есть м. п. типа $b^{[d/2]}, b^{[d+1)/2]}$ и где для всех $x \geqslant 2$ все входы каждого м. п., принадлежащие к множеству мощности b^x, соединяются с выходами м. п. типа $b^{[x/2]}, b^{[(x+1)/2]}$.

П. д. с. типа $b-d$ называется минимальной в данном классе п. д. с. типа $b-d$, если ее «цена» $R(b, d)$, равная отношению числа всех входных проводов к b^d — числу декодирующих т. с., минимальна в этом классе. Выводятся оценки:

$$R_E(b, d) = d, \quad 2 \leqslant R_T(b, d) < 2 + 2/(b-1),$$

$$2 \leqslant R_B(b, d) \leqslant 3,$$

где R_E, R_T и R_B — цены экспоненциального переключателя, дерева и равновесной сети. Основным результатом, доказательство которого составляет большую часть статьи, является теорема: Равновесная сеть типа $b-d$ минимальна в классе всех тех п. д. с. типа $b-d$, где всем элементам сети соответствуют конъюнкции. Другие минимальные сети этого класса суть незначительные видоизменения равновесной сети типа $b-d$ и называются «квазиравновесными сетями типа $b-d$». См. также РЖМат, 1955, 5772. А. П. Ершов

4573. Философия схем. Наиболее общие физико-математические понятия объема, разделения и угла. Теорема существования. Гонсалес-дель-Валье (Filosofía de las redes: Los conceptos físicomatemáticos más generales, de volumen, separación y ángulo: Teorema de existencia. Gonzalez del Valle A.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1956, 5, № 12, 9—14 (англ., исп.)

Основываясь на своей работе по метрической геометрии жестких цепей, автор вводит определения ряда величин, в принципе зависящих от процесса построения схем, но инвариантных по отношению к изменениям этого процесса. Поэтому эти величины могут характеризовать схему или ее часть. Операция поперечного разреза на две части одной бесконечно проводящей плоскости, с которой схема соприкасается всеми своими полюсами, таким образом, что полюса будут в контакте с той или другой частью разрезанной плоскости, называется простым разделением. Величина импеданса, замеренного между двумя частями плоскости, есть модуль простого разделения. Операция, состоящая из разделения порядка $n-1$ и выполняемого затем простого разделения, есть разделение порядка n. После разделения n-го порядка существует $n+1$ таких совокупностей полюсов, что полюса внутри каждой совокупности закорочены и составляют полюс новой схемы. Этот новый $(n+1)$-полюсник автор называет состоянием разделения и характеризует его $\frac{(n+1)n}{2}$ импедансами, соответствующими двухполюсникам. Данное состояние разделения n-го порядка может быть достигнуто через различные последовательности состояний разделения низшего порядка. Произведение модулей простых разделений, осуществляемых для получения последовательности состояний, есть модуль последовательностей состояний разделения. Доказывается, что модуль последовательности состояний разделения зависит только от начального и конечного состояний разделения и ввиду этого определяет потенциальное поле. Из доказательства следует, что из одного состояния разделения можно притти к другому через любую промежуточную последовательность состояний без изменения модуля последовательности. Далее вводятся определения степени разделения многополюсника, его объема, а также угла, определяемого многополюсниками. Введенные понятия являются более общими по сравнению с обычными геометрическими, поскольку на них не накладываются ограничения, связанные с размерностью и природой пространства. Г. К. Москатов

4574. Список отечественной и переводной литературы по теории релейных схем за 1956 г. Поваров Г. Н., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 12, 1151—1152

4575. Опечатки (Errata), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1957, 8, № 1-2, 247 (рум.)
См. РЖМат, 1958, 1056.

4576. Опечатки (Errata), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1957, 8, 1-2, 247 (рум.)
См. РЖМат, 1958, 1058.

4577. Опечатки (Errata), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1957, 8, № 1-2, 248 (рум.)
См. РЖМат, 1958, 1049.

4578 К. Минимизация схем. Получение минимальных и избыточных булевых сумм с помощью метода альтернативных множеств. Самсон, Мюллер (Circuit minimization; minimal and irredundant Boolean sums by alternative set method. Samson Edward W., Mueller Rolf. Techn. Rept. Commun. Lab., Electronics Res. Direct., Air Force Cambridge Res. Center, Cambridge, Mass., 1955, № 55—109, v. 11 pp.) (англ.)

4579 Д. Матричный анализатор релейно-контактных схем и вопросы его применения. Цуканов Т. Т. Автореф. дисс. канд. техн. н. Ленинград. ин-т инж. ж.-д. трансп., Томск, 1956

См. также: 4594, 4699, 4842, 5190, 5193, 5222

ТОПОЛОГИЯ

Редакторы *П. С. Александров, А. С. Шварц*

4580. О кратчайшем соединяющем поддереве графа и проблеме бродячего торговца. Краскал (On the shortest spanning subtree od a graph and the traveling salesman problem. Kruskal Joseph B., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 1, 48—50 (англ.)

Соединяющим подграфом данного графа назовем подграф, содержащий все вершины исходного графа. Известна теорема: Если каждому ребру некоторого конечного связного графа отнести действительное положительное число (его «длину»), то среди соединяющих подграфов данного графа, являющихся деревьями

(«соединяющих поддеревьев), найдется дерево минимальной длины. Если длины всех ребер различны, то минимальное дерево единственно.

Автор ставит и решает задачу конкретного построения этого поддерева. С. С. Рышков

4581. **О дополнительных графах. Нордхаус, Гаддум** (On complementary graphs. Nordhaus E. A., Gaddum J. W.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 3, 175—177 (англ.)

Пусть граф G имеет конечное число вершин n. Граф G' называется дополнительным к графу G, если он имеет те же вершины, что и граф G, а ребра его соединяют те и только те вершины, которые не соединены ребрами графа G.

Наименьшее число k, для которого вершины графа G могут быть раскрашены в k цветов так, что каждое ребро соединяет вершины разного цвета, называется хроматическим числом графа G. Через k' обозначается хроматическое число дополнительного графа G'. Доказаны неравенства

$$2\sqrt{n} \leqslant k + k' \leqslant n + 1, \tag{1}$$

$$n \leqslant kk' \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Отмечается, что оценка $n \leqslant kk'$ принадлежит Зыкову (Матем. сб., 1949, 24, 163—188). С. С. Рышков

4582. **Исследования по теории сетей (частично упорядоченных систем, в которых порядок предшествования задан на каждой ступени). Витальби** (Ricerche sulla teoria dei reticoli (Sistemi «parzialmente ordinati» nei quali vi è un ordine di «precedenza» in ogni stadio). Vitalbi Luciano), Giorn. mat. Battaglini, 1956, 84, № 1, 93—121 (итал.)

Строение формул, выражающих заданную в конечном виде функцию через элементарные функции или иррациональное число через корни различных степеней от рациональных чисел с помощью арифметических действий, можно изображать графически посредством упорядоченных деревьев, которые автор рассматривает, как частный случай сетей, т. е. частично упорядоченных одномерных комплексов. На ряде примеров автор показывает, как составлять и графически преобразовывать такие деревья при различных преобразованиях рассматриваемых формул, например при дифференцировании функций и при выводе уравнений с рациональными коэффициентами, корнями которых являются данные иррациональные числа. М. Ф. Бокштейн

4583. **Об ориентированных графах. II. Ope** (Studies on directed graphs. II. Ore Oystein), Ann. Math., 1956, 64, № 1, 142—153 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 3863. Обозначения те же, но граф R может быть и конечным и бесконечным. Устанавливаются некоторые неравенства для дефицитов (в РЖМат, 1957, 3863 вместо слова «дефицит» употреблено слово «разность»). Рассматривается вопрос о существовании ребра, при удалении которого не меняются все четыре максимальные дефицита δ_0, δ_0^*, $\bar{\delta}_0$, $\bar{\delta}_0^*$, а также вопрос о подграфах, при удалении которых не меняются эти дефициты. Из теоремы о свойстве подграфов, локальные степени которых не превосходят заданных $k(v)$, $k^*(v)$, выводится основная теорема о подграфах: Для того чтобы локально конечный ориентированный граф R имел подграф, локальные степени которого равны заданным $k(v)$, $k^*(v)$, необходимо и достаточно, чтобы $\delta_0 = \delta_0^* = 0$.

Даются некоторые приложения к регулярным ориентированным графам и к ориентированным графам, локальные степени которых имеют общий множитель λ. В частности, для последних доказывается теорема о разложении в прямую сумму λ подграфов с одинаковыми локальными степенями. И. Н. Врублевская

4584. **Графы и подграфы. Ope** (Graphs and subgraphs. Ore Oystein), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 84, № 1, 109—136 (англ.)

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель. Для любого множества A вершин графа определяется эффективный дефицит $\delta_e(A)$; это понятие, несколько усложняет понятие дефицита для ориентированных графов (РЖМат, 1957, 3863; реф. 4583).

Основная теорема: Для того чтобы граф имел подграф с заданными локальными степенями, необходимо и достаточно, чтобы для любого A было $\delta_e(A) \leqslant 0$.

В качестве приложений даются разложения не регулярных графов некоторых типов. Указывается, как отсюда следуют все известные теоремы о разложении регулярных графов. И. И. Врублевская

4585. **Тип в кубических графах. Гарсия-Транке** (The type in cubic graphs. Garcia Tranque Tomás), Gac. mat., 1953, (1) 5, 11—23 (англ.)

Ограничиваясь графами, каждая вершина которых по крайней мере второй степени, автор называет типом вершины x графа последовательность чисел, полученных соотнесением каждой паре ребер, примыкающих к x, длины наименьшего цикла, определяемого этой парой ребер и расположенных в порядке возрастания. Используя очевидное замечание, что точки различных типов не могут входить в один класс транзитивности группы автоморфизмов, автор дает в яной форме кубический граф с $6h$ вершинами, имеющий своей группой автоморфизмов циклическую группу порядка h.

Отмечаем: 1) многочисленные опечатки, 2) в фиг. 3, стр. 14, восстановление отсутствующих обозначений 12 точек дает читателю развлечение типа кроссворда. J. Riguet

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 5, 501.

4586. **Теорема соседства плоской топологии. Айзенберг Л.**, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 199—206

Приводится элементарное доказательство теоремы о соседях для некоторого класса покрытий плоскости. А. С. Шварц

4587. **Некоторые свойства наследственно нормальных пространств. Судзуки** (Some properties of completely normal spaces. Suzuki Jingoro), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 1, 19—24 (англ.)

Исследуются свойства семейств множеств в наследственно нормальных пространствах. В качестве примера приведем следующую теорему: Если H — наследственно нормальное топологическое пространство, то для любой локально конечной системы $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ замкнутых множеств пространства H существует система $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ замкнутых множеств этого пространства, обладающая свойствами 1) $H = \bigcup_{\alpha \in \Omega} H_\alpha$; 2) $H_\alpha \cap H_\beta \cap (X_\alpha \cup X_\beta) = X_\alpha \cap X_\beta$ (в частных случаях эту теорему доказал Инокума РЖМат, 1956, 4390). И. В. Проскуряков

4588. **О некоторых специальных классах топологических пространств и δs-операций. Паровиченко И. И.**, Докл. АН СССР, 1957, 115, № 5, 866—868

Топологическое пространство $\mathfrak{M}$ называется T^α-пространством, если пересечение всякой системы мощности $< \aleph_\alpha$ из открытых в $\mathfrak{M}$ множеств открыто в $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{N}$ — произвольное топологическое пространство, то из него можно построить T^α-пространство (обозначается $T^\alpha\mathfrak{N}$), сохранив в качестве точек все точки $\mathfrak{N}$, а в качестве открытого базиса взяв всевозможные пересечения мощности $< \aleph_\alpha$ из открытых множеств про-

странства $\mathfrak{R}$. В частности, если $\mathfrak{R}$ является T_i-пространством ($i=0, 1, 2, \ldots 5$), то $T^\alpha\mathfrak{R}$ называется T_i^α-пространством. В работе приводятся без доказательства различные свойства T_i^α-пространств, укажем некоторые из этих свойств:

Если T_3^α — пространство $\aleph_{\alpha+1}$ — бикомпактно, то оно является T_4^α-пространством (пространство $\mathfrak{M}$ называется $\mathfrak{m}$-бикомпактным, если из любого открытого покрытия этого пространства можно выделить подпокрытие мощности $<\mathfrak{m}$).

Для того чтобы T_3^α-пространство было $\aleph_\alpha$-бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто во всяком топологически его содержащем T_4^α-пространстве.

Во второй части автор рассматривает $\mathfrak{m}$ — δs-операции, ссылаясь на их определение, данное В. Е. Шнейдером (Уч. зап. МГУ, 1948, вып. 135, 2, 76, 91).

Определение m-δs-операций аналогично определению обычных δs-операций и отличается от него лишь тем, что вместо систем множеств, занумерованных счетным числом индексов, рассматриваются системы множеств, занумерованные индексами из фиксированного множества, имеющего мощность $\mathfrak{m}$. В статье рассматриваются условия, которые надо наложить на базу $\mathfrak{m}$ — δs-операции для того, чтобы эта операция обладала бы теми или иными наперед заданными свойствами. Кроме того, исследуется вопрос о мощности множества всех $\mathfrak{m}$-δs-операций (при заданном $\mathfrak{m}$, а также вопрос о мощности множества всех пространств того или иного вида (если считать два гомеоморфных пространства тождественными).

Примечание референта $\mathfrak{m}$-δs-операции были введены ранее референтом (Докл. АН СССР, 1941, 23, № 6, 393—396). Ю. С. Очан

4589. Обобщенные инфинитезимальные пространства. Яруткин Н. Г., Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1956, 10, 61—79

Изучение пространств близости, названных автором квазиинфинитезимальными. Это топологические пространства R, в которых определено отношение близости δ, согласующееся с топологией (т. е. такое, что для любого множества A точка $x\in\bar{A}$ тогда и только тогда, когда $x\delta A$) и удовлетворяющее следующим аксиомам: А0. $A\delta B$ равносильно $B\delta A$; А1. $A\cup B\delta C$ равносильно $A\delta C$, $B\delta C$; А2. $a\delta b$ равносильно $a=b$ (a, b — точки); $A3_1$. Из $\bar{A}\delta B$ следует $A\delta B$; А4. Для любого $x\in R$ и любого $A\subset R$, $x\delta A$, можно A представить как сумму конечного числа подмножеств $A_1, \ldots, A_k$, таких, что существуют открытые множества $B_1, \ldots, B_k$, для которых $x\delta B_i$, $A_i\delta B_i$. (Последние две аксиомы являются значительным ослаблением обычной аксиомы А3. Из $A\delta B$ следует существование непересекающихся окрестностей A_1, B_1, $A\delta R\setminus A_1$, $B\delta R\setminus B_1$.

Для квазиинфинитезимального пространства R автор строит абсолютно замкнутое расширение, т. е. такое квазиинфинитезимальное пространство R^*, в котором R содержится как всюду плотное множество и которое само не может быть всюду плотным подмножеством квазиинфинитезимального пространства, отличного от R^*. В случае, когда R является инфинитезимальным пространством (т. е. в нем выполнена аксиома А3), расширение R^* совпадает с расширением, построенным Ю. М. Смирновым (Матем. сб., 1952, 31, 543—574). В. А. Ефремович

4590. О произведении δ-пространств. Лян Се Ен, Сухак ка мулли, Математика и физика, 1957, 1, № 2, 3—20 (кор.; рез. русск.)

Дается определение произведения пространств близости, вполне аналогичное определению обычного произведения топологических пространств, данному В. А. Ефремовичем (Успехи матем. наук, 1952, 7, 1). Это произведение пространств близости может быть определено так же, как пространство близости, индуцируемое равномерным произведением прекомпактных равномерных структур, совместимых с исходными пространствами близости.

Однако это определение произведения пространств близости не согласуется с определением произведения метрических пространств (например, в случае произведения прямой на прямую оно приводит к неметризуемому пространству). По этой причине такое определение произведения пространств близости было признано в свое время Ефремовичем неудобным.

А. С. Шварц

4591. Условие, эквивалентное равномерной сходимости. Холлади, Собчик (An equivalent condition for uniform convergence. Holladay John, Sobczyk Andrew), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 1, 31—33 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть S — бикомпакт, а R — пространство с метрикой d. Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность непрерывных отображений S в R, точечно сходящаяся к отображению g. Тогда эта последовательность сходится равномерно в том и только том случае, когда 1) отображение g непрерывно и 2) для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое m и такое $\delta>0$, что как только $n>m$ и $d(\varphi_i(s), g(s))<\delta$, то и $d(\varphi_{i+n}(s), g(s))<\varepsilon$.

Из этой теоремы получается условие для равномерной сходимости последовательности итераций непрерывного отображения компакта. Дается обобщение теоремы на направленные множества отображений.

С. С. Рышков

4592. Теорема о неподвижной точке для непрерывных многозначных отображений. Планкетт (A fixed point theorem for continuous multi-valued transformations. Plunkett Robert L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 1, 160—163 (англ.)

Автор говорит, что топологическое пространство X обладает свойством неподвижной точки, если для всякого многозначного отображения F пространства X в себя, непрерывного в смысле Стротера (РЖМат, 1955, 3665), существует точка $x\in X$, удовлетворяющая условию $x\in F(x)$. Основным результатом работы является следующая теорема: Локально связный континуум тогда и только тогда обладает свойством неподвижной точки, когда он является дендритом (т. е. не содержит подмножества, гомеоморфного окружности).

А. С. Шварц

4593. Пространство подмножеств абсолютного ретракта. Фаулс (Subsets of an absolute retract. Foulis Linda Falcao), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 365—366 (англ.)

Пусть бикомпактное пространство X является пространством типа CAR^* (т. е. гомеоморфно ретракту тихоновского куба). Доказывается, что пространство $S(X)$ всех замкнутых подмножеств пространства X в естественной топологии также будет пространством типа CAR^*.

Р. Л. Фрум-Кетков

4594. О локально бикомпактных топологических группах мощности континуума. Хулыницкий (On locally compact topological groups of power of continuum. Hulanicki A.), Fundam. math., 1957, 44, № 2, 156—158 (англ.)

В предположении справедливости континуум-гипотезы или более слабого утверждения: если $a>\aleph_0$, то $2^a>2^{\aleph_0}$, доказывается следующая теорема: локально бикомпактная группа мощности континуума метризуема.

А. С. Шварц

4595. Характеристики почти периодических групп преобразований. Готшок (Characterizations of almost periodic transformation groups. Gottschalk W. H.), Proc. Amer. Math. Soc. 1956, 7, № 4, 709—712 (англ.)

Приводятся различные критерии для почти периодичности топологической группы преобразований T, действующей в равномерном пространстве X.

Н. Я. Виленкин

4596. О размерности образов подмножеств при отображениях, повышающих размерность. Вильямс (The effect of maps upon the dimension of subsets of the domain space. Williams R. F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 580—583 (англ.)

Рассматривается вопрос: может ли непрерывное отображение сепарабельного метрического пространства X размерности n в такое же пространство Y размерности m повысить размерность каждого k-мерного компакта из X. Типичным примером является следующее утверждение: если $m < 2n$, то отображение не может повысить размерность всех одномерных компактов.

Р. Л. Фрум-Кетков

4597. Элементарное доказательство существенности тождественного отображения симплекса. Александров П., Пасынков Б., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 175—179

Приводится два элементарных доказательства теоремы о существенности тождественного отображения симплекса.

А. С. Шварц

4598. Замкнутые покрытия в чеховской теории гомологий. Флойд (Closed coverings in Čech homology theory. Floyd E. E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 84, № 2, 319—337 (англ.)

Под замкнутым покрытием бикомпакта X в работе понимается такое упорядоченное, конечное, замкнутое покрытие $\alpha = (A^1, \ldots, A^r)$, что каждая точка $x \in X$ является внутренней точкой некоторого A^i. Для такого покрытия α существует подобное ему открытое покрытие $u = (U^1, \ldots, U^r)$ пространства X, удовлетворяющее условию $U^i \supset A^i$. Совпадение групп гомологий $H_n(u) = H_n(\alpha)$ нервов покрытий u и α индуцирует гомоморфизм $\pi_\alpha : H_n(X) \to H_n(\alpha)$ (через $H_n(X)$ обозначается чеховская группа гомологий пространства X, основанная на открытых покрытиях; группа коэффициентов на протяжении всей работы фиксирована и предполагается бикомпактной группой или полем). Если α и β — конечные совокупности замкнутых множеств пространства X, то β строго n-вписано в α, $\alpha \ll^n \beta$, если α вписано в β в обычном смысле и существует такая проекция $\pi_{\beta\alpha} : \beta \to \alpha$, что при гомоморфизме включения группы $H_j(B^{i_0} \cap \ldots \cap B^{i_q})$ в $H_j(\pi_{\beta\alpha} B^{i_0} \cap \ldots \cap \pi_{\beta\alpha} B^{i_q})$ образ является нулевой подгруппой при всех $B^{i_0}, \ldots, B^{i_q}$ из β и всех $j \leqslant n$. Основная теорема работы гласит:

Пусть $A_{-1} \supset A_0 \supset \ldots \supset A_n$ — последовательность замкнутых подмножеств пространства X и пусть $\alpha_{-1} \ll^n \alpha_0 \ll^n \ldots \ll^n \alpha_n$, где α_i есть замкнутое покрытие A_i. Тогда: 1) ядро гомоморфизма $\pi_{\alpha_n} : H_j(A_n) \to H_j(\alpha_n)$ содержится в ядре гомоморфизма включения $H_j(A_n) \to H_j(A_{-1})$, при всех $j \leqslant n$, и 2) образ $\pi_{\alpha_n, \alpha_0} : H_j(\alpha_n) \to H_j(\alpha_0)$ содержится в образе $\pi_{\alpha_0} : H_j(A_0) \to H_j(\alpha_0)$ при всех $j \leqslant n+1$. Отсюда следует (при $A_i = X$), что в случае, когда замкнутые покрытия $\alpha_{-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_{2n}$ пространства X удовлетворяют условию $\alpha_{-1} \ll^n \alpha_0 \ll^n \ldots \ll^n \alpha_{2n}$, покрытия α_n, α_{2n} определяют $H_j(X)$ (т. е. $\pi_{\alpha_n} : H_j(X) \to H_j(\alpha_n)$ отображает $H_j(X)$ изоморфно на образ $H_j(\alpha_{2n})$ при проекции $\pi_{\alpha_{2n}\alpha_n}$: $: H_j(\alpha_{2n}) \to H_j(\alpha_n)$) при всех $j \leqslant n$. Основная теорема доказывается с помощью теории Кэли—Питчера о связях между группами гомологий пространства, нерва его покрытия и пересечений элементов покрытия; эту теорию автор самостоятельно строит и в исходном случае комплекса, а потом распространяет ее на случай замкнутых покрытий бикомпактов.

Посредством основной теоремы доказывается ряд свойств, касающихся многомерной (гомологической) локальной связности и многомерной регулярной сходимости. Отметим, в частности, новое доказательство теоремы Вьеториса об отображениях и следующую теорему: Пусть последовательность (A_i) замкнутых множеств бикомпакта X n-регулярно сходится к множеству A; тогда для достаточно больших i группы $H_n(A)$ и $H_n(A_i)$ изоморфны.

Г. С. Чогошвили

4599. Группы в E^n с $(n-2)$-мерными орбитами. Монтгомери, Замельсон, Янг (Groups on E^n with $(n-2)$-dimensional orbits. Montgomery D., Samelson H., Yang C. T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 719—728 (англ.)

Если G — компактная связная группа Ли, которая дифференцируемым образом действует в n-мерном евклидовом пространстве так, что наивысшая размерность орбит группы G равна либо $n-1$, либо $n-2$, то в соответствующих координатах группа G действует линейно.

Н. Я. Виленкин

4600. Представители гомотопических классов отображений в сферы. Планкетт (Representatives of homotopy classes of mappings into spheres. Plunkett Robert L.), Duke Math. J., 1954, 21, № 4, 599—605 (англ.)

Основной результат статьи: Всякое отображение связного полиэдра в n-мерную сферу ($n \geqslant 1$) гомотопно квазимонотонному (РЖМат, 1958, 1087). Построено отображение локально связного континуума в n-мерную сферу ($n \geqslant 2$), не гомотопное квазимонотонному.

Н. Т. Тынянский

4601. Существенные отображения. Форт (Essential mappings. Fort M. K., Jr), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 4, 238—241 (англ.)

Доказывается следующее утверждение: Если A — непустое конечное подмножество плоскости E^2, то существует замкнутый путь, не гомотопный нулю на множестве $E^2 \setminus A$, но гомотопный нулю на каждом из множеств $E^2 \setminus B$, где B — собственное подмножество множества A. Указывается аналог этого утверждения для трехмерного пространства, в котором роль конечного множества A играет объединение конечного числа параллельных прямых.

С. С. Рышков

4602. Конструкция стинродовских гомоморфизмов D_i и приведенных степеней классов когомологий. Юэ Цзин-чжун (The construction for Steenrod's D_i in reduced powers of cohomology classes. Yo Ging-tzung), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1957, 1, № 4, 223—225 (англ.)

Дается определение стинродовских приведенных степеней классов когомологий в симплициальном комплексе, для случая стинродовских квадратов совпадающее с первоначальным определением Стинрода (через произведения $\cup_i$).

А. С. Шварц

4603. Приведенные степени Стинрода в спектральной последовательности расслоенного пространства. Араки (Steenrod reduced powers in the spectral sequences associated with a fibering. Araki Shôrô), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1957, A11, № 1, 15—64 (англ.)

Вводятся в когомологическую спектральную последовательность $\{E_r\}$ $p : X \to B$ с базой B и слоем F расслоенного пространства циклические приведенные степени Стинрода (спектральная последовательность и все группы когомологий в реферате берутся с коэффициентами в поле вычетов по простому модулю p).

Определяются приведенные степени двух типов: типа (F) и типа (B). Приведенные степени ${}_FSt^p_j$ типа (F) и приведенные степени ${}_BSt^p_j$ типа (B) вводятся как гомоморфизмы

$$ {}_FSt^p_j : E_r^{a,b} \to E_r^{a,\,pb+(p-1)a-j}, \quad j \leqslant 0,\ r \geqslant 1; \quad {}_BSt^p_j : E^{a,\,b}_{r,\,B} \to $$

$$ \to E^{pa-j,\,pb}_{p(r-2)+2} \quad j \geqslant 0,\ r \geqslant 2, $$

где $E^{a,\,b}_{r,\,B}\left\{x \in E_r^{ab} \mid d_S \circ \varkappa_S^r x = 0 \text{ для } r \leqslant s \leqslant p(r-2)+1\right\}$. Если система локальных коэффициентов $\{H(F)\}$ проста, отождествим $E_2^{a,\,0}$ с $H^a(B)$ и $E_2^{0,\,b}$ с $H^b(F)$. Тогда оказывается, что на $H(B)$ обычная приведенная степень St^p_j совпадает с ${}_BSt^p_j$, а на $H(F)$ обычная приведенная степень St^p_j совпадает с ${}_FSt^p_j$. Далее оказывается, что операция ${}_FSt^p_j$ тривиальна на $H^a(B)$, если $j \neq (p-1)a$, и является тождественным отображением с точностью до умножения на константу при $j = a(p-1)$, а операция ${}_BSt^p_j$ тривиальна на $H^b(F)$ при $j \neq 0$ и является возведением в степень p при $j = 0$; кроме того, $\varkappa_S^r \circ {}_BSt^p_j = {}_BSt^p_j \circ \varkappa_S^r$ на $\left(\varkappa_S^{r-1}\right)E^{a,\,b}_{S,\,B}$. Устанавливается связь между введенными операциями и дифференциалами d_r. Например, доказывается, что если $x \in E_r^{a,\,b}$ есть d_S-коцикл при $2 \leqslant r \leqslant s \leqslant c\,(c \geqslant r-1)$, то ${}_FSt^p_j(x)$ является d_S-коциклом для $s \leqslant \max((p-1)a + pc - j,\ c)$. Элемент $x \in E_2^{a,\,b}$ называется трансгрессивным, если $d_r \varkappa_r^2 x = 0$ при $2 \leqslant r \leqslant b$. В этом случае полагается $\tau(x) = d_{b+1}\varkappa^2_{b+1}(x)$. Доказывается, что если $x \in E_2^{a,\,b}$ $(b \geqslant 1)$ — трансгрессивный элемент, то элемент ${}_FSt^p_j(x)$ также трансгрессивен при $j \geqslant (p-1)a$ и при $\lambda = p(b-1)+2$, $\mu = pb + (p-1)a - j + 1$ выполнено соотношение

$$ \varkappa^\lambda_\mu \circ {}_BSt^p_{j+p-1} \circ \tau(x) = (-1)^{m(a+b)} m!\, \tau \circ {}_FSt^p_j(x). $$

На операции ${}_FSt^p_j$ и ${}_BSt^p_j$ переносятся теоремы, хорошо известные для обычных приведенных степеней. Указывается, что для $x \in E_r^{a,\,b}\left(x \in E^{a,\,b}_{r,\,B}\right)$ всегда ${}_FSt^p_j x = 0\left({}_BSt^p_j x = 0\right)$, если только число $(p-1)\times(a+b)-j$ не сравнимо с нулем или единицей по модулю $2(p-1)$ (аналог теоремы Тома для обычных приведенных степеней). Исследуются зависимости между итерациями стинродовских степеней в спектральных последовательностях и обобщаются формулы Адама—Картана. Доказываются формулы, позволяющие вычислять стинродовские степени произведения элементов алгебры E_r (обобщение формул Картана—Стинрода). Л. Ивановский

4604. Одномерные (не хаусдорфовы) многообразия и слоистые структуры на плоскости. Хефлигер, Реб (Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. Haefliger André, Reeb Georges), Enseign. math, 1957, 3, № 2, 107—125 (франц.)

Слоистая структура на двумерном многообразии V определяется таким набором локальных систем координат в окрестностях U_i, покрывающих V, что в окрестности каждой точки множества $U_i \cap U_j$ функции перехода от одной системы координат к другой имеет вид: $x' = g_{ij}(x,\ y)$, $y' = k_{ij}(y)$. Слоистая структура индуцирует на многообразии V отношение эквивалентности такое, что две точки из каждой окрестности U_i эквивалентны тогда и только тогда, когда их ординаты одинаковы. Классы эквивалентности называются листами. Доказывается, что пространство листов слоистой структуры на плоскости R^2 является односвязным одномерным многообразием со счетной базой (вообще говоря, не хаусдорфовым). На всяком таком многообразии существует непрерывная функция, не имеющая локальных максимумов и минимумов (в широком смысле). Отсюда вытекает, что для каждой слоистой структуры на R^2 существует непрерывная функция на R^2, постоянная на каждом листе и не имеющая локальных максимумов и минимумов (теорема Каплана).

Говорят, что слоистая структура принадлежит классу C^r, если g_{ij} и k_{ij} — функции класса C^r. В этом случае пространство M листов слоистой структуры на R^2 является многообразием класса C^r, причем каждую функцию класса C^r, определенную в окрестности некоторой точки $x \in M$, можно продолжить на все многообразие с сохранением класса. Отсюда выводится, что для всякой слоистой структуры класса C^r на R^2 и для всякой ограниченной области $\Omega \subset R^2$ существует функция класса C^r в Ω, постоянная на каждом листе, градиент которой нигде в Ω не обращается в 0 (теорема Камке). А. Л. Онищик

4605 К. Общая теория расслоенных пространств со структурным пучком. Гротендик (A general theory of fibre spaces with structure sheaf. Grothendieck Alexandre. Rept. Univ. Kansas. Dept. Math., 1955, № 4, 100 pp.) (англ.)

Изложение основных понятий теории расслоенных пространств, сделанное с весьма общей точки зрения. Расслоенным пространством над пространством X автор называет тройку (X, E, p), состоящую из топологических пространств X, E и непрерывного отображения $p : E \to X$. Пространство X называется базой расслоения, а пространства $p^{-1}(x)$ $(x \in X)$ — слоями. 1-я гл. посвящена понятиям гомоморфизма, подпространства, фактор-пространства, сечения расслоенного пространства. Во 2-й гл. рассматриваются пучки — это расслоенные пространства, обладающие следующим свойством: для каждой точки $a \in E$ существует такая окрестность U, что $p(U)$ открыто в X и что $p : U \to p(U)$ — гомеоморфизм. Пусть каждому открытому множеству $U \subset X$ сопоставлено множество E_U и пусть для каждой пары $U \subset V$ задано отображение $\varphi_{UV} : E_V \to E_U$ такое, что если $U \subset V \subset W$, то $\varphi_{UV}\varphi_{VW} = \varphi_{UW}$. Для каждой точки $x \in X$ обозначим через E_x предел спектра, образованного множествами E_U $(x \in U)$. В пространстве $E = \bigcup_{x \in X} E_x$ вводится топология, превращающая его в пучок над X. При помощи этой конструкции может быть получен всякий пучок E над X; нужно взять в качестве E_U множество $H^0(U, E)$ всех непрерывных сечений пучка E над U, а в качестве φ_{UV} — ограничение сечения на множестве U. Важным примером пучка является пучок $C(X, A)$ ростков непрерывных отображений пространства X в пространство A. Он строится при помощи множеств E_U всех непрерывных отображений открытого множества $U \subset X$ в пространство A; в качестве φ_{UV} берется ограничение отображений. В 3-й гл. рассматривается другой специальный класс расслоенных пространств — расслоенные пространства с операцией. Автор называет так расслоенное пространство, в каждом слое которого задана алгебраическая операция, причем выполнены естественные условия непрерывности. В частности, если каждый слой является группой, то расслоенное пространство называется связкой групп. Связка групп, одновременно являющаяся пучком,

называется пучком групп. Пусть G — связка групп, E — расслоенное пространство над X. Говорят, что G действует на E, если для каждой точки $x \in X$ группа G_x действует на пространстве E_x, причем выполнены естественные условия непрерывности.

В 4-й гл. вводится понятие расслоенного пространства данного структурного типа. Пусть Φ — расслоенное пространство над X, на котором эффективно действует пучок групп G, и пусть E — расслоенное пространство над X, локально изоморфное пространству Φ. Рассмотрим пучок $G(\Phi, E)$ ростков изоморфизмов пространства Φ на E, на котором очевидным образом действует пучок G. Расслоенным пространством структурного типа Φ называется расслоенное пространство E, локально изоморфное Φ, вместе с некоторым непрерывным сечением фактор-пучка $G(\Phi, E)/G$. Пучок G называется структурным пучком пространства E. Теория расслоенных пространств данного структурного типа превращается в частных случаях в различные известные аспекты теории расслоенных пространств. Так, если $\Phi = X + F$, где F — некоторое пространство, а G — пучок ростков всех автоморфизмов пространства Φ, то получается понятие локально тривиального расслоенного пространства. Если при этом все пространства являются дифференцируемыми многообразиями, а G — пучок ростков всех дифференцируемых автоморфизмов, то получается понятие дифференцируемого расслоенного пространства. Если Γ — топологическая группа, действующая на пространстве F, и $G = C(X, \Gamma)$, то получается понятие расслоенного пространства со структурной группой Γ, и т. д. Пусть E — расслоенное пространство структурного типа Φ над X и пусть (U_i) — достаточно мелкое открытое покрытие пространства X. Выберем в каждом U_i локальный изоморфизм $f_i : \Phi \to E$, который, если рассматривать его как сечение пучка $G(\Phi, E)$, индуцирует сечение, задающее структуру пространства E. Тогда в $U_i \cap U_j$ имеем $f_i = f_i f_{ij}$, где f_{ij} — сечение пучка G. Сечения f_{ij} называются координатными преобразованиями. Это понятие лежит в основе классификации расслоенных пространств, которой посвящена последняя, 5-я гл. Автор вводит в рассмотрение множество $H^1(X, G)$ когомологий пространства X с коэффициентами в пучке групп G над X. Координатные преобразования расслоенного пространства E относительно покрытия (U_i) определяют коцикл нерва этого покрытия с коэффициентами в пучке G и тем самым определяет элемент множества $H^1(X, G)$. Доказывается, что при этом получается взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных расслоенных пространств типа Φ и элементами множества $H^1(X, G)$. Если G — пучок некоммутативных групп, то в множестве $H^1(X, G)$ не существует естественной структуры группы. Однако это множество содержит «единицу» e, соответствующую самому пространству Φ. Это обстоятельство позволяет говорить о точности последовательности когомологий для пучков произвольных групп. Конец главы посвящен конструкции и свойствам этой последовательности. А. Л. Онищик

4606 К. Что такое линия? Пархоменко А. С. М., Гостехиздат, 1954, 140 стр., илл., 2 р. 30 к.

Автор в серьезной и достаточно популярной форме излагает основы современной топологической теории линий. Книга может служить введением в теорию множеств, ее можно рекомендовать студентам университетов и многих институтов, учителям школы и (не в качестве первого чтения!) ученикам старших классов, интересующимся высшей математикой.

Книга состоит из 4 глав и прибавления. Первая глава «Развитие понятия линии», имеет вводный характер: после краткого исторического очерка в ней строится кривая Пеано, дается определение простой дуги и приводятся примеры линий, не представимых в виде суммы конечного числа простых дуг. Этим подготавливается почва для строгого изложения теории множеств в следующей обширной главе (50 стр.) «Некоторые сведения из теории точечных множеств». Здесь излагаются понятия открытого и замкнутого множества, понятия связности, компактности, непрерывного отображения. Наконец, вводится понятие континуума, доказываются основные свойства континуумов, и читатель может перейти к основным главам «Канторовы линии» и «Общее определение линии». В первой строится кривая Серпинского и доказывается ее универсальность по отношению ко всем плоским линиям. После рассуждений о границах плоских областей автор переходит к определению линии по Урысону (гл. 4) с удачно измененным определением размерности 1 для континуумов. Доказывается, что всякая канторова линия является линией по Урысону, после чего главное внимание уделяется понятию индекса ветвления и линиям с конечным индексом ветвления (37 стр.). В конце без доказательства приводится пример Менгера универсальной пространственной линии. В прибавлении дается индуктивное определение размерности, доказывается нульмерность любого счетного множества, одномерность прямой и двумерность плоскости, сообщаются основные сведения из общей теории размерности.

Примечание референта. Из введения неясно, почему определение линии по Декарту недостаточно, почему спираль Архимеда нельзя изучать по уравнению в декартовых координатах. Следовало бы посвятить достаточно места линиям, обладающим касательной в каждой точке (хотя бы за счет общей теории размерности), не боясь — пусть, мелким шрифтом — дать определение производной; во всяком случае определение непрерывности (хотя бы равномерной) надо дать в тексте, а не в примечании. Стоило бы привести определение канторова множества с помощью троичных дробей, доказать, что функция расстояния от точки до замкнутого множества непрерывна, чем упростилось бы доказательство отделимости непересекающихся замкнутых множеств, и т. п.

В целом книга написана с большим педагогическим мастерством и на высоком научном уровне. Много чертежей и рисунков, выполненных наилучшим образом.

Ю. М. Смирнов

4607 К. Что такое линия? Пархоменко. (Was ist eine Kurve? Parchomenko A. S. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1957, 140 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского (реф. 4606).

См. также: 4513, 4549, 4550, 4561, 4837

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков*

4608. Нижний предел последовательности потенциалов. Киси (Inferior limit of a sequence of potentials. Kishi Masanori), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 6, 314—319 (англ.)

Пусть Ω — локально компактное пространство; $\Phi(P, Q) = \Phi(Q, P) > 0$ — функция, определенная в $\Omega \times \Omega$ ($P \in \Omega$, $Q \in \Omega$), конечная, за исключением диагонали $P = Q$; μ — положительная мера с компактным

носителем S_μ. Интеграл $U^\mu(P)=\int \Phi(P, Q)\,d\mu(Q)$ называется потенциалом. Мера μ называется допустимой на компакте $K\subset\Omega$, если $S_\mu\subset K$ и $U^\mu(P)\leqslant 1$, $P\in\Omega$. Точная верхняя граница полных масс допустимых мер на K называется емкостью K — $\operatorname{cap}(K)$. Внутренней емкостью $\operatorname{cap}_i(A)$ множества $A\subset\Omega$ называется $\sup_{K\subset A}\operatorname{cap}(K)$; внешняя емкость $\operatorname{cap}_e(A)\equiv\inf_{\delta}\operatorname{cap}_i(\delta)$, где открытое $\delta\supset A$; поэтому $\operatorname{cap}_i(\delta)=\operatorname{cap}_e(\delta)\equiv\equiv\operatorname{cap}(\delta)$. Говорят, что некоторое свойство имеет место почти всюду в Ω, если оно имеет место для всех точек Ω, за исключением множества внешней емкости нуль. Потенциал U^μ называется квазинепрерывным в Ω, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое открытое множество δ_ε, что $\operatorname{cap}(\delta_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$ и U^μ непрерывен в $\Omega-\delta_\varepsilon$. Ядро $\Phi(P, Q)$ называется удовлетворяющим принципу непрерывности, если из непрерывности потенциала U^μ на S_μ следует непрерывность U^μ в Ω. Доказываются теоремы:

1. Пусть а) μ_n $(n=1, 2, \ldots)$ — меры на компакте K и $\{\mu_n\}$ слабо сходится к μ, б) $U^{\mu_n}\leqslant M<\infty$. Тогда $\lim U^{\mu_n}=U^\mu$ почти везде в Ω.

2. Пусть выполнено условие а) теоремы 1 и $\Phi(P, Q)$ удовлетворяет принципу непрерывности. Тогда $\lim U^{\mu_n}=U^\mu$ почти везде в Ω.

3. Пусть Ω — локально компактное пространство со счетной базой открытых множеств, и Φ удовлетворяет принципу непрерывности. Пусть $\{\mu_i\}$ $(i\in I)$ — совокупность положительных мер таких, что носители всех мер заключены в одном компакте и полные массы всех мер ограничены в совокупности. Пусть, кроме того, для каждой пары потенциалов U^{μ_1} и U^{μ_2} совокупности существует такой потенциал U^{μ_3} той же совокупности, что $U^{\mu_3}\leqslant\min(U^{\mu_1}, U^{\mu_2})$. Тогда найдется положительная мера μ такая, что $U^\mu=\inf_{i\in I}U^{\mu_i}$ почти везде в Ω.

Если Ω — евклидово пространство, то аналог теоремы 3 доказан Брело. Х. Л. Смолицкий

4609. О свойствах асимптотически-непрерывных функций. Кокарева Т. А., Уч. зап. Марийск. гос. пед ин-та, 1957, 12, 35—63

Рассматриваются асимптотически непрерывные (а. н.) на $[a, b]$ функции. Показывается, что результаты целых арифметических операций, примененных к а. н. функциям, приводят снова к а. н. функциям. Доказывается:

Теорема I. Для того чтобы сходящаяся в каждой точке $[a, b]$ последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходилась к асимптотически непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы для каждых $N>0$, $\varepsilon>0$ и $\xi\in[a, b]$ можно было указать n_ξ, $n_\xi>N$ такое, что точка ξ является точкой плотности множества

$$M[|f_{n_\xi}(x)-f(x)|<\varepsilon].$$

Дается определение: Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится асимптотически квазиравномерно к $f(x)$, если $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и для каждых $\varepsilon>0$, $N>0$ можно указать N', $N'>N$ такое, что любая точка x_0 из $[a, b]$ является точкой плотности для множества $M\left[\left|f_{n_{x_0}}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\right]$, где $N<n_{x_0}<N'$. Доказывается:

Теорема II. Для непрерывных функций асимптотически квазиравномерная и квазиравномерная сходимость равносильны.

Примечание референта. 1) Теоремы I и II сохраняют силу и для а. н. функций. 2) В статье доказывается теорема: Для того чтобы предел сходящейся последовательности $\{f_n(x)\}$ а. н. функций был а. н. функцией, необходимо и достаточно, чтобы сходимость была асимптотически квазиравномерной. Доказательство содержит ошибку. Условие не является необходимым. Действительно, пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций сходится к а. н. функции, не являющейся непрерывной. Тогда, согласно этой теореме, последовательность $\{f_n(x)\}$ должна сходиться асимптотически квазиравномерно, а значит и квазиравномерно (в силу теоремы II). А из анализа известно, что предел квазиравномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция. А. Я. Дубовицкий

4610. О сингулярных интегралах. Богданович (On singular integrals. Bogdanowicz W.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 3, 247—249, XXI (англ.; рез. русск.)

Без доказательств формулируются: А) необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять ядро $a_n(s, t)$ $(a\leqslant s,\ t\leqslant b)$ сингулярного интеграла для того, чтобы равенство

$$x(s)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(s, t)\,x(t)\,dt \qquad (1)$$

имело место во всех точках Лебега любой функции $x(s)\in L_p([a, b])$ $(p\geqslant 1)$; В) условия, необходимые и достаточные для того, чтобы (1) имело место при любой $x(s)\in L_p([a, b])$ $(p\geqslant 1)$ всюду, где $x(s)$ служит производной своего неопределенного интеграла; С) условия [налагаемые на $g_n(t)$], необходимые и достаточные для того, чтобы равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\,dg_n(t)=x'(0)$$

выполнялось при любой $x(t)\in C([0, 1])$, дифференцируемой при $t=0$.

Приведем один из результатов:

Чтобы (1) имело место при любой $x(s)\in L([a, b])$ всюду, где $x(s)$ служит производной своего неопределенного интеграла, необходимо и достаточно выполнение 3-х условий:

1) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(s, t)\,dt=1;$$

2) если $s\notin[p, q]\subset[a, b]$, то $\lim_{n\to\infty}\int_p^q a_n(s, t)\,dt=0$;

3) для каждого s существует такое n_s, что при $n>n_s$ возможно представление

$$a_n(s, t)=\beta_n(s, t)+\gamma_n(s, t),$$

в котором $|\beta_n(s, t)|\leqslant K(s)$ почти для всех $t\in[a, b]$ и

$$\int_a^s \operatorname{Var}[\gamma_n(s, u);\ a\leqslant u\leqslant t]\,dt+$$

$$+\int_s^b \operatorname{Var}[\gamma_n(s, u);\ t\leqslant u\leqslant b]\,dt\leqslant K_1(s),$$

где $K(s)$ и $K_1(s)$ — конечные функции s.

Примечание референта. Автор указывает, что для точки Лебега при $p=1$ его результат принадлежит Д. К. Фаддееву и не указывает, что (отличные от приводимых в работе) условия, необходимые и достаточные для справедливости (1) в точках Лебега при $p>1$, были получены Б. И. Коренблюмом (Докл. АН СССР, 1947, 58, № 6, 973—976). См. также работу Тандори (РЖМат, 1955, 5715). И. П. Натансон

4611. Обобщение одной теоремы Натансона о сингулярных интегралах. Ван Цзай-шэнь, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta Sci. Natur., 1956, № 1, 169—170 (кит.)

Относительно сингулярного интеграла Валле-Пуссена

$$V_n[f; x] = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\,2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n}\left(\frac{t-x}{2}\right)dt$$

Натансон в 1944 г. доказал соотношение

$$\lim_{n\to\infty} V_n'[f; x] = f'(x),$$

если только $f'(x)$ существует и конечна.
Автор статьи доказывает подобную теорему относительно интеграла Арнольда.

Теорема. Если: 1) функция $\varphi(x, t)$ непрерывна на $I = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$, 2) существует и непрерывна $\varphi_x'(x, t)$ на I, 3) $|\varphi(x, t)| < 1$ при $t \neq x$, $\varphi(x, x) = 1$ и $\varphi_x'(x, x) = 0$, 4) существуют и непрерывны $\varphi_{tt}''(x, t)$, $\varphi_{x,t}''(x, t)$ на I, 5) $\varphi_{tt}''(x, x) < 0$, 6) существует и непрерывна $\varphi_{ttt}'''(x, t)$ на I, 7) $f(x) \in C[a, b]$ и $f'(x)$ конечна, то для сингулярного интеграла Арнольда

$$P_n[f; x] = \frac{1}{K_n}\int_a^b [\varphi(x, t)]^n f(t)\,dt, \quad K_n = \int_a^b [\varphi(x, t)]^n\,dt$$

имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P_n'[f; x] = \frac{\varphi_{ttt}'''(x, x)\,\varphi_{xt}''(x, x)}{2\left[\varphi_{tt}''(x, x)\right]^2} f(x) + \frac{\varphi_{xt}''(x, x)}{\left|\varphi_{tt}''(x, x)\right|} f'(x).$$

Отсюда получаются как следствия теорема Натансона и соотношение

$$\lim_{n\to\infty} L_n'[f; x] = f'(x),$$

где $L_n[f; x] = \frac{1}{K_n}\int_0^1 [1-(t-x)^2]^n f(t)\,dt$.

Ким Сен Ен

4612. Интегралы Фурье и кратные сингулярные интегралы. Михлин С. Г., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, 143—155 (рез. англ.)

Пусть на всем евклидовом пространстве E_m, кроме, может быть, начала координат, задана непрерывная функция $\Phi(x)$, имеющая в каждой точке производную $\partial^m \Phi/\partial x_1 \ldots \partial x_m$. Пусть все предшествующие производные этой функции непрерывны и для всех этих производных выполняются неравенства

$$|x|^k \left|\frac{\partial^k \Phi}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_k}}\right| \leqslant M, \qquad (1)$$

$$0 \leqslant k \leqslant m;\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant m.$$

Теорема. Если $\Phi(x)$ удовлетворяет перечисленным условиям, то оператор

$$F(g) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{E_m} e^{i(x,y)}\Phi(y)\,dy \int_{E_m} e^{-i(y,z)} g(z)\,dz$$

определен на множестве, плотном в $L_p(E_m)$, и ограничен в этом пространстве, причем

$$\|F\| \leqslant A_{p,m} M,$$

где $A_{p,m}$ — постоянная, зависящая исключительно от p и m.

Эта теорема является аналогом теоремы Марцинкевича для мультипликаторов рядов Фурье.

С помощью этой теоремы доказывается, что сингулярный оператор

$$Au \equiv au(x) + \int_{E_m} u(y)\,\frac{f(\theta)}{r^m}\,dy \quad (a = \text{const})$$

ограничен в $L_p(E_m)$ при любом $p\ (1 < p < \infty)$ при условии, что символ этого оператора имеет непрерывные производные до порядка m включительно по декартовым координатам точки x. При этом $\|A\| \leqslant B_{p,m} M$, где M — постоянная неравенства (1) для символа и $B_{p,m}$ зависит только от p и m. Доказывается, что для $m = 2$ условие гладкости на символ можно ослабить.

В отличие от результата Кальдерона и Зигмунда (Calderon A. P., Zygmund A., Acta math., 1952, 88, 85—139) достаточные условия ограниченности сингулярного оператора в L_p даются в реферируемой статье в терминах символа, а не характеристики.

Пусть θ_x — пересечение луча Ox с единичной сферой S с центром в начале координат. Доказывается следующая теорема: Пусть символ $\Phi(\theta_2)$ уравнения $Au = v$ не обращается в нуль и имеет непрерывные производные порядка $\leqslant m$ по декартовым координатам точки x на сфере S. Если $v(x) \in L_p(E_m)$ $(1 < p < \infty)$, то указанное уравнение имеет в $L_p(E_m)$ единственное решение $u(x) = Bv$, где B — сингулярный оператор с символом $[\Phi(\theta_2)]^{-1}$. А. И. Кошелев

4613. О суммах Римана. Церетели О. Д., Сообщ. АН ГрузССР, 1957, 18, № 2, 137—142

Рассматриваются суммы $\sum(t; f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n f(\Delta_i t + x_{i-1})\,\Delta_i$, где $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Доказывается, что из существования предела $\sum(t; f; x_0, x_1, \ldots, x_n)$, когда $\max_i \Delta_i \to 0$, при фиксированном t следует непрерывность $f(x)$ почти всюду на интервале $(0, 1)$. Без доказательства приводятся следующие теоремы: Если $f(x)$ — измеримая на $(0, 1)$ функция и $\sum(t; f; x_0, x_1, \ldots, x_n)$ сходится по мере на интервале $(0, 1)$, то предел есть постоянное число. Для суммируемых функций этот предел всегда существует и совпадает с интегралом Лебега. Предел функции $\sum\left(t; f; 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right)$ по мере при $n \to \infty$, если он существует, называется интегралом от функции $f(x)$ по интервалу $(0, 1)$. Интеграл, обобщенный таким образом, существует для функции

$$\tilde{f}(x) = \lim_{h\to\infty}\int_h^1 \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt,$$

где $f(x)$ — произвольная суммируемая функция. Хорошо известно, что $\tilde{f}(x)$ может оказаться несуммируемой. Ф. И. Харшиладзе

4614. К дифференциальным свойствам измеримых функций. Пламенов И. Я., Матем. сб., 1957, 42, № 2, 223—248

Подробное изложение ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1956, 4406). Ф. И. Шмидов

4615. О пространствах функций с конечной обобщенной вариацией. Муселяк, Орлич (On spaces of functions of finite generalised variation. Musielak J., Orlicz W.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 4, 389—392, XXXI (англ.; рез. русск.)

Пусть функция $M(u)$, $M(0) = 0$, непрерывна и не убывает при $u > 0$. Функция, вообще говоря, ком-

плексная, $x(t)$ действительного переменного $t \in [a, b]$ принадлежит пространству V_M, если

$$\sup_{a=t_0<\ldots<t_i<\ldots<t_m=b} \sum_{i=1}^{m} M[|x(t_i) - x(t_{i-1})|] < C.$$

При этом функция $x(t) \in V_M^*$, если $kx(t) \in V_M$ для некоторого $k > 0$. Аналогично определяются пространства AC_M и AC_M^* функций, абсолютно непрерывных с функцией $M(u)$. При определенных ограничениях на функцию $M(u)$ устанавливаются условия линейности, полноты и сепарабельности этих пространств при соответственных понятиях сходимости. Рассмотрены два вида сходимости — по вариации и по норме. А. Г. Джваршейшвили

4616. **Об определениях и свойствах функций двух переменных с ограниченным изменением. II.** Фалескини (Sulle definizioni e proprietà delle funzioni a variazione limitata di due variabili. (Nota II). Faleschini Bruno), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 2, 260—275 (итал.)

Работа состоит из разделов III и IV (разделы I—II см. РЖМат, 1958, 3633). В разделе III рассматриваются монотонные функции. Вещественная функция $f(x, y)$ называется монотонной в смысле Лебега в плоской области D, если для каждой области $D' \subset D$ и каждой точки $(x_0, y_0) \in D'$ имеет место

$$\inf_{(x,y)\in FD'} f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant \sup_{(x,y)\in FD'} f(x, y),$$

где FD' — граница D'.

Для монотонности непрерывной в области D функции $f(x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой $D' \subset D$:

$$\operatorname{osc}_{(x,y)\in FD'} f(x, y) \geqslant \operatorname{osc}_{(x,y)\in(D'\setminus FD')} f(x, y)$$

(osc — колебание).

Функция $f(x, y)$ монотонна относительно фиксированного направления, если для каждой точки (x, y), заключенной между точками (x', y'), (x'', y''), расположенными на этом направлении, будет:

$$f(x, y) = f(x', y') + \theta[f(x'', y'') - f(x', y')],$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Всякая функция, линейно-монотонная, будет монотонной в смысле Лебега.

Приводится определение линейно-монотонной функции, данное Прайсом (G. B. Price). $f(x, y)$ рассматривается как поверхностно-монотонная, если она не убывает (не возрастает) по отношению к двум направленным осям. Каждая поверхностно-монотонная функция на прямоугольнике $R[a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d]$ обладает ограниченным изменением в R (Хан).

Приводятся определения и свойства поверхностно-монотонных функций других авторов (Арцела, Хобсон).

В заключение раздела рассмотрены наиболее интересные классы функций с ограниченным изменением в R.

$f(z) = f(x, y)$ есть функция с ограниченным изменением по Арцела в R, если $\sum_{i=1}^{n} |f(z_i) - f(z_{i-1})|$ ограничены при $z_i = (x_i, y_i)$,

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b,$$
$$c = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n = d \quad \text{(класс } A\text{)}.$$

Если же

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b,$$
$$d = y_0 \geqslant y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n = c,$$

то $f(z)$ есть функция с ограниченным изменением по Хобсону и Конту (класс $\bar{A}$).

Свойства классов A, $\bar{A}$, не связанные с направлением осей, сохраняются и для функций, получаемых комбинированием поверхностно-монотонных функций по Арцела или Хобсону. Таким путем получаются классы A^*, $J_{x,y}$, J_s. Показано, что они связаны соотношениями:

$$A^* \supset A \cup \bar{A},\ J_{x,y} \supset J_s \supset A \cap \bar{A},\ J_{x,y} \supset A^*.$$

Так как каждая функция $f \in A^*$ ограничена в R, а функция класса $J_{x,y}$ должна только быть линейно-ограниченной относительно x и y, то существуют функции

$$f \in J_{x,y} \setminus A^*.$$

Рассматривается также класс K функций $f(x, y) = h(x) + k(y)$, для которого

$$A \cap \bar{A} \supset K \cap J_{x,y}.$$

Раздел IV посвящен рассмотрению функций с ограниченным изменением в R.

Если $f(x, y)$ определена в R и (x', y'), (x'', y'') — две точки R такие, что $x' \leqslant x''$, $y' \leqslant y''$, то приращение

$$\Delta_{x',y'}^{x'',y''} f(x, y) = f(x'', y'') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x', y')$$

называется двойным или смешанным.

Особый интерес представляет класс функций, определенных в R, типа:

$f(x, y) = h(x) + k(y) + f^*(x, y)$, где $f^*(x, y) \in J_{x,y}$. Показано, что для того чтобы $f(x, y)$ принадлежала этому классу, необходимо и достаточно, чтобы $F(x, y) \in J_{x,y}$, где $F(x, y) = \Delta_{a,c}^{x,y} f(x, y)$.

Затем рассматриваются различные обобщения понятия функции с ограниченным изменением по Жордану или Винеру. Эти понятия используются при изучении интеграла Стилтьеса и ряда Фурье.

По Витали $f(x, y)$ есть функция с ограниченным изменением в R, если

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta_{x,y} f(x_i, y_j)|$$

ограничена при

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m = b,$$
$$c = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n = d.$$

По Джефри (R. L. Jeffery) класс функций $f(x, y)$ с ограниченным изменением в R определяется условиями:

1) $f(x, y) = \lim_{n\to\infty} \int_{(a,x;\,c,y)} s_n(x, y)\, dxdy$,

где $s_n(x, y)$ имеют предельную функцию $s(x, y)$,

2) $\int_{R'} s_n(x, y)\, dxdy$ ограничен для каждого $R' \subset R$ и целого n.

Рассмотрены другие классы функций с ограниченным изменением и их свойства. В частности, приводится класс функций с ограниченным изменением в смысле Фреше. Ф. И. Шмидов

4617. **О максимуме модуля квазигладкой функции.** Брудный Ю. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 273—275

Пусть $\Lambda_0(-1, 1)$ — класс непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) $f(-1)=f(1)=0$, 2) для любых $x\pm h\in[-1,1]$ $(h>0)$, $|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant 2h$.
Положим

$$K=\sup_{f\in\Lambda_0(-1,1)}\ \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|.$$

В работе изучается значение величины K для четных функций. Именно, показывается, что в этом случае

$$K_0=\sup_{\substack{f\in\Lambda_0(-1,1)\\ f(-x)=f(x)}}\ \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|=\frac{5}{4}.$$

Константа 5/4 — точная.

Примечание референта. Оценка снизу для K_0, т. е. построение функции, для которой $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|=\frac{5}{4}$, была ранее дана Г. Н. Саковичем (РЖМат, 1956, 4424). Автор на это не указывает.
А. В. Ефимов

4618 К. Теория функций вещественной переменной. Натансон (Teoria funcţiilor de variabilă reală. Natanson I. P. Trad. din limba rusă. Bucureşti, Ed. tehn., 1957, 599 p.), Bibliogr. RPR, 1957, 6, № 9, 302 (рум.)

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

4619. Краткое доказательство леммы Цорна. Уэстон (A short proof of Zorn's lemma. Weston J. D.), Arch. Math., 1957, 8, № 4, 279 (англ.)

4620. Теорема о предельных порядковых числах. Кита (A theorem on limit ordinals. Kita Tôru), Math. japon., 1954, 3, № 2, 62 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Порядковое число является предельным в том и только в том случае, если $\lambda=\xi\lambda$ для любого ξ такого, что $2\leqslant\xi<\omega$.
А. С. Есенин-Вольпин

4621. О релятивных анализах. Кондо (Sur les analyses relatives. Kondô Motokiti), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 17, 2084—2087 (франц.)

Продолжается изучение указуемых (nommables) множеств, начатое в предыдущих статьях (РЖМат, 1958, 1943, 1944). Понятие указуемости множеств было введено Лебегом. Здесь различаются три вида указуемости: указуемость на множестве целых чисел, указуемость на B-множествах и указуемость на проективных множествах. В качестве элементарных множеств берутся лебеговские множества многочленов с коэффициентами из данного поля $\mathfrak{k}_0$, переменные которых пробегают поле $\mathfrak{k}$. Три вида указуемости называются соответственно $(E, \mathfrak{k}_0)$-, $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-, $(P, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемостями. Действительное число $a=\sum_{n=0}^{\infty}a_np^{-n}$, $p>1$, называется $(E, \mathfrak{k}_0)$-указуемым, если множество всех пар $<n, a_n>$ является $(E, \mathfrak{k}_0)$-указуемым множеством. Множество всех $(E, \mathfrak{k}_0)$-указуемых чисел обозначается через $\pi(\mathfrak{k}_0)$. Если $\pi(\mathfrak{k}_0)=\mathfrak{k}_0$, то это множество называется релятивным континуумом. В реферируемой статье строится эскиз релятивного анализа $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$, $\mathfrak{k}_0$ и $\mathfrak{k}$ — релятивные континуумы. $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{C}$ обозначают соответственно множество всех целых, рациональных и действительных чисел. Указуемость функции определяется по виду указуемости ее графика. Множество E называется указуемо счетным, если существует соответствующего вида указуемая, разнозначная функция, отображающая его на множество всех натуральных чисел. Множество E называется $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемо сепарабельным, если существует всюду плотное на нем $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемое конечное или счетное подмножество.

Основные теоремы, на базе которых можно строить анализ $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$, таковы:

1. Пусть E есть непустое $(P^1, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемое множество, содержащееся в $\mathfrak{k}$. Тогда существует $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемая функция $f(t)$, определенная и непрерывная на множестве всех иррациональных точек из $\mathfrak{k}$, такая, что $E=\{f(t)\}$.

2. Всякое $(P^1, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемое множество $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемо сепарабельно.

3. Всякое $(P^1, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемое, ограниченное и непустое на $\mathfrak{k}$ множество имеет верхнюю грань, принадлежащую $\mathfrak{k}_0$.

4. Замыкание $(P^1, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемого множества есть $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемое множество.

5. Пусть $f(u)$ есть $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемая функция на $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемом множестве D. Тогда, если $f(u)=0$ для всех $u\in(D\cap\mathfrak{k}_0)$, то $f(u)=0$ для всех $u\in D$.

6. Чтобы $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемая функция, определенная на $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемом множестве D, была непрерывной на D, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной в каждой точке множества D, принадлежащей полю $\mathfrak{k}_0$.

7. Всякая $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемая функция, определенная и непрерывная на ограниченном и замкнутом $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемом множестве, ограничена, имеет максимальное и минимальное значения, и равномерно непрерывна на этом множестве.

По мнению автора, среди всех релятивных анализов наиболее фундаментальным является $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}, \mathfrak{K}_0)$, где $\mathfrak{K}_0=\pi(\mathfrak{R})$, арифметизация его легко осуществима и, возможно, может быть доказана его непротиворечивость.
Б. С. Содномов

4622. О понятии трансфинитного. Кондо (Sur la notion du transfini. Kondô Motokiti), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 18, 2209—2212 (франц.)

Ранее (РЖМат, 1958, 1943) автор ввел понятие $(E, \mathfrak{k}_0)$-, $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$- и $(P, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемости множеств. В реферируемой статье рассматриваются трансфинитные числа с точки зрения указуемости множеств. Указуемость порядкового типа определяется по виду указуемости соответствующего множества, указуемость изоморфизма двух множеств — по виду указуемости функции, отображающей подобно одно из них на другое. Через Q обозначено множество значений функции $\theta(n)=2^{-p}(2q+1)$, если $n=2^p(2q+1)$.

1. Чтобы $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемое множество $E\subset Q$ было вполне упорядоченным по натуральному порядку, необходимо и достаточно, чтобы была точка p из $\mathfrak{k}_0$ такая, что $E\cap(p-n^{-1}, p)\neq 0$ для всех натуральных n.

2. Если α и β — два порядковых $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемых числа, то $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ и всякое число, меньшее α, тоже $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемы.

3. Для двух $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемых множеств A и B из типов, $A\cup B$ и $A\cap B$ $(P, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемы.

Пусть $E\subset(\mathfrak{k}\oplus Q)$ и $F\subset\mathfrak{k}$. Через $\mathfrak{D}(F, E)$ обозначено множество всех типов $\tau(E^{(f)})$ $(f\in F)$, где $E^{(f)}$ — множество всех точек $q\in Q$ таких, что $(f\oplus q)\in E$. Если положить $\mathfrak{Q}(\mathfrak{k})=\sup\limits_{u\in\mathfrak{k}}\left[\tau\left(\Gamma_{\mathfrak{k}}^{(u)}\right)\right]$, где $\Gamma_{\mathfrak{k}}$ обозначает лебеговское решето, лежащее в $\mathfrak{k}\oplus Q$, и $\mathfrak{Q}_p=\mathfrak{Q}(\mathfrak{K})$, то $\mathfrak{Q}(\mathfrak{C})=\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}_p\leqslant\mathfrak{Q}$.

4. Если $\mathfrak{D}(F, E)$ является $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемым (т. е. если $E\cap\Gamma\oplus Q$ $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемо) и $\sup\limits_{f\in F}[\tau(E^{(f)})]<\mathfrak{Q}$, то $\sup\limits_{f\in F}[\tau(E^{(f)})]$ $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуем.

5. Пусть D есть множество всех пар $<\alpha, \beta>$ порядковых чисел $\alpha<\beta$ или $\alpha=\beta=0$. Если через $\rho(\alpha, \beta)$ обозначить лексикографический порядок пары (α, β) в D, то $\rho(\alpha, \beta)$ является $(S, \mathfrak{R}, \mathfrak{R})$-указуемой функцией на D.

Далее вводятся трансфинитные процессы $\mathfrak{N}_E$, $\mathfrak{N}_S$ и $\mathfrak{N}_P$, доставляющие множества, называемые соответственно $(E, \mathfrak{k}_0)$-, $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$- и $(P, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемыми трансфинитно. Пусть $\mathfrak{Z}$ есть множество всех целых чисел и $E \subset \mathfrak{Z}$. Обозначено через $\Theta_1(E)$ множество всех $(m, q_n) \in (\mathfrak{Z} \oplus Q)$ таких, что $\psi^{-1}\Phi_2[\psi(m), n] \in E$, и через $\Sigma_1(E)$ — множество всех m, для которых существует такое n, что $\psi^{-1}\Phi_{21}\Phi_2[\psi(m), \psi(n)] \in E$ (здесь $\psi(x) = 2x$, если $x > 0$, и $\psi(x) = 1 - 2x$, если $x \leqslant 0$, $x \in \mathfrak{Z}$; $\Phi_2(u, v) = \frac{1}{2}(u+v-1)(u+v-2)+u$, u и v натуральны, и $\Phi_{21}\Phi_2(u, v) = u$). Пусть $E \subset \mathfrak{Z}^2$ и $\rho(\alpha, \beta) = \eta$. Тогда $E_0 = E$, $E_1 = CE$; $E_\eta = \bigcup_{t_2} \Sigma_1 E_\alpha^{(t_2)} \oplus t_2$, если $\eta > \alpha$ и $\beta = 0$, и $E_\eta = CE_\alpha$, если $\eta > \alpha$ и $\beta = 1$; $E_\eta = \bigcup_{t_2}^{*} E_\gamma^{(n)} \oplus t_2$, если $\eta > \alpha$ и $\beta > 1$ или $\eta = \alpha$, и $\overset{*}{\bigcup}$ распространена на все $E_\gamma^{(n)}$ такие, что $\tau[\theta_1(E_\beta^{(t_2)})^{(n)}] = \gamma$ и $\gamma < \alpha$. Если даны порядковое число η и натуральное число n, то полагаем $\mathfrak{N}_E(E, \eta, n) = E_\eta^{(n)}$ и назовем $\mathfrak{N}_E$ трансфинитным процессом (E). Если E является $(E, \mathfrak{k}_0)$-указуемым, множество $E_\eta^{(n)}$ называется $(E, \mathfrak{k}_0)$-указуемым трансфинитно. Аналогично определяются трансфинитные процессы $\mathfrak{N}_S$, $\mathfrak{N}_P$ и множества, $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$- и $(P, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемые трансфинитно. Вводится, наконец, понятие действительного числа, $(E, \mathfrak{k}_0)$-указуемого трансфинитно (аналогично $(E, \mathfrak{k}_0)$-указуемости действительного числа, РЖМат, 1958, 1944). Пусть $\mathfrak{k}_0$ есть данное поле чисел. Тогда через $\omega(\mathfrak{k}_0)$ обозначается множество всех чисел, $(E, \mathfrak{k}_0)$-указуемых трансфинитно. Если $\omega(\mathfrak{k}_0) = \mathfrak{k}_0$, то это множество называется релятивным трансфинитным континуумом.

6. Если $\mathfrak{k}_0$ является $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{C})$-указуемым, $\mathfrak{C}$ — область действительных чисел, то $\omega(\mathfrak{k}_0)$ $(P, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{C})$-указуемо; если $\mathfrak{k}_0$ является $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{C})$-указуемым счетно, то $\omega(\mathfrak{k}_0)$ $(P^2, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{C})$-указуемо.

7. $\omega(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}$.

8. Чтобы $(P^1, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемое множество было $(S, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемым трансфинитно, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение было также $(P^1, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемым.

9. Всякое $(P_1, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемое множество, содержащееся в $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}$, может быть униформизировано $(P_1, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{k})$-указуемым множеством. Б. С. Содномов

4623. О проективном континууме и заключение изучения указуемых множеств. Кондо (Sur le continu projectif et la conclusion de l'étude des ensembles nommables. Kondô Motokiti), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 19, 2275—2278 (франц.)

Ранее (РЖМат, 1958, 1944) автор ввел понятие $(E, \mathfrak{k})$-указуемого действительного числа. Аналогично вводится понятие $(P, \mathfrak{k}_0)$-указуемого действительного числа. Пусть $\mathfrak{k}_0$ есть данное поле чисел. Если через $p(\mathfrak{k}_0)$ обозначить множество всех $(P, \mathfrak{k}_0)$-указуемых чисел, то $\mathfrak{k}_0 \subseteq \pi(\mathfrak{k}_0) \subseteq p(\mathfrak{k}_0)$ и $\pi[p(\mathfrak{k}_0)] = p(\mathfrak{k}_0)$ (о $\pi(\mathfrak{k})$ см. реф. 4621). Если $\mathfrak{k}_0 = p(\mathfrak{k}_0)$, то $\mathfrak{k}_0$ называется проективно замкнутым. Проективно замкнутое поле, содержащее данное поле $\mathfrak{k}$, называется проективным замыканием поля $\mathfrak{k}$ и обозначается через $P(\mathfrak{k})$. Проективное замыкание поля $\mathfrak{R}$ рациональных чисел называется проективным континуумом и обозначается через $\mathfrak{K}$. Проективный континуум является $(P^2, \mathfrak{R}, \mathfrak{C})$-указуемым множеством, $\mathfrak{C}$ — область действительных чисел. Пусть $\mathfrak{K}_0 = \pi(\mathfrak{R})$. Если положить $\mathfrak{K}_\alpha = P(\mathfrak{K}_{\alpha-1})$ и $\mathfrak{K}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{K}_\beta$, если α — предельное число, то $\mathfrak{K} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathfrak{K}_\alpha$.

Всякое множество, $(P, \mathfrak{K}, \mathfrak{K})$-указуемое трансфинитно ($(P, \mathfrak{K}, \mathfrak{C})$-указуемое трансфинитно), является ограниченным и непустым на $\mathfrak{K}$ (на $\mathfrak{C}$) и допускает точку из $\mathfrak{K}$ в качестве верхней грани.

Чтобы $(P^2, \mathfrak{K}, \mathfrak{C})$-указуемое множество $E \subset \mathfrak{C}$ было непустым, необходимо и достаточно, чтобы $E \cap \mathfrak{K}$ было непустым.

Это означает, что для семейств указуемых множеств верна аксиома выбора. Пусть $(P^2, \mathfrak{K}, \mathfrak{C})$-указуемое множество E есть резольвента некоторой математической проблемы (Лузин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях (РЖМат, 1954, 3659k)). Если E непусто, то эта проблема может быть решена указуемо.

В релятивном анализе $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}, \mathfrak{C})$ (реф. 4621) остаются в силе результаты П. С. Новикова (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38), а именно: существует $(P^2, \mathfrak{K}_0, \mathfrak{C})$-указуемая функция, пересчитывающая проективный континуум. Эта функция неизмерима (L) и не обладает свойством Бэра в релятивном анализе $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K})$.

Автор утверждает, что проективный континуум есть интуитивная реализация континуума $\mathfrak{K}_G$ гёделевской модели Δ. Множество всех (t, u), где $u \in p[\mathfrak{R}(t)]$ и t — произвольно взятое действительное число, является $(P^2, \mathfrak{K}_0, \mathfrak{C})$-указуемым множеством. Этот факт дает новый подход к проективным множествам.

Заключая изучение указуемых множеств, автор различает два случая: указуемость множества влечет за собой указуемость его элементов или не влечет таковую, и формулирует такой принцип; в первом случае эффективно определимые множества суть множества, $(P, \mathfrak{K}, \mathfrak{K})$-указуемые трансфинитно, во втором случае они суть множества, $(P, \mathfrak{K}, \mathfrak{C})$-указуемые трансфинитно. Б. С. Содномов

4624. О некоторых свойствах Г-операции. Ступина И. Д., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, 21, № 3, 329—348

Точка x называется точкой p-значности, или конечнозначности, или счетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$ относительно жесткой базы N δs-операции Φ_N, если существует p, соответственно конечное число (зависящее от x), счетное множество цепей базы N, в ядра которых входит точка x.

Пусть Ξ обозначает некоторый класс множеств, а $B\Xi$ — класс всех множеств, которые входят в класс Ξ одновременно со своими дополнениями.

Общая задача накрытия множеств, относящаяся к классу Ξ и δs-операции Φ_N, формулируется так: если для данной последовательности $\{E_n\}$ множеств из класса Ξ все точки множества $\Phi_N(\{E_n\})$ обладают некоторым общим свойством K, то можно ли найти такую последовательность $\{H_n\}$ множеств из класса $B\Xi$, чтобы $H_n \supset E_n$ и все точки множества $\Phi_N(\{H_n\})$ обладали тем же свойством K.

В реферируемой работе эта задача решается положительно для класса CA_2-множеств и Г-операции, если в качестве свойства K взять одно из следующих свойств: быть точкой p-значности, быть точкой конечнозначности, быть точкой счетнозначности и быть точкой, определяемой множеством цепей жесткой приведенной базы, имеющим компактное замыкание.

Утверждение положительного решения задачи для класса CA_n-множеств при любом n, начиная с некоторого значения, и Г-операции в вышеуказанных случаях не может привести к противоречию в гёделевской системе Σ аксиом теории множеств.

Б. С. Содномов

4625. О некоторых свойствах A_2-операции. Ступина И. Д., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, 21, № 4, 579—594

Продолжение предыдущей работы автора (реф. 4624). Если взять в качестве требуемого свойства для задачи накрытия одно из следующих свойств: быть точкой не более чем p-значности, быть точкой конечнозначности, быть точкой, определенной компактным множеством цепей жесткой приведенной базы, то утверждение положительного решения задачи накрытия для класса CA_n-множеств при любом n, начиная с некоторого значения >2, и A_2-операции не может привести к противоречию в гёделевской системе Σ аксиом теории множеств. Если класс множеств Ξ инвариантен относительно δs-операции Φ_N с A_2-базой N, то δs-операция $\Phi_{\tilde{N}_{\alpha''}}$, отбирающая точки, определяемые множеством цепей жесткой приведенной базы A_2-операции, не являющимся рассеянным множеством индекса $\leqslant \alpha$, не выводит за пределы класса Ξ, если применить ее к множествам этого класса. За пределы такого класса Ξ не выводит также и δs-операция $\Phi_{N^{''}_{*\alpha}}$, отбирающая точки, определяемые множеством цепей жесткой приведенной базы A_2-операции, не являющимся суммой рассеянного семейства множеств индекса $\leqslant \alpha$, замыкание которых компактно. Б. С. Содномов

4626 K. Трансфинитные числа. Бахман (Transfinite Zahlen. Bachmann Heinz. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N. F.), Heft 1. Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955. vii, 204s., 29.80DM) (нем.)

Монография по теории трансфинитных чисел как порядковых, так и кардинальных. Изложение ведется содержательно, в терминах аксиоматической теории множеств; последняя рассматривается в том же духе, что и в работе Гёделя (Русский перевод см. Успехи матем. наук, 1948, 3, № 1, 96—149), однако полный перечень аксиом отсутствует, из-за чего ряд важных вопросов, связанных с аксиоматикой теории множеств, остался по существу за пределами книги. В основу кладутся понятия множества, класса и отношения принадлежности между ними; элементами классов могут быть только множества; каждое множество является классом, но обратное утверждение не имеет места. Два класса, состоящие из одних и тех же элементов, считаются равными. Автор не приводит аксиом, на которых основываются утверждения о существовании классов; в остальном аксиомы сходны с аксиомами упомянутой работы Гёделя. Во всех случаях, когда в доказательствах используется аксиома выбора, это обстоятельство отчетливо оговаривается.

Построение важнейших теоретико-множественных понятий также примыкает к гёделевскому; так, функция определяется как класс упорядоченных пар, удовлетворяющий условию однозначности; но в отличие от Гёделя автор рассматривает в качестве аргументов первые, а в качестве значений функции — вторые члены упорядоченных пар. При отказе от условия однозначности получается более общее понятие — отображение (Abbildung). Понятие «отношение» нигде точно не определяется. Порядковые типы и мощность вводятся как особые объекты, совпадающие для подобных, соответственно для эквивалентных множеств; существование таких объектов постулируется особыми аксиомами. При этом отмечается, что объекты, о которых только что шла речь, могут быть устранены, если надлежащим образом заменять все предложения о порядковых типах и мощностях предложениями о подобии и эквивалентности. Порядковые типы и мощности рассматриваются по существу только для вполне упорядоченных множеств; только для этих порядковых и кардинальных чисел и нужны упомянутые выше особые аксиомы, причем автор показывает, что эти аксиомы выполняются в системе Цермело—Френкеля (§ 4 и § 27).

Теория порядковых и кардинальных чисел рассматривается значительно подробнее, чем в книгах Ф. Хаусдорфа (Теория множеств, М., ОНТИ, 1937), П. С. Александрова (Введение в общую теорию множеств и функций. Часть I. М.—Л., Гостехиздат, 1948), и Серпинского (Sierpinski W., Leçons sur les nombres transfinis, Paris, 1928).

Переходя к разбору книги по главам (так мы именуем разделы книги, обозначенные римскими цифрами; их семь), мы сосредоточим внимание лишь на том материале, которого нет в перечисленных выше книгах.

Гл. I состоит из трех параграфов и содержит вводные замечания, в частности описание аксиоматики. Понятия подобия и эквивалентности множеств, а также вполне упорядоченного множества вводятся в § 3.

В гл. II (§§ 4—9) рассматриваются общие свойства порядковых чисел и трансфинитных функций (так называются функции, аргументами и значениями которых служат порядковые числа, среди которых имеются бесконечные числа). Функция F называется монотонной, если $\xi_1 < \xi_2 \to F(\xi_1) \leqslant F(\xi_2)$, возрастающей, если $\xi_1 < \xi_2 \to F(\xi_1) < F(\xi_2)$, непрерывной, если $F(\lambda) = \lim_{\xi \to \lambda} F(\xi)$ для каждого предельного числа из ее области определения. Монотонная непрерывная функция называется полунормальной, возрастающая непрерывная функция — нормальной (§ 5). Функция $\lim_{\eta < \nu} f_\eta(\xi)$ (где f_η — функции, определенные на одной и той же области A, причем этот предел существует для всех $\xi \in A$) называется граничной функцией для данной последовательности f_η. В § 5 доказывается, что каждая функция типа $\alpha < \omega_1$ (т. е. определенная на числах $< \alpha$) является граничной функцией для некоторой последовательности типа ω непрерывных функций типа α, и показывается с помощью аксиомы выбора, что функция $\xi + 1$ типа ω_1 не является граничной функцией для трансфинитной последовательности непрерывных функций. Функция, граничная для монотонной последовательности полунормальных функций, является полунормальной. (Результаты Френкеля.) В § 6 вводятся в рассмотрение порядковые числа второго класса. Объединение Z чисел первого и второго классов можно описать как наименьший класс, содержащий 0 и замкнутый по отношению к прибавлению 1 и операции предельного перехода по последовательности типа ω.

Пусть A — начало класса W всех порядковых чисел (т. е. $A = W$ или $A =$ сегменту $W(\lambda)$ класса W, порожденному некоторым числом λ), и пусть A не имеет наибольшего элемента. $B \subset A$ называется замкнутым в A, если каждое число, предельное для чисел из класса B, принадлежит B, коль скоро оно принадлежит A. Замкнутый в A конфинальный A подкласс A называется пучком (Band) класса A. Нормальная функция называется полной, если все ее значения входят в область ее определения. В § 7 рассматриваются полные нормальные функции, область определения которых регулярна, т. е. $= W$ или $W(\lambda)$, где λ — регулярное предельное число $> \omega$. Сумма и пересечение множеств значений двух таких функций служат снова множествами значений такой функции с той же областью определения. То же верно для пересечения множеств значений любой последовательности типа μ таких функций с общей регулярной областью определения A, если $\mu \in A$.

В § 8 для любой монотонной функции f сопоставляются две последовательности g_ν и h_ν функций, име-

нуемых соответственно левыми и правыми итерациями функции f: $g_0(\xi)=h_0(\xi)=\xi$, $g_{\nu+1}(\xi)=f(g_\nu(\xi))$, $h_{\nu+1}(\xi)=h_\nu(f(\xi))$, а для предельных λ: $g_\lambda(\xi)=\lim_{\nu<\lambda} g_\nu(\xi)$, $h_\lambda(\xi)=\lim_{\nu<\lambda} h_\nu(\xi)$; эти равенства требуются только в том случае, если $g_\nu(\xi)$ и $h_\nu(\xi)$ для $\nu<\lambda$ определены. Для конечных ν g_ν и h_ν совпадают, а если f полунормальна, то при $\nu\geqslant\omega$ g_ν совпадает с g_ω. Поэтому для нормальных f существенную роль играют только правые итерации, которые в § 8 рассматриваются несколько подробнее. Они обозначаются f^0, f^1, ..., f^ν, ...

Для любой нормальной функции φ корни уравнения $\varphi(\xi)=\xi$ называются критическими числами этой функции (§ 8). Упорядоченые по величине критические числа нормальной функции образуют область значений нормальной функции φ^1, именуемой производной (Ableitung) функции φ и совпадающей с φ^ω. Итерация двух полных нормальных функций, определенных в некоторой области, является нормальной функцией, определенной в той же области, и множество значений ее производной совпадает с пересечением множеств значений производных от данных функций. Последовательные производные обозначаются так: $\varphi_0(=\varphi)$, φ_1, ..., φ_η, $\varphi_{\eta+1}\left(=\varphi_\eta^1\right)$, ... (для предельных λ, $V\varphi_\lambda=DV_{\eta<\lambda}\varphi_\eta$); V_φ означает область значений функции φ; D — оператор пересечения; $\varphi_\eta(\xi)=\varphi^{\omega^\eta}(\xi)$ для ξ, $\eta\in A$ (A — область определения φ, которая предполагается регулярной).

В § 9 рассматриваются функции, определенные на классах порядковых чисел, не имеющих наибольшего элемента. Такая функция φ называется регрессивной, если $\varphi(\xi)<\xi$ для всех $\xi\in M$, $\xi\geqslant 1$ (и $\varphi(0)=0$ при $0\in M$). Если A — регулярное начало W и $M\subset A$, причем $A-M$ не содержит никакого нучка класса A, то для всякой определенной на M регрессивной функции f найдется конфинальное A подмножество M, на котором значения A совпадают. Доказывается, что свойства M нельзя ослабить и что в качестве A нельзя выбрать $W(\lambda)$, где λ сингулярно или $=\omega$. Рассматриваются также некоторые следствия из теории регрессивных функций, например, невозможность сопоставить каждому предельному числу λ второго класса возрастающую последовательность $\lambda_\eta\to\lambda$ ($\eta<\omega$) таким образом, что для предельного ξ, $\lambda_\eta<\xi<\lambda_{\eta+1}$, и относящейся к ξ последовательности ξ_η $\xi_0\geqslant\lambda_\eta$. (Этот результат принадлежит автору, имеющему, кроме того, много работ по теории нормальных функций).

В гл. III (§§ 10—23) рассматривается арифметика порядковых чисел (представление этих чисел в виде полиномов, теория делимости и простые числа, случаи перестановочности чисел при сложении, умножении и возведении в степень, натуральные суммы и произведения Гессенберга (Hessenberg) и Якобсталя (Jacobstahl), а также функциональная теория арифметических операций, в которой используются нормальные функции). По определению, операция $f(\alpha,\beta)$ удовлетворяет основным арифметическим законам, если для $\alpha,\beta>1$ функция $f(\alpha,\beta)$ при фиксированном α является нормальной функцией от β, а при фиксированном β — монотонной функцией от α с $f(\alpha,\beta)>\alpha$. Число ξ называется главным относительно такой операции f, если существует $A<\xi$ такое, что $f(\alpha,\xi)=\xi$ для всех α, $A\leqslant\alpha<\xi$. В § 15 рассматривается теория этих чисел; главные числа операций сложения, умножения и возведения в степень называются γ-, δ- и ε-числами соответственно. В § 16 устанавливается связь главных чисел с критическими; например, для каждой операции f, удовлетворяющей основным арифметическим законам, можно эффективно построить нормальную функцию, критические числа которой совпадают с предельными главными числами f.

Гл. IV (§§ 24—30) посвящена теории мощностей и кардинальных чисел без аксиомы выбора; отмечается неестественный характер этой теории.

В гл. V (§§ 31—36) рассматриваются следствия из аксиомы выбора и гипотезы $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$ в теории кардинальных чисел. В § 31 рассматриваются 16 эквивалентов аксиомы выбора (например, предложение Тарского: для каждого множества N имеется множество M, содержащее в качестве элементов все X такие, что $X\subset M$ и $\overline{\overline{X}}$ не $\geqslant\overline{\overline{N}}$). В §§ 33—34 рассматривается теория «бэтов», т. е. мощностей вида $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, определенных в § 28 (бэт — вторая буква еврейского алфавита). Их поведение сильно зависит от того, $\alpha>\beta$ или $\alpha\leqslant\beta$; во втором случае $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}$ (§ 28). Если $\alpha>\beta>\gamma$ и $\aleph_\alpha$ не является степенью $\aleph_\beta$, то $\aleph_\alpha$ не является степенью $\aleph_\gamma$. Если $\varphi\geqslant\mathrm{cf}(\alpha)$ (наименьшее порядковое число, конфинальное α, если α предельно, в противном случае $\mathrm{cf}(\alpha)=\alpha$), то $\aleph_\alpha\neq\mathfrak{m}^{\aleph_\varphi}$ для любой мощности $\mathfrak{m}$. Для $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_\beta$ необходимо и достаточно, чтобы β было наименьшим порядковым числом ξ, для которого $\aleph_\xi^{\aleph_\alpha}<\aleph_{\xi+1}^{\aleph_\alpha}$ (или вместо этого — для которого $\aleph_\xi^{\aleph_\alpha}=\aleph_\xi$ (§ 33)). В § 34 рассматриваются суммы и высшие операции над бэтами. Обобщенная континуум-гипотеза (§ 35) состоит в том, что для бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ не может существовать мощности $\mathfrak{n}$ с $\mathfrak{m}<\mathfrak{n}<2^{\mathfrak{m}}$ (заметим, что независимость этой гипотезы в аксиоматике Мостовского, где нет аксиомы выбора, легко вытекает из построения Мостовского (Fundam. math., 1939, **32**, 201—252); достаточно взять в качестве $\mathfrak{m}$ бесконечное множество без счетного подмножества). Если $\mathfrak{m}$ — бесконечная мощность и между $\mathfrak{m}$ и $2^{\mathfrak{m}}$, а также между $2^{\mathfrak{m}}$ и $2^{2^{\mathfrak{m}}}$ не имеется промежуточных мощностей, то $2^{\mathfrak{m}}$ — алеф (§ 35). В § 35 приводятся 13 эквивалентов гипотезы об алефах $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$, важная роль которой в теории бэтов показана в § 36.

Гл. VI (§§ 37—39) посвящена взаимоотношению континуума и второго числового класса. Приводится ряд проблем, которые требуется решить без аксиомы выбора (с аксиомой выбора они решаются тривиально). В § 38 утверждается, что без аксиомы выбора не удается доказать наличия порядкового числа, не входящего во второй числовой класс. В этой связи предлагается следующая аксиома, из которой вытекает существование такого числа: (A) существует функция, сопоставляющая каждому предельному числу λ второго класса сходящуюся к λ возрастающую последовательность. В § 38 рассматриваются 7 эквивалентов (A) и предложение (A′) о том, что для каждого числа α второго класса существует функция такого вида, как в (A), но определенная для предельных чисел $<\alpha$. Выводятся следствия из (A), например $\aleph_1\leqslant 2^{\aleph_0}$ (а приведенное в предпоследней фразе предложение выводится даже из (A′)). В § 39 рассматриваются предложения, противоречащие аксиоме выбора, но сами по себе до сих пор не опровергнутые, например (B): справедливо (A′), но не (A); (F) континуум является суммой счетного числа счетных подмножеств; (G) каждое беско-

нечное множество является суммой счетного числа множеств меньшей мощности. Рассматриваются следствия этих предложений (например, из (B) следует невозможность вполне упорядочить континуум, из (F) — несравнимость $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$ и др.).

Последняя (седьмая) глава (§§ 40—42) посвящена недостижимым числам. В § 40 рассматриваются порядковые числа, недостижимые относительно арифметических операций, а также «эксорбитантные» порядковые числа Хаусдорфа. В § 41 с помощью аксиомы выбора рассматриваются недостижимые алефы в смысле Куратовского и в смысле Тарского. (Те и другие — это алефы, не представимые в виде суммы меньшего числа меньших мощностей, и притом $> \aleph_0$ и такие, что вместе с каждым алефом $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ следующий за $\mathfrak{p}$ алеф $< \mathfrak{m}$ (по Куратовскому) или $2^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$ (по Тарскому); алефы, недостижимые по Куратовскому, называются недостижимыми в широком смысле, а по Тарскому — в узком. Из гипотезы об алефах вытекает совпадение обоих понятий.) В заключительном § 42 рассматриваются вопросы, связанные с существованием недостижимых чисел. В частности, приводятся следующие две эквивалентные аксиомы Тарского о существовании недостижимых множеств, каждая из которых, помимо аксиомы бесконечности и существования недостижимых чисел, влечет аксиому выбора: (U) Для каждого множества N существует множество M такое, что $N \in M$, и из $X \in M$ следует, что каждое подмножество $Y \subset X$, а также множество всех подмножеств X являются элементами M и, кроме того, такое, что каждое неэквивалентное M подмножество M является элементом M. (U^1) Для каждого множества N существует множество M такое, что N эквивалентно подмножеству M, множество неэквивалентных M подмножеств M эквивалентно M, и притом M не эквивалентно множеству всех подмножеств никакого множества.

В конце книги автор касается вопроса о высших недостижимых числах.

Книга снабжена обширной библиографией (291 название). Встречаются мелкие неточности. Например, на стр. 21 утверждается, что каждое множество порядковых чисел является объединением своих элементов.

А. С. Есенин-Вольпин

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

4627. О перестановках тригонометрической системы. Ульянов П. Л., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 4, 568—571

Ряд называется безусловно сходящимся почти всюду, если он сходится почти всюду при любой перестановке его членов. Пусть $E_n^2(f)$ — наилучшее приближение $f(x)$ в метрике L^2 тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$. Тогда ряд Фурье от $f(x)$ сходится безусловно почти всюду на $[0, 2\pi]$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено одно из условий:

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(\lg \lg n)^{1+\varepsilon} \lg n}{n} \left[E_n^{(2)}(f)\right]^2 < \infty,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\lg|\lg t||^{1+\varepsilon} |\lg t|}{t} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx dt < \infty.$$

Далее формулируется

Теорема 3. Пусть $\sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — тригонометрический ряд, для которого $|a_k| \leqslant 1$, $|b_k| \leqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\sum \left(a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2\right) = \infty$ для некоторой последовательности $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, удовлетворяющей условию: для любого n число решений уравнения $n = \pm n_i \pm n_j$ имеет не более A решений (A — постоянное). Пусть $T = \|C_{mn}\|$ — матрица, определяющая регулярный метод суммирования и такая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} n |C_{mn}| = P(m) < \infty \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

(такие методы называют K-методами). Тогда члены тригонометрического ряда можно так переставить местами, что вновь полученный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{\nu_i} \cos \nu_i x + b_{\nu_i} \sin \nu_i x) \qquad (1)$$

не будет суммироваться заданным K-методом ни на каком множестве положительной меры, а также ни одна подпоследовательность частных сумм ряда (1) не будет сходиться ни на каком множестве положительной меры.

Среди рядов, удовлетворяющих условиям теоремы 3, в силу результатов Марцинкевича, есть и ряды Фурье для функций $f(x)$ из класса L^p, $1 \leqslant p < 6/5$.

Приводится еще ряд теорем о рядах с переставленными членами, из которых отметим следующие:

Теорема 5. Для любого тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ с } \sum (a_n^2 + b_n^2) = +\infty$$

можно члены ряда так переставить местами, что новый ряд неограниченно расходится почти всюду на $[0, 2\pi]$ и не сходится в метрике L на $[0, 2\pi]$.

Теорема 6. Существует непрерывная функция, для которой ряд Фурье после некоторой перестановки не сходится на $[0, 2\pi]$ по метрике L^q для любого $q > 2$ (перестановка не зависит от q). Н. К. Бари

4628. О рядах из косекансов. Кац, Салем (On a series of cosecants. Kac M., Salem R.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, A60, № 3, 265—267; Indagationes math., 1957, 19, № 3, 265—267 (англ.)

Доказывается, что если $c_k \geqslant 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, то из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|\sin kx|} \qquad (1)$$

на множестве положительной меры вытекает, что $\sum_{k=1}^{\infty} c_k |\ln c_k| < \infty$, а из сходимости последнего ряда вытекает, что ряд (1) сходится для почти всех x.

В конце работы сделано замечание относительно поведения рядов с членами $\left|\frac{c_k}{\sin kx}\right|^{\alpha}$.

П. Л. Ульянов

4629. О расходимости рядов Фурье. Ульянов П. Л., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 75—132

Статья посвящена изложению основных результатов, касающихся расходящихся рядов Фурье. Она носит главным образом обзорный характер, однако содержит некоторые ценные замечания и собственные доказательства автора; в ней также поставлен ряд интересных проблем.

Во введении содержится краткий обзор результатов по вопросу о расходимости тригонометрических рядов. В § 1 без доказательств приведены некоторые хорошо известные теоремы, которыми в дальнейшем прихо-

дится пользоваться, а затем даны с доказательствами теорема Катнера и одна теорема Зигмунда и Марцинкевича. В § 2 даются примеры непрерывных функций с рядом Фурье, расходящимся в одной точке. В § 3 излагается пример А. Н. Колмогорова ряда Фурье, расходящегося почти всюду и имеющего неограниченные частные суммы почти всюду. Автор показывает, что ряд, сопряженный с рядом А. Н. Колмогорова, не является рядом Фурье. В § 4 излагается пример Марцинкевича ряда Фурье, расходящегося почти всюду, но у которого почти всюду частные суммы имеют конечные пределы неопределенности. Автор показывает, что и в случае примера Марцинкевича сопряженный ряд не является рядом Фурье. Он показывает, что если бы существовала функция $F(x)$ с почти всюду расходящимся рядом Фурье и для которой всюду $\overline{\lim}\,|S_n(x)|<+\infty$ (S_n — частные суммы ряда Фурье), то тогда существовала бы и ограниченная функция с рядом Фурье, расходящимся на множестве положительной меры. В § 5 доказывается признак Марцинкевича для сходимости ряда Фурье на некотором множестве положительной меры, причем этот признак в известном смысле не может быть улучшен. В § 6 излагается результат, по сути дела полученный Харди и Рогозинским и извлеченный из их работы Суноути, а именно: существование почти всюду расходящегося ряда Фурье, у которого сопряженный есть снова ряд Фурье.

В § 7 изложена теорема Целлера: Существует для любого множества типа F_σ такой ряд Фурье, который сходится на этом множестве, а на его дополнении расходится и имеет неограниченные частные суммы.

Доказательства всех теорем доведены полностью до конца и в ряде случаев значительно прозрачнее, чем у авторов. Н. К. Бари

4630. Об отрицательном порядке суммирования ряда Фурье в точке. Бхатт (On the negative order summability of a Fourier series at a point. Bhatt S. N.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1957, A23, № 4, 306—311 (англ.)

Пусть $f(t)\in L(-\pi,\ \pi)$ и имеет ряд Фурье

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)=$$

$$=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t). \qquad (1)$$

Положим

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2s\},$$

$$\varphi_\alpha(t)=\alpha t^{-\alpha}\int_0^t(t-u)^{\alpha-1}\varphi(u)\,du,\ \alpha>0.$$

Доказывается теорема: Если $\varphi_\alpha(t)$ $(0<\alpha<1)$ имеет ограниченную вариацию на интервале $(0,\ \eta)$, $\varphi_\alpha(t)\to 0$ при $t\to 0$ и $A_n(x)=o(n^{\alpha-1})$, то ряд (1) суммируется $(C,\ \alpha-1)$ в точке $t=x$. При $\alpha\geqslant 1$ аналогичный результат, но без ограничения порядка $A_n(x)$, был получен Бозанке. А. А. Шнейдер

4631. Результаты о сходимости по мере тригонометрических рядов. Вихиль-и-Васкес (Resultados sobre convergencia en medida de series trigonométricas. Vigil y Vázquez Luis), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1957, 51, № 2, 161—163 (исп.)

Формулируются результаты, обобщающие некоторые теоремы из теории тригонометрических рядов (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, гл. XI) относительно сходимости по мере.

Отметим один из приведенных результатов: Если тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

в интервале $(0,\ 2\pi)$ сходится по мере к нулю вместе с рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a_{pn-h}\cos(pn-h)x+b_{pn-h}\sin(pn-h)x+$$

$$+a_{pn+h}\cos(pn+h)x+b_{pn+h}\sin(pn+h)x]$$

при любом натуральном p и при всяком $h<E(p/2)$, то все его коэффициенты равны нулю. Э. Апарисио

4632. Одна теорема о суммировании рядов Фурье—Стилтьеса. Кьоу (A theorem on summability of Fourier—Stieltjes series. Keogh F. R.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 4, 507—510 (англ.)

Через $h(x)$ обозначается непрерывная при $x\geqslant 0$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\sum\max_{e^n\leqslant t\leqslant e^{n+1}}|th(t)|<\infty,\quad \int_0^\infty h(t)\,dt=1.$$

Через $g(x)$ обозначается функция типа $h(x)$, удовлетворяющая для всех действительных x дополнительному условию:

$$\int_0^\infty g(t)\,t^{-ix}dt\neq 0.$$

Через $g^*(x)$ обозначается монотонно убывающая и стремящаяся к нулю функция типа $g(x)$.

Рассматривается ряд Фурье—Стилтьеса

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \qquad (1)$$

функции $F(x)$, имеющей ограниченную вариацию на $(-\pi,\ \pi)$ и определенной при всех t условием $F(t+2\pi)-F(t)=F(2\pi)-F(0)$. Положим

$$\varphi(\theta,\ t)=\frac{1}{2}\{F(\theta+t)-F(\theta-t)\},$$

$$\varphi_\alpha(\theta,\ t)=\frac{\alpha}{t}\int_0^t\left(1-\frac{u}{t}\right)^{\alpha-1}d\varphi(\theta,\ u),\quad \alpha>0.$$

По определению, ряд (1) суммируется методом (h) к s в точке θ, если

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^\pi h\left(\frac{t}{x}\right)d\varphi(\theta,\ t)=s.$$

Доказывается, что если для данного θ

$$\int_t^{et}\frac{|\,d\varphi(\theta,\ u)\,|}{u}=O(1),\quad t\to 0, \qquad (A)$$

то суммируемость ряда (1) каким-нибудь методом (g) означает суммируемость его всеми методами (h) (это — тауберовская теорема Винера); достаточным условием для суммируемости (h) будет $\varphi_\alpha(\theta,\ t)\to s$ при $t\to 0$ для некоторого $\alpha>0$; необходимым условием суммируемости (g) будет $\varphi_\alpha(\theta,\ t)\to s$ для всех $\alpha>0$. Эти предложения остаются справедливыми, если (g) заменить на (g^*) и вместо (A) потребовать, чтобы $F(t)$ возрастала в окрестности точки $t=\theta$ (условие A^*).

В качестве следствий получается, что при условии (A) все методы (g) эквивалентны, а при условии (A^*) все методы (g^*) эквивалентны; всяким мето-

дом (h) ряд (1) суммируется почти всюду; при каждом из условий (A) или (A^*) суммируемость ряда (1) методом (C, α), $\alpha > 0$, и суммируемость методом Абеля эквивалентны (для случая A^* этот результат был опубликован автором ранее). А. А. Шнейдер

4633. Обобщение некоторых результатов Харди, Литлвуда (в подл. Литтльвуда) и Зигмунда о дробном дифференцировании и интегрировании периодических функций. Огиевецкий И. И., Укр. матем. ж., 1957, 9, № 2, 205—210 (рез. англ.)

Доказаны следующие теоремы, устанавливающие связь между порядком убывания наилучшего приближения тригонометрическими полиномами производной $f^{\alpha}(x)$ и интеграла $f_{\alpha}(x)$ дробного порядка (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, 221—225) и порядком убывания наилучшего приближения самой функции $f(x)$.

1. Если $E_n f(x) = O(n^{-\alpha})$ при некотором $\alpha > 0$, то при любом $\gamma < \alpha$ существует $f^{\gamma}(x)$ и $E_n f^{\gamma}(x) = O(n^{-(\alpha-\gamma)})$.

2. Если $E_n f(x) = O(n^{-\alpha})$, то $E_n f_{\gamma}(x) = O(n^{-(\alpha+\gamma)})$.

3. Для того чтобы периодическая функция $f(x)$ обладала производной $f^{\beta}(x)$, удовлетворяющей условию

$$|f^{\beta}(x+h) + f^{\beta}(x-h) - 2f^{\beta}(x)| = O(h),$$

необходимо и достаточно условие $E_n f(x) = O\left(n^{-(\beta+1)}\right)$.

Следствием этих теорем является теорема 4, устанавливающая структурные свойства функции $[f_{\gamma}(x)]^{\delta}$ или $[f^{\gamma}(x)]_{\delta}$, когда известны свойства функции $f^{\beta}(x)$. Например, из условия $f^{\beta}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, следует, что $[f_{\gamma}(x)]^{\delta} \in \mathrm{Lip}\,(\alpha+\beta+\gamma-\delta)$, если $0 < \alpha+\beta+\gamma-\delta < 1$. Из теоремы 4 при частных значениях α, β, γ и δ получаются известные результаты Харди, Литлвуда и Зигмунда.

Опечатка: на стр. 208, строка 4 сверху, вместо $B(\gamma)$ должно быть $B(\gamma) \cdot c$. Ф. И. Харшиладзе

4634. Некоторые теоремы о рядах, сопряженных к рядам Фурье функций многих переменных. Манарези (Alcuni teoremi sulle serie coniugate della serie di Fourier di una funzione di più variabili. Manaresi Fabio), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1957, 27, 181—192 (итал.)

Устанавливается, что если периодическая периода 2π по каждой из переменных функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^{2\pi} |f(x, y)|\,dx \leqslant L, \quad \int_0^{2\pi} |f(x, y)|\,dy \leqslant L$$

и в некоторой точке (x_0, y_0)

$$\lim_{u, v \to +0} \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v |f(x_0+t, y_0+\theta) - f(x_0-t, y_0+\theta) - f(x_0+t, y_0-\theta) + f(x_0-t, y_0-\theta) - \varphi(x_0, y_0)|\,dt\,d\theta = 0,$$

то

$$\lim_{m, n \to \infty} \left(\sigma^{(1)}_{2m, 2n} - \sigma^{(1)}_{2m, n} - \sigma^{(1)}_{m, 2n} + \sigma^{(1)}_{m, n}\right) = \left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^2 \varphi(x_0, y_0),$$

$$\lim_{m, n \to \infty} \left(\sigma^{(2)}_{2m, n} - \sigma^{(2)}_{m, n}\right) = \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\pi} \varphi(x_0, y_0),$$

где $\sigma^{(1)}_{m, n}$ означает арифметические средние для ряда

$$\sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} (A_{mn} \sin mx_0 \sin ny_0 - B_{mn} \cos mx_0 \sin ny_0 - C_{mn} \sin mx_0 \cos ny_0 + D_{mn} \cos mx_0 \cos ny_0),$$

а $\sigma^{(2)}_{m, n}$ имеют тот же смысл для ряда

$$\sum_1^{\infty} \sum_0^{\infty} \lambda_{m, n} (-A_{mn} \sin mx_0 \cos ny_0 + B_{mn} \cos mx_0 \cos ny_0 - C_{mn} \sin mx_0 \sin ny_0 + D_{mn} \cos mx_0 \sin ny_0),$$

$\lambda_{m, n} = 1/2$ при $n = 0$, $m \geqslant 1$ и $\lambda_{m, n} = 1$ при $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$; $A_{m, n}$, $B_{m, n}$, $C_{m, n}$, $D_{m, n}$ суть коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$. Указываются аналоги этих утверждений и для функций многих переменных. М. Ф. Тиман

4635. Суммирование двойных рядов Фурье методом логарифмических средних. Бендукидзе А. Д., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 4 (52), 15—20

Пусть $f(x, y)$ — суммируемая, 2π-периодическая относительно x и y функция, а s_{ik} — частные суммы ее ряда Фурье. Устанавливается, что в каждой точке (x, y), удовлетворяющей условиям:

$$1)\ \lim_{t, \tau \to 0} \frac{1}{t\tau} \int_0^t \int_0^{\tau} |A(x, y; \pm\alpha, \pm\beta)|\,d\alpha\,d\beta = 0,$$

$$2)\ \sup_{0 < t \leqslant \pi} \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^{\pi} |A(x, y; \pm\alpha, \pm\beta)|\,d\alpha\,d\beta = M(x, y) < \infty,$$

$$3)\ \sup_{0 < \tau \leqslant \pi} \frac{1}{\tau} \int_0^{\pi} \int_0^{\tau} |A(x, y; \pm\alpha, \pm\beta)|\,d\alpha\,d\beta = N(x, y) < \infty,$$

где $A(x, y; \pm\alpha, \pm\beta) = f(x \pm \alpha, y \pm \beta) - f(x, y)$, ряд Фурье функции $f(x, y)$ суммируем методом логарифмических средних, т. е.

$$\lim_{m, n \to \infty} \tau_{mn}[f; x, y] = f(x, y),$$

где

$$\tau_{mn}[f; x, y] = \frac{1}{\ln(m+1)\ln(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{s_{ik}(x, y)}{(i+1)(k+1)}.$$

И. В. Матвеев

4636. Дробные интегралы периодических функций многих переменных и аппроксимация тригонометрическими полиномами. Чэн Минь-дэ, Чэнь Юнь-хэ (Cheng Min-teh, Chen Yung-ho), Бэйцзин дасюэ сюэбао. Цзыжань кэсюэ, Acta scient. natur., Univ. pekinensis, 1957, 3, № 3, 259—282 (кит.; рез. англ.)

Для непрерывных периода 1 по каждой переменной функций $f(x_1, \ldots, x_m) = f(P)$, для которых $\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_m)\,dx_1 \ldots dx_m = 0$, дробный интеграл порядка α ($\alpha \geqslant 0$) определяется следующим образом:

$$I^*_{\alpha}[f(P)] = \lim_{R \to \infty} \sum_{\nu \leqslant R^2} \left(1 - \frac{\nu}{R^2}\right)^{\left[\frac{m-1}{2}\right]+1} \frac{A_{\nu}(P)}{(2\pi)^{\alpha} \nu^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}},$$

где

$$A_\nu(P)=\sum_{n_1^2+\ldots+n_m^2=\nu} C_{n_1,\ldots,n_m} e^{2\pi i(n_1x_1+\ldots+n_mx_m)},$$

$C_{n_1,\ldots,n_m}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x_1,\ldots,x_m)$. Вводится также понятие оператора Лапласа дробного порядка β с помощью соотношения:

$$\Delta^\beta f(P)=\Delta I^*_{2-2\beta}[f(P)],$$

при условии, что выражение справа имеет смысл (Δ — оператор Лапласа).

Указываются некоторые свойства функций $I^*_\alpha[f(P)]$, $\Delta^\beta f(P)$, среди которых:

Теорема 1. $I^*_\alpha[f(P)]$ существует для любого $\alpha\geqslant 0$ и при $0<\alpha<1$ совпадает с дробным интегралом для функции $f(P)$, введенным М. Риссом (Riesz M., Acta math., 1949, 81, 1—223).

Теорема 3. Если $f(x,y)=I^*_{2\beta}[g(x,y)]$ и $\int_0^a \rho^{-1}\omega(\rho,g)\,d\rho<\infty$ $(a>0)$, где

$$\omega(\rho,g)=\max_{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\leqslant\rho^2}|g(x_2,y_2)-g(x_1,y_1)|,$$

то $\Delta^\beta f(x,y)$ существует и $\Delta^\beta f(x,y)=g(x,y)$.

Теорема 4. Если $\Delta^\beta f(x,y)=g(x,y)$ существует и непрерывна, то $I^*_{2\beta}[g(x,y)]=f(x,y)$.

Для непрерывных периодических периода 2π по каждой из переменных функций $f(x,y)$ устанавливается:

Теорема 9. Если $f(x,y)$ и $\Delta^\beta f(x,y)=g(x,y)$ непрерывны и $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dxdy=0$, то при $0<\beta<1/2$ для $k>2$, $\delta>9/2$, а при $1/2\leqslant\beta<1$ для $k>2$, $\delta>13/2$, равномерно относительно (x,y) справедливо соотношение:

$$f(x,y)-S_R^{\delta,k}(x,y;f)=O\left\{R^{-2\beta}\omega\left(\frac{1}{R},g\right)\right\},$$

где $S_R^{\delta,k}(x,y;f)=\sum_{\nu\leqslant R^2}\left(1-\frac{\nu^{k/2}}{R^k}\right)^\delta A_\nu(x,y)$.

Приводится ряд следствий из этой теоремы.

М. Ф. Тиман

4637. О существовании ортонормированного базиса в классе полиномов. Шайдуков К. М., Научн. Тр. Казанск. ин-та инж.-строит. нефт. пром-сти, 1957, вып. 5, 119—151

В пространстве непрерывных функций $C_{\langle 0,1\rangle}$ строится ортонормированный базис из полиномов. С этой целью на основании теоремы М. Г. Крейна, Д. П. Мильмана и М. А. Рутмана (Зап. Харьковск. матем. т-ва, 1940. 16, 106—110) строится базис из полиномов, путем сдвижки в базисе типа Шаудера, состоящем, кроме x и $1-x$, из функций, графики которых являются ломаными линиями с двумя вершинами в концах отрезка $0\leqslant x\leqslant 1$ и тремя вершинами равнобедренного треугольника, основанием которого служит отрезок

$$(i-1)2^{-k}\leqslant x\leqslant i2^{-k}\quad (i=1,2,3,\ldots,2^k;$$
$$k=1,2,3,\ldots).$$

Этот базис из полиномов оказывается возможным выбрать так, чтобы после ортогонализации по Шмидту снова получился базис.

В доказательстве используется, между прочим, известный критерий базиса для ортонормальной и замкнутой системы функций $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ в $C_{\langle 0,1\rangle}$:

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^n y_k(x)\,y_k(t)\right|dx\leqslant K\ (0\leqslant t\leqslant 1),$$

где K не зависит от n. Используются некоторые специальные оценки интегралов, вводимые автором.

Д. П. Мильман

4638. Обобщение нормальных рядов С. Н. Бернштейна. Лу Цзянь-кэ (Lu Chien-ke), Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 3, 462—467 (кит.)

В заметке нормальный ряд С. Н. Бернштейна обобщается на двумерный случай. Сначала показывается, что любой полином

$$P(x,y)=\sum_{i=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{n_1}a_{ij}x^iy^j$$

единственным образом представляется в нормальном виде

$$P(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}A_{ij}x^i(1-x)^{m-i}y^j(1-y)^{n-j},$$

где $m\geqslant m_1$, $n\geqslant n_1$,

$$A_{ks}=\sum_{r=0}^{k}\sum_{p=0}^{s}C_{m-r}^{k-r}C_{n-p}^{s-p}a_{rp},$$

а C_β^α — биномиальные коэффициенты. Дается оценка для коэффициента A_{ij}, аналогичная соответствующей одномерной оценке С. Н. Бернштейна, и формулируется теорема о равномерной сходимости полиномов Бернштейна от двух переменных для непрерывной функции $f(x,y)$ (эта теорема известна. *Ред.*)

Полученные результаты можно обобщить на многомерный случай.

Сунь Юн-шен

См. также: 4588, 4832

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

4639. Метод для определения экстремального значения модуля комплексной величины. Бойленд (A method of determining the extremum modulus of a complex quantity. Boyland H. J.), Bull. Electr. Engng Educ., 1957, № 18, 46—50 (англ.)

Отмечается, что для определения экстремальных значений (нулей производных) модуля и аргумента комплексной функции $z(t)=x(t)+iy(t)$ (t — действительная переменная), $\frac{d|z|}{dt}\Big/|z|$ и $\frac{d\operatorname{Arg} z}{dt}$ могут быть найдены как действительная и мнимая части выражения $\frac{1}{z}\frac{dz}{dt}$. Это положение иллюстрируется двумя примерами.

Ш. И. Стрелиц

4640. О теореме Морера. Спрингер (On Morera's theorem. Springer George), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 5, 323—331 (англ.)

Доказывается следующее утверждение: Если $f(z)$ — суммируемая в области R функция и

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

для каждой окружности C достаточно малого радиуса, то $f(z)$ почти всюду в R равна функции, голоморфной в этой области.

Примечание референта: Автору, по-видимому, неизвестна одноименная статья В. С. Федорова (Матем. сб., 1933, 40, № 2, 168—179), в которой тем же методом интегральных средних, с несущественными изменениями, доказывается гораздо более общее утверждение. Ю. Ю. Трохимчук

4641. Кольца функций на окружности. Уэрмер (Function rings on the circle. Wermer J.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 1, 173—175 (англ.)

Пусть C — нормированное кольцо всех непрерывных комплекснозначных функций на окружности S_0: $|z|=1$; A — подкольцо C с двумя образующими $\varphi(z)$ и $f(z)$, разделяющими окружность, $\bar{A}$ — его замыкание. Ставится вопрос, когда $\bar{A} \neq C$? В двух заметках (РЖМат, 1955, 2294, 4548) Уэрмер нашел необходимые и достаточные условия для несовпадения $\bar{A}$ с C для колец, у которых одна из образующих z или z^2 (Референтом получен аналогичный результат для случая, когда одна из образующих есть z^n (РЖМат, 1958, 2852)).

В реферируемой работе Уэрмер рассматривает кольца с образующими, удовлетворяющими условиям: а) φ и f аналитичны в некотором кольце, содержащем S_0, б) $\varphi' \neq 0$ на S_0.

Кольцо A типа R, если существует гомеоморфизм χ окружности S_0 на замкнутую простую кривую $\tilde{\gamma}$, лежащую на римановой поверхности $\tilde{F}$; при этом (I) $\tilde{\gamma}$ ограничивает область $\tilde{D} \subset \tilde{F}$ так, что $\tilde{D} \cup \tilde{\gamma}$ — компакт; (II) для любой $g \in A$ $g(\chi^{-1}z)$ может быть продолжена так, что становится непрерывной в $\tilde{D} \cup \tilde{\gamma}$ и аналитической в $\tilde{D}$.

Доказывается теорема: Если выполнены гипотезы а) и б), то $\bar{A} \neq C$ только, если A типа R.

Л. А. Маркушевич

4642. О спектре систем вида $\{z^n + \lambda f_n(z)\}$. Казьмин Ю. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 155—158

Доказывается, что система

$$\left\{ z^n + \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} z^n \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$

образует квазистепенной базис (РЖМат, 1957, 6356) в любом круге $|z| < r$ $(1 < r \leqslant R)$, если

1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{q_k} \leqslant \frac{1}{R}$, $R > 1$, $q_k = \sup\limits_{0\leqslant n<\infty} |a_{kn}|$,

2) определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a_{00} & a_{01} \ldots \\ a_{10} & 1+a_{11} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} \neq 0$

и абсолютно сходится. Устанавливается также, что если вместе с условием 1) выполняется условие

1*) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p_n} \leqslant \frac{1}{\rho}$ $(\rho > 1)$, $p_n = \sup\limits_{0\leqslant k<\infty} |a_{kn}|$,

то система (1) является базисом в любом круге $|z| < r$, $\frac{1}{\rho} < r \leqslant R$. Эти результаты содержат в себе, как частный случай, некоторые результаты Кетчум (Ketchum P. W., Duke Math. J., 1938, 4, № 4, 668—677) и референта (РЖМат, 1954, 3295).

Автор называет спектром системы

$$\{z^n + \lambda f_n(z)\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

(где функции $f_n(z)$ удовлетворяют условиям 1) и 1*)) совокупность всех значений λ, для которых эта система не является базисом в круге $|z| < r$, $\frac{1}{\rho} < r \leqslant R$. Спектр системы (2) совпадает с множеством нулей функции

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda a_{00} & \lambda a_{01} \ldots \\ \lambda a_{10} & 1+\lambda a_{11} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Доказывается, что $\Delta(\lambda)$ является целой функцией порядка нуль.

В доказательствах используются теория бесконечных систем линейных уравнений и матричный метод М. Г. Хапланова решения вопросов полноты и базиса.

С. А. Еремин

4643. Единичные функциональные столбцы. Эрве (Einheitsfunktionenspalten. Erwe Friedhelm), Monatsh. Math., 1957, 61, № 3, 173—194 (нем.)

Автор продолжает изучение ограниченных систем функций (РЖМат, 1954, 3305, 4404). Система функций $f_1(z), \ldots, f_n(z)$, как и раньше, записывается в виде матрицы

$$\mathfrak{f}(z) \equiv \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix},$$

которую называют «n-членным функциональным столбцом». Этот столбец называется голоморфным (соответственно: мероморфным, непрерывным, постоянным) в $|z| < 1$, если его члены $f_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ голоморфны (соответственно: мероморфны, непрерывны, постоянны) в этом круге. Его абсолютное значение $|\mathfrak{f}(z)|$ определяется равенством

$$|\mathfrak{f}(z)|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(z)|^2 = \widetilde{\mathfrak{f}(z)}\,\mathfrak{f}(z).$$

Функциональный столбец $\mathfrak{f}(z)$ называется унимодулярным ограниченным (коротко-ограниченным), если $\mathfrak{f}(z)$ голоморфен в $|z| < 1$ и $|\mathfrak{f}(z)| \leqslant 1$ (знак равенства здесь возможен только тогда, когда $\mathfrak{f}(z)$ есть константа). $\mathfrak{f}(z)$ называется единичным функциональным столбцом (е.ф.с.), если он голоморфен в $|z| < 1$ и имеет всюду граничные значения, равные 1, т. е. когда $|\mathfrak{f}(z)| \to 1$ при $|z| \to 1$. Каждый е.ф.с. является ограниченным. Множество всех е.ф.с. с n членами обозначают через $\mathfrak{E}^n$ и рассматривают его подклассы:

$\mathfrak{E}^n_{st}$ — множество е.ф.с. из $\mathfrak{E}^n$, непрерывных в $|z| \leqslant 1$,

$\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{h}}$ — множество е.ф.с. из $\mathfrak{E}^n$, голоморфных в $|z| \leqslant 1$,

$\mathfrak{E}^n_{r}$ — множество е.ф.с. из $\mathfrak{E}^n$, мероморфных во всей замкнутой плоскости (следовательно, рациональных).

В работе исследуются следующие вопросы:

1. Вопрос об эквивалентности. Через $\mathfrak{H}^n$ обозначим множество n-членных функциональных столбцов голоморфных в $|z| < 1$ и непрерывных в $|z| \leqslant 1$, абсолютные значения которых отличны от нуля на $|z| = 1$. Два функциональных столбца $\mathfrak{f}(z)$, $\mathfrak{g}(z) \in \mathfrak{H}^n$

называются эквивалентными, если существует отличная в $|z|<1$ от нуля функция $a(z)$, для которой $g(z)=a(z)f(z)$ в $|z|\leqslant 1$. Рассматривается проблема, какие условия должны быть наложены на $f(z)\in\mathfrak{S}^n$ для того, чтобы эквивалентный к $f(z)$ е.ф.с., который всегда существует и в существенном определен однозначно (теорема 1), принадлежал к одному из исследуемых классов? Для классов $\mathfrak{E}^n$, $\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{r}}$ решение поставленной проблемы дается в теоремах 1, 3, 6. Для класса $\mathfrak{E}^n_{st}$ решения не получено.

2. Вопрос о возможности дополнения $n-1$ функций $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$ до е.ф.с. исследуемого класса путем добавления других функций.

Частичный ответ был дан указанием достаточного условия $|f_2(z)|^2+\ldots+|f_n(z)|^2<1$ для $\mathfrak{E}^n$ и $\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{h}}$. Открытым остался вопрос о возможности ослабления этого условия и заменой его условием $|f_2(z)|^2+\ldots+|f_n(z)|^2\leqslant 1$. Для класса $\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{r}}$ это оказывается возможным (теорема 8).

3. Вопрос о различии изучаемых классов. При $n=1$ каждый из этих классов совпадает с $\mathfrak{E}^n$, а при $n>1$ они все отличны друг от друга и от $\mathfrak{E}^n$.

Последняя часть работы посвящена ортонормальным системам функциональных столбцов. А. В. Лебедев

4644. Конформное отображение одного специального эллипса на единичный круг. Островский (Conformal mapping of a special ellipse on the unit circle. Ostrowski A. M.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1955, № 42, 1—2 (англ.)

Известная точная формула для функции, конформно отображающей круг $|z|<1$ на внутренность эллипса $\zeta=a\cos\varphi+ib\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, используется для вычисления в случае $a=1$, 2; $b=1$ координат точек эллипса, соответствующих при отображении точкам $z_\nu=\exp i\frac{\nu\pi}{40}$, $\nu=0$, 1, ..., 20. Автор отмечает, что цель работы — оценить на примере точность некоторых приближенных методов конформного отображения. П. П. Куфарев

4645. О конформных отображениях спиральных областей. Гальперин И. М., Тр. Киевск. автомоб.-дор. ин-та, 1957, сб. 3, 177—187

Автором рассматривается класс S^θ «спиральных» функций $f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$, регулярных, однолистных в $|z|<1$, отображающих $|z|<1$ на области, которые содержат вместе с каждой своей точкой $e^{\varphi_0 i}$ также дугу логарифмической спирали $\operatorname{Im}(e^{-i\theta}\ln w)=\varphi_0\cos\theta$; $\varphi_0=\text{const}$; $\theta=\text{const}$; $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, «соединяющую» эту точку с точкой $w=0$.

В настоящей работе автор вновь доказывает структурную формулу этого класса, полученную ранее В. А. Зморовичем. Кроме того, получены:

1. Необходимые и достаточные условия относительно коэффициентов a_2, a_3, ... для принадлежности функции $f(z)$ классу S^0.

2. Точные оценки $|a_2|$, $|a_3|$, $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$, $\arg\frac{f(z)}{z}$ и некоторых других величин при $f(z)\in S^0$.

Библ. 11 назв. Ю. Д. Максимов

4646. О конформном отображении однолистных областей. Хейнхольд (Zur konformen Abbildung schlichter Gebiete. Heinhold J.), Math. Z., 1957, 67, № 2, 133—138 (нем.)

Определяются некоторые общие достаточные условия для функционалов, с помощью задачи о максимуме которых могут доказываться теоремы существования теории конформных отображений.

Пусть F — семейство функций $f(z)$, регулярных и однолистных в заданной n-связной области G, нормированное тем или иным обеспечивающим нормальность и компактность F условием (B), причем $f=\text{const}\notin F$, $f=z\in F$ (например, для $n=2$, условием, что $f(G)$ принадлежит фиксированному кольцу); $\mathfrak{N}$ — некоторые «нормальные» области (например, круг с концентрическими разрезами). Пусть, далее, определенный на F ограниченный функционал $L(f)$ обладает свойством: если $w=f(z)\in F$ отображает G на область не типа $\mathfrak{N}$, то можно указать регулярную функцию $\varphi(w)$ такую, что $\varphi(f(z))\in F$ и $|L(\varphi(f))|>|L(f)|$.

Доказывается обычным способом, что существует функция $f^*(z)\in F$, для которой $|L(f(z))|$ принимает максимальное на F значение, и эта функция отображает G на область типа $\mathfrak{N}$; устанавливается также применимость известного способа Кебе («Schmiegungsverfahren») аппроксимации отображающих функций. В § 2 приведены (известные) примеры.

П. П. Куфарев

4647. Теоретико-функциональные инварианты для вершин четного порядка. Ункельбах (Die funktionentheoretischen Invarianten für Ecken gerader Ordnung. Unkelbach Helmut), Math. Ann., 1957, 133, № 4, 320—327 (нем.)

Автор продолжает изучение введенных им ранее (РЖМат, 1957, 1321) обобщенных круговых многоугольников. Для вершины четного порядка k и первого рода таких многоугольников, определенной в упомянутой работе, автором в последующем (реф. 4648) был дан способ определения величины $\pi\alpha_k$ угла, соответствующего этой вершине.

Пусть функция $z=f(\zeta)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость ζ-плоскости на обобщенный круговой многоугольник и одна из таких вершин переходит в точку $\zeta=0$. Для дифференциального инварианта Шварца $\{z,\zeta\}$ в окрестности $\zeta=0$ имеет место разложение (с вещественными коэффициентами):

$$\{z,\zeta\}=-\frac{a_k}{\zeta^k}+\frac{a_{k-1}}{\zeta^{k-1}}+\ldots+\frac{a_1}{\zeta}+\\+\sum_{\nu=0}^{\infty}{}^{\circ}a_\nu\zeta^\nu\ (a_k>0).$$

Доказывается соотношение

$$\alpha_k=\frac{(-1)^m\sqrt{2}}{N\cdot\sqrt{a_k^{k-3}}}\sum c_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{m-1}}a_{\nu_1}a_{\nu_2}\ldots\\\ldots a_{\nu_{m-1}}\ (m=k/2),$$

которое справедливо для четных $k\geqslant 4$; сумма берется по всем ν_1, ν_2, ..., ν_{m-1}, удовлетворяющим равенству $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{m-1}=(m-1)\ (k-1)$; $c_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{m-1}}$ некоторые целые положительные числа;

$$N=2^{\frac{3}{2}m-2}\left(\frac{m-2}{2}\right)!\ \text{для четных } m,$$

$$N=2^{\frac{3}{2}(m-1)}\left(\frac{m-1}{2}\right)!\ \text{для нечетных } m\geqslant 3.$$

В частности, для $k=4$, 6, 8 и 10 будем иметь

$$a_4=\frac{\sqrt{2}\,a_3}{2\sqrt{a_4}},\qquad a_6=-\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{a_6^3}}\left(a_5^2+4a_4a_6\right),$$

$$a_8=\frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{a_8^5}}\left(a_7^3+4a_6a_7a_8+8a_5a_8^2\right),$$

$$a_{10}=-\frac{\sqrt{2}}{2^7\sqrt{a_{10}^7}}\left(5a_9^4+16a_8^2a_{10}^2+24a_8a_9^2a_{10}+\right.$$

$$\left.+32a_7a_9a_{10}^2+64a_6a_{10}^3\right).$$

С. А. Гельфер

4648. Геометрия и конформное отображение обобщенных круговых многоугольников. II. Ункельбах (Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone. II. Unkelbach Helmut), Math. Ann., 1955, **130**, № 4, 327—336 (нем.)

Изучается вопрос об определении углов при вершинах обобщенного кругового многоугольника, понятие которого введено автором в I части (РЖМат, 1957, 1321). Функция $z=f(\zeta)$, отображающая верхнюю полуплоскость ζ-плоскости на обобщенный круговой многоугольник, удовлетворяет дифференциальному уравнению $\{z,\zeta\}=R(\zeta)$, где $\{z,\zeta\}$ — дифференциальный параметр Шварца, а $R(\zeta)$ — рациональная функция от ζ. Автор устанавливает соотношения между величиной угла при вершине этого многоугольника и коэффициентами разложения функции $R(\zeta)$ в окрестности точки, соответствующей этой вершине. Показывается также, что входящие в эти соотношения выражения остаются инвариантными по отношению к преобразованиям, связывающим конгруэнтные вершины. С. А. Гельфер

4649. Об однолистных функциях (II). Кэлугэряну (Despre funcţiile univalente (II). Călugăreanu G.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. R. P. R. Fil. Cluj, Ser. 1, 1954, 5, № 3—4, 15—26 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор устанавливает необходимые и достаточные условия для однолистности функции

$$Z=f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{a_n}{z^n},\quad a_{-1}=1;\ a_0=0, \tag{1}$$

голоморфной в $|z|>1$. Он использует геометрические соображения, на которых основывается вывод теоремы площадей и необходимых условий однолистности, сформулированных Бибербахом: для однолистности функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma_r=f(|z|=r)$, $r>1$, не определяла в конечной плоскости Z область D_r с отрицательной площадью, или чтобы

$$\iint\limits_{D_r}|P(Z)|^2\,dX\,dY>0 \tag{2}$$

для любого полинома $P(Z)$, если использовать теорему приближения аналитических функций посредством полиномов. Выражение (2) является положительно определенной эрмитовой формой от коэффициентов полиномов $P(Z)$ и сопряженных с ними. Отсюда следует бесконечное множество необходимых и достаточных условий для однолистности $f(z)$:

$$(-1)^p\sum_{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_p=-p}^{\infty}\frac{n_1n_2\ldots n_p}{r^{2(n_1+n_2+\ldots+n_p)}}\times$$

$$\times\left|D^{1,\,2\ldots p}_{n_1;\,n_2,\ldots,\,n_p}\right|^2>0,$$

где $D^{1\ldots p}_{n_1\ldots n_p}$ является определителем $\left|B^j_{n_j}\right|$, а

$$B^m_k=\sum_{-1}^{k+1}a_{p_1}\ldots a_{p_m},\quad p_1+\ldots+p_m=k.$$

В частности, получаем: теорему площадей, необходимые условия однолистности Бибербаха, неравенства, как например:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|B^2_n\right|^2\leqslant 2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}n\left|B^3_n\right|^2\leqslant 3+9\left|a_1\right|^2 \text{ и т. д.}$$

Для p нечетного получаются неравенства, состоящие из конечного числа a_n.

Аналогичным образом сформулированы необходимые и достаточные условия, чтобы (1) представляло собой отображение $|z|>1$ на внешнюю часть звездообразной области. C. Andreian

4650. Замечания к эллиптическому случаю отображения односвязных римановых поверхностей. Хейнс (Remarks on the elliptic case of the mapping theorem for simply-connected Riemann surfaces. Heins Maurice), Nagoya Math. J., 1955, 9, oct., 17—20 (англ.)

Для доказательства конформной эквивалентности замкнутой односвязной римановой поверхности расширенной комплексной плоскости достаточно показать, что на такой поверхности существует гармоническая функция u с единственной особенностью вида $\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha}{t}\right]+h(t)$ в некоторой точке (t — локальный параметр, α — постоянная, h — регулярная вблизи данной точки функция). В работе автора (Ann. Math., 1949, **50**, 686—690) было указано, что доказательство существования функции u может быть построено с помощью метода Перрона. В реферируемой работе это проводится подробно. Тем же методом доказывается существование на замкнутых римановых поверхностях абелевых дифференциалов с полюсом порядка $\geqslant 2$ в заданной точке поверхности. Л. И. Волковыский

4651. Обобщенная краевая задача Римана и линейное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение. Крикунов Ю. М., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, **116**, № 4, 3—29

Рассматривается краевая задача типа задачи Римана, состоящая в нахождении кусочно-голоморфной функции по краевому условию на контуре L:

$$\sum_{j=0}^{m}\left[a_j(t)\frac{d^jF^+(t)}{dz^j}+\int_L A_j(t,\,t_1)\frac{d^jF^+(t_1)}{dz^j}dt_1\right]-$$

$$-\sum_{j=0}^{m}\left[b_j(t)\frac{d^jF^-(t)}{dz^j}+\int_L B_j(t,\,t_1)\frac{d^jF^-(t_1)}{dz^j}dt_1\right]=f(t)$$

где $a_j(t)$, $b_j(t)$, $f(t)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем $a_m(t)$ и $b_n(t)$ не обращаются в нуль нигде на L; $A_j(t,\,t_1)$ и $B_j(t,\,t_1)$ — также заданные функции вида

$$A_j(t,\,t_1)=\frac{A^0_j(t,\,t_1)}{|t-t_1|^{\lambda}},\quad B_j(t,\,t_1)=\frac{B^0_j(t,\,t_1)}{|t-t_1|^{\lambda}},$$

где $0 \leqslant \lambda < 1$, а $A_j^0(t, t_1)$ и $B_j^0(t, t_1)$ удовлетворяют условию Гёльдера по t и t_1. Под $\frac{d^j F^+(t)}{dz^j}$ и $\frac{d^j F^-(t)}{dz^j}$ понимаются граничные значения функций $\frac{d^j F^+(z)}{dz^j}$ и $\frac{d^j F^-(z)}{dz^j}$. От искомых функций требуется, чтобы $\frac{d^j F^+(0)}{dz^j} = r_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$, $F^-(\infty) = r_m$, где $r_0, r_1, \ldots, r_m$ — заданные комплексные постоянные.

С помощью интегрального представления искомого решения краевая задача сводится либо к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению, либо непосредственно к уравнению Фредгольма второго рода, что и дает возможность исследовать вопрос о разрешимости и числе решений задачи.

Рассматривается обобщение этой задачи на случай системы «n» пар кусочно-голоморфных функций и на случай разрывных коэффициентов краевого условия.

Опираясь на полученные результаты, автор исследует сингулярное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{j=0}^{p} \alpha_j(t)\,\rho^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{k_j(t,\tau)\,\rho^{(j)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t),$$

где L — замкнутый контур, $\alpha_j(t)$, $k_j(t, \tau)$, $f(t)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, а решение $\rho(t)$ ищется в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям: 1) эти функции имеют производные до M-го порядка включительно, где $M = \max(p, q)$; 2) производные порядка M удовлетворяют условию Гёльдера. В. С. Рогожин

4652. О поведении функции, осуществляющей конформное отображение, на границе области. У Сюэ-моу (O u Šo-mo), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 2, 271—276 (кит.; рез. нем.)

Рассматривается односвязная однолистная область B, ограниченная замкнутой гладкой кривой Жордана Г. Обозначим через $\zeta = \varphi(z)$ функцию, осуществляющую конформное отображение круга $|z| < 1$ на область B, а через $\vartheta(s)$ угол касательной к Г с осью x, выраженный в функции длины дуги s кривой Г. Работа посвящена вопросу о существовании и непрерывности в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ производных функции $\varphi(z)$ в зависимости от дифференциальных свойств функции $\vartheta(s)$.

Если существует непрерывная производная $\vartheta^{(n)}(s)$, модуль непрерывности которой $\omega(\delta, \vartheta^{(n)})$ удовлетворяет условиям $\int_0^c x^{-1}\omega(x; \vartheta^{(n)})\,dx < \infty$, то существует производная $\varphi^{(n+1)}(z)$, непрерывная при $|z| \leqslant 1$, причем

$$\omega(\delta; \varphi^{(n+1)}(e^{i\vartheta})) \leqslant C_1\int_0^{\delta} \frac{1}{x}\,\omega(x; \vartheta^{(n)})\,dx + C_2\delta\int_{\delta}^{c} \frac{1}{x^2}\,\omega(x; \vartheta^{(n)})\,dx + C_3\delta\lg\frac{1}{\delta}.$$

Если функция $\vartheta^{(n-1)}(s)$ абсолютно непрерывна, а $\vartheta^{(n)}(s) \in L_p$, $p > 1$, причем $\int_0^c k^{-1}\omega_p(x; \vartheta^{(n)})\,dx < \infty$, где $\omega_p(\delta; \vartheta^{(n)})$ — интегральный модуль непрерывности в метрике L_p, то функция $\varphi^{(n)}(z)$ непрерывна при $|z| \leqslant 1$, абсолютно непрерывна на границе; функция $\varphi^{(n+1)}(z) \in H_p$, ее граничные значения почти всюду равны $\varphi^{(n+1)}(e^{i\vartheta}) = -ie^{-i\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\varphi^{(n)}(e^{i\vartheta})$ и удовлетворяют условию

$$\omega_p(\delta; \varphi^{(n+1)}(e^{i\vartheta})) \leqslant C_4\int_0^{\delta} \frac{1}{x}\,\omega_p(x; \vartheta^{(n)})\,dx + C_5\delta\int_{\delta}^{c} \frac{1}{x^2}\,\omega_p(x; \vartheta^{(n)})\,dx + C_6\delta^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Я. Л. Геронимус

4653. О ζ-функции Римана. Митрович (Sur la fonction ζ de Riemann. Mitrović Dragisa), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 9, 885—886 (франц.)

Автор показывает, что $|(\zeta^{-1}(s))^{(k)}| < k!/(\sigma - 1)^{k+1}$ для $\sigma > \sigma_k > 1$; $k = 1, 2, 3\ldots$ Для той же полуплоскости законно почленное k-кратное дифференцирование неравенств $|\zeta(s)| < |\sigma(\sigma-1)^{-1}|$ и $|\zeta^{-1}(s)| < |\sigma(\sigma-1)^{-1}|$ (k — любое натуральное). Далее показывается, что для бесконечного числа значений n справедливы неравенства: $A_{2n} > 0$, $A_{2n} < 0$, $A_{2n-1} > 0$, $A_{2n-1} < 0$, где $f(s) = \zeta(s) - (s-1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s-1)^n$. Функция $f(s)$ неограничена в полуплоскости $\sigma > 1$ и $\limsup |f^{(k)}(s)| \leqslant k!/(\sigma-1)^{k+1}$ для $t \to \pm\infty$; $k = 0, 1, \ldots$ Производные $f^{(k)}(s)$ нечетного порядка не могут быть вполне монотонными функциями для $s > 1$.

Н. Г. Чудаков

4654. Об интерполяционных функциях для коэффициентов сходящегося степенного ряда. Аспейтия (Sobre funciones de interpolación para los coeficientes de una serie de potencias convergente. Aspeitia A. G.), Ciencias, 1957, 22, № 2, 245—249 (исп.)

Доказывается, что каковы бы ни были числа a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, служащие коэффициентами степенного ряда радиуса $\rho > 0$, и какова бы ни была функция $\Phi(z)$, голоморфная в угле D (включая стороны и вершину $z = 0$) с биссектрисой $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяющая условиям:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Phi(n)|} > 1/\rho; \quad \Phi(n) \neq 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

всегда можно построить функцию $a(z)$, голоморфную в D и удовлетворяющую условиям

$$a(n) = a_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \text{ и } |a(z)| < M|\Phi(z)|e^{\pi|z|\sin\alpha},$$

где M — постоянная, а $z = \operatorname{Re}^{i\alpha}$.

В качестве примеров рассматриваются случаи, когда $\Phi(z) = \left(\frac{1}{\rho - \eta}\right)^z$ при $0 < \eta < \rho$ и когда $\Phi(z) = e^{-zp}$, $\rho > 1$, $0 < p < 1$. Э. Апарисио

4655. О сходимости последовательности полиномов Дирихле. Леонтьев А. Ф., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 1, 23—26

Исследуется область сходимости полиномов Дирихле

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj}e^{-\lambda_j z} \quad (0 < \lambda_1 < \lambda_2, \ldots) \qquad (1)$$

при условии

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n/\lambda_n = \sigma < \infty. \qquad (2)$$

(В прежних работах автора исследовался случай $\lim_{n\to\infty} n/\lambda_n = \sigma$.)

Доказаны теоремы: 1) Если выполнено условие (2) и последовательность (1) равномерно сходится в круге $|z - z_0| < R$ ($R > \pi\sigma$), то она равномерно сходится в некоторой области G. Эта область должна содержать угол $|\arg[z - (z_0 + \pi\sigma\sqrt{2})]| < \frac{\pi}{4}$ и всякую область $G(\alpha, x_0)$ вида $|y| < e^{\alpha x}$, $x > x_0$ при $0 < \alpha < 1/\sigma$ и достаточно большом x_0. 2) При данном $\sigma > 0$ можно так подобрать числа λ_n и последовательность (1), что она будет равномерно сходиться в круге $|z - z_0| \leqslant R$, $R > \pi\sigma$ и не будет сходиться в области $G(\beta, x_0)$ ни при каких x_0 и $\beta > 1/\sigma$. Доказательство теорем 1) и 2) основано на оценке снизу функции

$$L(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Именно показано, что при условии (2) достаточно малом $\delta > 0$, $|\theta| \leqslant \delta$ и $\theta \neq 0$

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln|L(re^{i\theta})|}{r} > -\sigma \ln\frac{1}{|\theta|},$$

причем для некоторой последовательности $\{\lambda_n\}$ равенство достигается.

Теорема 3. Для того чтобы из сходимости последовательности (1) в круге $|z - z_0| < R$, $R > \pi\sigma$ вытекала ее сходимость в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z > a$, необходимо и достаточно, чтобы величина $-\underline{\lim}_{r\to\infty} |\ln|L(re^{i\theta})||/r$ была ограничена при $\theta \neq 0$.

Б. Я. Левин

4656. О размерности многогранника наилучших приближений в метрике L_1. Хавинсон С. Я., Сб. тр. кафедр высш. матем. и теор. механ. Моск. инж.-строит. ин-та, 1957, № 1, 18—28

Пусть E — некоторое приведенное множество в метрическом пространстве, на котором распределена мера μ, L_1 — пространство суммируемых на E комплекснозначных функций с нормой $\|\omega\| = \int_E |\omega(x)|\, d\mu$; H — подпространство в L_1 из непрерывных функций. Для каждой непрерывной функции $\omega(x)$ рассматривается множество тех функций $\varphi^*(x) \in H$, для которых $\|\omega - \varphi^*\| = \inf_{\varphi\in H} \|\omega - \varphi\|$ (многогранник наилучших приближений функций $\omega(x)$). Приводятся необходимые и достаточные условия того, чтобы для каждой непрерывной функции $\omega(x)$ многогранник наилучших приближений был не более чем k-мерным. Результаты применяются к аппроксимации в метрике L_1 аналитических функций и к аппроксимации вещественных функций на отрезке $[a, b]$. Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — система T (Чебышева), H_φ — натянутое на нее подпространство, $r_{H_\varphi}(C)$ — верхняя грань размерностей многогранников наилучших приближений для всех непрерывных функций, $R = \max_\varphi r_{H_\varphi}(C)$, где max берется по всевозможным системам T. Доказывается теорема: Для того чтобы $R = t$, где t — целое число $0 \leqslant t \leqslant n - 1$, необходимо и достаточно, чтобы множество точек роста меры μ либо состояло из $n - t$ точек, либо из k отрезков и ν точек, где $k + \nu - 1 = t$, $k > 0$.

С. И. Зуховицкий

4657. Аналитические функции и римановы поверхности. Шоке (Fonctions analytiques, et surfaces de Riemann. Choquet Gustave), Enseign. math., 1956, 2, № 1-2, 1—11 (франц.)

Чрезвычайно тщательно вводится понятие аналитического образа, который отождествляется с римановой поверхностью (Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.—Л., 1950, гл. VIII), причем особое внимание уделено строгости доказательств топологических фактов. Терминология отличается от общепринятой. Статья представляет методический интерес.

А. А. Гольдберг

4658. Минимум абсолютных значений регулярных функций конечного порядка в единичном круге. Линден (The minimum modulus of functions regular and of finite order in the unit circle. Linden C. N.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 27, 196—216 (англ.)

Исследуется связь между минимумом $\mu(r, g) = \min_{|z|=r} |g(z)|$ и максимумом $M(r, g) = \max_{|z|=r} |g(z)|$ модуля функции $g(z)$, регулярной в единичном круге.

Наибольшее значение полученные результаты имеют в применении к функциям $g(z)$ конечного порядка

$$\beta = \limsup_{r\to 1} \frac{\ln\ln M(r, g)}{-\ln(1 - r)}.$$

При доказательствах применяется модификация метода, которым Хейман (Hayman W. K., Proc. London Math. Soc., 1952, 3, № 2, 469—512) установил сходные результаты для целых функций.

Пусть $f(z)$ регулярна для $|z| \leqslant 1$. Функция $u(z) = \ln|f(z)|$ выражается в форме разности

$$u(z) = u(z, h) - N(z, h, f), \qquad (1)$$

где $N(z, h, f) = \int_0^h n(z, t, f)\, t^{-1} dt$, и $n(z, t, f)$ — число нулей функции $f(\xi)$ в круге $|z - \xi| \leqslant t$. Каждый из членов правой части (1) оценивается отдельно.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ — функция, регулярная для $|z| \leqslant 1$, $f(0) = 1$, и допустим, что $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$. Тогда каждому $\varepsilon > 0$ соответствует значение $r_0 = r_0(\alpha, \varepsilon) < 1$ такое, что для $|z| = r$ и $h = \delta(1 - r)$, где $0 < \delta < \frac{1}{6}$, мы имеем

$$u(z, h) \geqslant -A(\alpha, \delta)(1 - r)^{-1/\alpha} \times$$

$$\times \left\{\int_0^1 M(t, u^+)(1 - t)^{1/\alpha - 1} dt + M(r_0, u^+)\right\},$$

$$n(z, h, f) \leqslant (1 + 6\delta)(1 - r)^{-1/\alpha} \left\{\frac{1 + \varepsilon}{\alpha\pi}\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{-1/\alpha} \times\right.$$

$$\left. \times \int_0^1 M(t, u^+)(1 - t)^{1/\alpha - 1} dt + M(r_0, u^+)\right\}.$$

Здесь и в дальнейшем через A обозначены положительные константы, зависящие лишь от явно указываемых параметров. Из предыдущей теоремы с помощью ряда лемм устанавливается следующий общий результат, справедливый для функций, регулярных в круге $|z| < 1$.

Теорема 2. Пусть $g(z)$ регулярна для $|z| < 1$, $g(0) = 1$, и допустим, что $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$. Тогда, если $r \leqslant R < 1$, существует множество значений τ меры не

меньшей $\frac{1}{32}R(1-r)$ в интервале $\left\{Rr,\ R\left(r+\frac{1}{16}(1-r)\right)\right\}$ и значение $r_0=r_0(\alpha)<1$ такое, что для $r_0\leqslant r<1$,

$$v(z)=\ln|g(z)|\geqslant-(1-r)^{-1/\alpha}\ \ln\frac{A(\alpha)}{1-r}\times$$
$$\times\left\{\frac{8}{\alpha\pi}\left(R\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{-1/\alpha}\int_0^R M(t,\ v^+)(R-t)^{1/\alpha-1}dt+\right.$$
$$\left.+2M(r_0,\ v^+)\right\}$$

на всякой окружности $|z|=\tau$.

С помощью понятия уточненного порядка роста устанавливается основной результат для функций конечного порядка, большего единицы.

Теорема 3. Пусть $g(z)$ — функция, регулярная и конечного порядка β для $|z|<1$. Тогда, если $\beta>1$, найдется соответствующая константа $K(\beta)$ такая, что

$$-K(\beta)\leqslant\lim_{r\to1}\sup\frac{\ln\mu(r,\ g)}{\ln M(r,g)\ln\ln M(r,g)}\leqslant0.$$

Точность теоремы 3 подтверждается следующим предложением.

Теорема 4. Для каждого конечного значения $\beta(\geqslant1)$ можно указать функцию $\pi(z)$, регулярную и порядка β в $|z|<1$ такую, что

$$\lim_{r\to1}\sup\frac{\ln\mu(r,\ \pi)}{\ln M(r,\pi)\ln\ln M(r,\pi)}<0.$$

Основываясь на своей более ранней работе (РЖМат, 1957, 335), автор показывает, что теорема 3, вообще говоря, неверна для функций порядка, не превосходящего единицы. В качестве примера рассматривается функция

$$g_1(z)=\exp\left(-\frac{1}{1-z}\right)\left(\ln_m\frac{k}{1-z}\right)^\beta,$$

где m — натуральное число, $\beta>-2$, $\ln_m x=\ln(\ln_{m-1}x)$, $\ln_1 x=\ln x$ и k — достаточно большое положительное число.

А. А. Бонами

4659. Пример целой функции конечного порядка с дефектным неасимптотическим значением. Гольдберг А. А., Научн. зап. Ужгородск. ун-та, 1957, 18, 191—194

Хейман (РЖМат, 1955, 702) построил пример целой функции бесконечного порядка с дефектным неасимптотическим значением и указал, что с таким свойством он может построить пример и целой функции достаточно большого конечного порядка. В реферируемой заметке строится простой пример целой функции порядка $\frac{3}{2}$ с дефектным неасимптотическим значением и сообщается, что тем же методом можно построить аналогичный пример целой функции порядка $1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

А. Ф. Леонтьев

4660. О производных целых функций. Сривастав (On the derivatives of integral functions. Srivastav R. P.), Math. Student, 1957, 25, № 1-2, 11—15 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ и нижнего порядка λ, $M(r)=\max|f(z)|$, $M_s=\max|f^{(s)}(z)|$ на $|z|=r$. Получены следующие теоремы: Если для $r\geqslant r_0=r_0(f)>1$, $M(r)$, $M_1(r)$, ... образуют невозрастающую (неубывающую) последовательность, то $\lambda<1$ ($\rho>1$). Это является обращением теорем Боса (Bose S. K., J. Indian Math. Soc., 1946, 10, 77—80) и Шаха (Shah S. M., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 1156—1163): Если $\lambda>1$, то

$$\overline{\lim}\ln\{r^sM_s(r)/M(r)\}/\ln r=\rho s$$

при $r\to\infty$; если $\lambda=\rho$, то в предыдущем равенстве, $\overline{\lim}$ заменяется на $\lim$. В общем случае $\lim\ln\{r^sM_s(r)/M(r)\}/\ln r=\lambda s$.

А. А. Гольдберг

4661. Применение одной теоремы о конформных отображениях к вопросам инвариантности дефектов мероморфных функций. Белинский П. П., Гольдберг А. А., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 3, 263—269

Доказывается следующая теорема: Каковы бы ни были число $\varepsilon>0$ и последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$, $z_n\to\infty$, можно указать такую последовательность положительных чисел $\{\rho_n\}$, зависящую только от ε и $\{z_n\}$, что произвольная функция $w=f(z)$, аналитическая и однолистная вне кругов $|z-z_n|<\rho_n$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, обладает тем свойством, что можно указать такое линейное преобразование L, что $|L(f(z))-z|<\varepsilon$.

Затем строятся примеры мероморфных функций конечного порядка, для которых дефект (по Неванлинна или по Валирону) меняется при сдвиге начала. Вводится изменение в определение этих дефектов, сообщающее им инвариантность относительно сдвига начала в случае функций конечного порядка. Даются условия инвариантности дефектов (Неванлинна, Валирона) при почти конформных преобразованиях плоскости в себя (так называются квазиконформные преобразования плоскости в себя с характеристикой p, удовлетворяющей условию

$$\iint\limits_{R<|z|<\infty}\frac{p-1}{|z|^2}\,d\sigma_z<\infty).$$

Эти условия подкрепляются примерами.

Л. И. Волковыский

4662. Оценка суммы дефектов мероморфной функции порядка меньше единицы. Гольдберг А. А., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 2, 245—248

Пусть $\delta(a)$ — неванлиннов дефект в точке a функции $f(z)$, мероморфной в конечной части плоскости. Известно, что для мероморфных функций нецелого порядка ρ выражение $\delta(a)+\delta(b)$ для всяких $a\neq b$ меньше некоторой постоянной, она меньше 2 и зависит от ρ. Имеются оценки для этой постоянной. Так, для случая $0\leqslant\rho<1$ было показано Шахом (Shah S. M., Math. Student, 1944, 12, 67), что $\delta(a)+\delta(b)\leqslant1+\rho$. В реферируемой заметке приводится (с доказательством) следующая более точная оценка:

$$\delta(a)+\delta(b)\leqslant\begin{cases}1, & 0\leqslant\rho\leqslant1/3\\ 2-2^\rho\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1-\frac{\rho}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1-\rho}{2}\right), & 1/3<\rho<1.\end{cases}$$

А. Ф. Леонтьев

4663. Замечание об одной теореме Бореля. Ахмад (A note on a theorem of Borel. Ahmad Mansoor), Math. Student, 1957, 25, № 1-2, 5—9 (англ.)

Пусть $f(z)$ мероморфна в $z\neq\infty$, l_k — k-я итерация логарифма, $r_m\to\infty$ — некоторая последовательность, $T(r)$ — неванлинновская характеристика $f(z)$. Обозначим $\delta_{k,m}(\alpha)=1-\overline{\lim_{m\to\infty}}\,l_kN(r_m,\alpha)/l_kT(r_m)$, $\rho_k=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,l_kT(r)/\ln r$ — k-ый порядок $f(z)$. Типичные результаты: Если $\delta_{k_1,m}(\alpha)>0$, то $\delta_{k,m}(\alpha)=1$ при $0\leqslant k<k_1$. Если $f(z)$ — функция конечного k-го порядка и бесконечного $(k-1)$-го порядка, то может суще-

ствовать самое большее два значения a, обладающие тем свойством, что для некоторой последовательности $r_m \to \infty$ существуют пределы $\lim l_k n(r_m, a)/\ln r_m$ и $\lim l_k T(r_m)/\ln r_m$ при $m \to \infty$ и первый предел меньше второго. А. А. Гольдберг

4664. О некоторых классах двоякопериодических функций. Эрве (Über gewisse Klassen doppeltperiodischer Funktionen. Erwe Friedhelm), Acta math., 1957, 97, № 3—4, 145—188 (нем.)

Пусть $\mathfrak{M}^0$ — множество всех мероморфных функций, $\mathfrak{M}^n$ — класс функций вида $f(z) = f_0(z) + f_1(z)\,z + \ldots + f_n(z)\,z^n$, где $K_\nu\{f\} = f_\nu(z) \in \mathfrak{M}^0$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, а $\mathfrak{E}^n = \mathfrak{E}^n(\Omega)$ — совокупность всех функций класса $\mathfrak{M}^n$, имеющих множество периодов Ω.

Во 2-м и 3-м параграфах (в статье 7 параграфов, из которых 1-й — введение) пригодятся общие свойства функций классов $\mathfrak{M}^n$ и $\mathfrak{E}^n$. Вот некоторые из них: 1) $\mathfrak{M}^n$ является $n+1$-мерным линейным пространством над полем скаляров $\mathfrak{M}^0$ с минимальным базисом $1, z, z^2 \ldots z^n$, 2) $\mathfrak{E}^n$ является $n+1$-мерным линейным пространством над полем скаляров $\mathfrak{E}^0$, 3) если $f \in \mathfrak{E}^n$, $g \in \mathfrak{E}^n$ и при некотором ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) $K_\nu\{f\} = K_\nu\{g\}$, то $f - g \in \mathfrak{E}^{\nu-1}$ ($\mathfrak{E}^{-1}$ состоит из одной функции $\equiv 0$). 4) Если $f \in \mathfrak{E}^n(\Omega)$, $K_l\{f\} = f_l(z)$ и $w_0, w_1, \ldots, w_n \in \Omega$, то $\overset{\Delta}{{\scriptstyle w_l, w_{l+1} \ldots w_n}} f_l(z) \equiv 0$ $\overset{\Delta}{{\scriptstyle w_l, w_{l+1}, \ldots, w_n}}$ — разделенная разность с шагами $w_l, \ldots, w_n$). В 4-м параграфе рассматривается система разностных уравнений $\overset{\Delta}{{\scriptstyle w_0, w_1, \ldots, w_n}} f(z) = 0$ в случаях: 1) $w_0, w_1, \ldots, w_n$ принимают любые значения $m\omega_1 + n\omega_2$, $\operatorname{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0$, n и m целые; 2) $w_0, w_1, \ldots, w_n$ принимают значения ω_1 и ω_2. В обоих случаях общее мероморфное решение имеет вид: $f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu} u_{\mu\nu} z^\mu \zeta^{\nu-\mu}$, где $u_{\mu,\nu}$ — любые эллиптические функции с периодами ω_1 и ω_2 и $\zeta = \zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса.

В 5-м параграфе изучается двоякопериодическая функция

$$\mathfrak{p}_n(z) = (n+1)\left(\frac{z^n}{z^{n+2}} + \sum{}'\left(\frac{(z-w)^n}{(z-w)^{n+2}} - \frac{w^n}{w^{n+2}}\right)\right),$$

$$w \asymp n\omega_1 + m\omega_2,$$

и функция $\mathfrak{P}_n(z) = K_0\{\mathfrak{p}_n(z)\}$ ($\mathfrak{p}_0(z) = \mathfrak{P}_0(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса). Приводятся некоторые свойства тейлоровских коэффициентов разложения функции $\mathfrak{P}_n(z)$ (по степеням z), с помощью которых в 6-м параграфе (автор считает, что в этом параграфе содержится главный результат работы) устанавливаются следующие два соотношения:

$$\sum_{m_1, m_2}{}' \frac{(m_1 - im_2)^n}{(m_1 + im_2)} 4^r - n = \alpha_{nr}\frac{\omega_1^{4r}}{\pi^n},$$

$$2r \geqslant n+2,\ n \geqslant 0, \qquad (1)$$

$$\sum_{m_1, m_2}{}' \frac{(m_1 + \varepsilon m_2)^n}{(m_1 + \varepsilon m_2)^{6r-n}} = \beta_{nr}\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^n \omega_2^{6r},\ 3r \geqslant n+2,\ n \geqslant 0,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \qquad (2)$$

где $\omega_1 = 2\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^4}}$, $\omega_2 = 2\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^6}}$, n и r — целые числа, а α_{nr} и β_{nr} — рациональные числа; при $0 \leqslant n \leqslant 3$, $\alpha_{nr} > 0$ и $\beta_{nr} > 0$. Автором отмечено, что первое из этих соотношений для случая $n = 0$ получено Гурвицем. (Заметим, что в статье равенства (1) и (2) записаны неточно.)

7-й раздел содержит примеры ограниченных (неравных постоянной) двоякопериодических функций класса $\mathfrak{M}^n$, $n = 1, 2, \ldots$ По мнению автора, не исключена возможность, что ограниченная периодическая функция класса $\mathfrak{M}^n$ обязательно двоякопериодическая.

А. Г. Нафталевич

4665. О римановом соотношении периодов на трансцендентных гиперэллиптических поверхностях. Пфлугер (Über die Riemannsche Periodenrelation auf transzendenten hyperelliptischen Flächen. Pfluger A. von), Comment. math. helv., 1956, **30**, № 2, 98—106 (нем.)

Рассматриваемые римановы поверхности получаются склеиванием двух плоскостей вдоль последовательности отрезков, расположенных на положительной действительной полуоси и накапливающихся на бесконечности. Для двух семейств кривых на такой поверхности R, отделяющих фиксированный кружок от бесконечно удаленной точки, экстремальная длина по крайней мере одного семейства равна нулю. С каждым случаем связывается некоторый канонический базис гомологий $\{(A_k, B_k)\}$ и доказывается, что для любых двух гармонических дифференциалов $\omega_i = a_i dx + b_i dy$ ($i = 1, 2$) с конечной нормой на R всегда можно выбрать последовательность натуральных чисел $\{n_\nu\}$ такую, что

$$(\omega_1, \omega_2) = \int\int_R (a_1 a_2 + b_1 b_2)\,dxdy =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{k=1}^{n_\nu} \left[\omega_1(A_k)\,\omega_2^*(B_k) - \omega_1^*(A_k)\,\omega_2(B_k)\right]$$

($\omega^* = -bdx + ady$ — сопряженный дифференциал к $\omega = adx + bdy$, $\omega(C)$ — период ω вдоль замкнутого контура C). Л. И. Волковыский

4666. О виде пары аналитических функций, из которых одна целая, однолистной в пространстве двух комплексных переменных. Баврин И. И., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, **57**, 33—37

Устанавливается, что если пара аналитических функций $W = W(w, z)$, $Z = Z(w, z)$, из которых одна целая, однолистна в конечной части пространства двух комплексных переменных, то она имеет вид

$$W = az + b, \qquad Z = \frac{\alpha(W)\,w + \beta(W)}{\gamma(W)\,w + \delta(W)} \qquad (1)$$

или вид, получающийся из (1) при перемене местами или переменных w, z или W, Z, или одновременно и w, z и W, Z. Здесь a, b — постоянные, причем $a \neq 0$ и $\alpha(W)$, $\beta(W)$, $\gamma(W)$, $\delta(W)$ — произвольные целые функции, причем

$$\begin{vmatrix} \alpha(W) & \beta(W) \\ \gamma(W) & \delta(W) \end{vmatrix} \neq 0$$ в плоскости W.

Ранее (РЖМат, 1957, 5509) был установлен вид однолистной пары целых функций. А. В. Лебедев

4667. О базисах и полных системах в пространстве аналитических функций двух переменных. Литвинчук Г. С., Хапланов М. Г., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 4, 319—325

Через $A_{R,T}$ обозначается пространство функций, аналитических в $\{|w| < R, |z| < R\}$. Система функций называется полной в бицилиндре $\{|w| < R, |z| < R\}$, если в любой его замкнутой части произвольную функцию $f(w, z) \in A_{R,T}$ можно с любой заданной точ-

ностью приблизить линейными агрегатами из функций этой системы. Система $\{\varphi_{k,l}(w,z)\}$, $\varphi_{k,l}(w,z)\in A_{R,T}$ называется базисом в бицилиндре $\{|w|<R,\ |z|<T\}$, если произвольная функция $f(w,z)\in A_{R,T}$ разлагается в ряд

$$f(w,z)=\sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl}\varphi_{k,l}(w,z), \qquad (1)$$

равномерно сходящийся к $f(w,z)$ в любой замкнутой части этого бицилиндра. Когда для всех $f(w,z)\in A_{R,T}$ можно указать такие числа R_1, T_1, что $\overline{\lim}_{m+n\to\infty}\sqrt[m+n]{|c_{mn}|R_1^m T_1^n}\leqslant 1$, базис $\{\varphi_{k,l}(w,z)\}$ называется квазистепенным. Из (1) приравниванием тейлоровских коэффициентов при одинаковых степенях w, z получается бесконечная система линейных уравнений, матрица которой называется матрицей системы $\{\varphi_{k,l}(w,z)\}$. На функции двух комплексных переменных распространяется ряд общих теорем, доказанных для функций одного комплексного переменного с помощью матричного метода М. Г. Хапланова. Устанавливается, например, что для того чтобы некоторая система функций была квазистепенным базисом в бицилиндре $\{|w|<R,\ |z|<T\}$ с коэффициентами из A_{R_1,T_1}, необходимо и достаточно, чтобы матрица этой системы преобразовывала пространство A_{R_1,T_1} в $A_{R,T}$ и имела единственную обратную матрицу. Доказывается, что справедливы

Теорема 4. Пусть даны

$$f(w,z)=\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}w^k z^l \qquad (2)$$

— аналитическая функция в бицилиндре $\{|z|<r,\ |w|<t\}$; $0<r\leqslant\infty$, $0<t\leqslant\infty$, причем

$$\overline{\lim_{k+l\to\infty}}\sqrt[k+l]{|a_{kl}|r^k t^l}=1$$

и некоторая последовательность точек (ζ_i,η_j) $(i,j=0,1,2,\ldots)$. Чтобы для R и T, $0<R\leqslant\infty$, $0<T\leqslant\infty$ последовательность функций

$$f_{i,j}(w,z)=f(\zeta_i w,\eta_j z) \qquad (3)$$

образовывала полную систему в бицилиндре $\{|z|,<R,\ |w|<R\}$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) все коэффициенты в разложении (2) были отличны от нуля; 2) последовательность (3) была полной в некоторой точке (ζ^*,η^*), лежащей внутри или на границе бицилиндра $\{|w|\leqslant r/R,\ |z|\leqslant t/T\}$.

Теорема 5. Если для системы $\{z^i w^j[1+f_{i,j}(w,z)]\}$ выполняются условия: 1) $f_{i,j}(0,0)=0$ $(i,j=0,1,2,\ldots)$, 2) семейство $\{f_{i,j}(w,z)\}$ имеет мажоранту $f(w,z)$, — то эта система образует квазистепенной базис в любом бицилиндре $\{|z|<R,\ |w|<T\}$, радиусы которого удовлетворяют условию $f(R,T)<1$.

С. А. Еремин

4668. **В теории аналитических многообразий в пространстве n комплексных переменных. (Продолжение аналитических множеств в областях с аналитическими разрезами.)** Ротштейн (Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen. Die Fortsetzung analytischer Mengen in Gebieten mit analytischen Schlitzen. Rothstein Wolfgang), Math. Ann., 1957, 133, № 5, 400—409 (нем.)

Множество M называется F-множеством 1-го рода (относительно ограниченной области G в C^n), если для каждой точки P из G существует окрестность U, конечное множество голоморфных в ней функций $f_1,\ldots,f_l$ и плоские гармонические нуль-множества $E_1,\ldots,E_l$ со свойством: $U\cap M=(f_1-c_1=\ldots=f_l-c_e=0)\cap U$, причем c_λ пробегают E_λ независимо друг от друга.

M называется F-множеством 2-го рода, если M есть объединение конечного числа F-множеств 1-го рода.

Пусть $\varphi_\sigma=|z_\sigma|^2+\alpha\sum_1^n|z_i|^2-\beta$; $(\alpha,\ \beta>0)$, P — некоторая точка на $\varphi_1=\ldots=\varphi_s=0$ и U-окрестность точки P, $U'=U\cap\Pi_\sigma(\varphi_\sigma>0)$. Пусть f — голоморфная в U ограниченная функция, E — плоское гармоническое нуль-множество, и $M=(f-c=0)$, $c\in E$.

Доказываются теоремы:

I. (Локальное продолжение в разрезанную область.) Пусть $\mathfrak{g}^k$ — k-мерное аналитическое в $U'-M$ множество, $k\geqslant s+1$. Тогда: а) существует окрестность $V\subset U$ точки P и в $V-M$ аналитическое множество $\mathfrak{g}^k_*$, которое в $V'=V\cap U'$ совпадает с $\mathfrak{g}^k$; б) если $\mathfrak{g}^k_{**}$ — какое-либо аналитическое в V множество и $\mathfrak{g}^k_*=\mathfrak{g}^k_{**}$ в $V\cap U'$, то $\mathfrak{g}^k_*$ и $\mathfrak{g}^k_{**}$ тождественны во всей окрестности V точки P.

II. (Тождественность аналитических множеств в разрезанной области.) Пусть $\mathfrak{g}^k_1$; $\mathfrak{g}^k_2$ — аналитические множества в $U-M$, и $k\geqslant s$. Пусть $\mathfrak{g}^k_1=\mathfrak{g}^k_2$ в $U'-M$. Тогда существует такая окрестность V точки P, что $\mathfrak{g}^k_1=\mathfrak{g}^k_2$ в $V-M$.

Теорема C. Пусть G — ограниченная область и M — F-множество относительно G. Пусть $\mathfrak{f}^1$ — одномерное аналитическое в $G-M$ множество. Тогда $\mathfrak{f}^1$ имеет на границе области G точки сгущения. Из этих теорем вытекает, что все результаты относительно продолжения множеств в прежних работах автора (РЖМат, 1956, 5818; 1958, 2882) остаются в силе и для областей, из которых удалены F-множества 1-го и 2-го рода.

Е. Н. Аравийская

4669. **Свойства среднего значения гармонических функций, ограниченных в полуплоскости или в прямом угле.** Николеску Мирон, Ж. чистой и прикл. матем. Акад. наук РНР, 1956, **1**, № 2, 41—48

Пусть функция $u(x,y)$ измерима и ограничена в полуплоскости $\Pi_0(y>0)$. Рассматриваются средние вида

$$\mu_0(u;\ h)=\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,\ y-h)}{(\xi-x)^2+h^2}\,d\xi \qquad (0<h<y).$$

Если $u(x,y)$ гармонична в Π_0, то, как известно, в каждой точке этой полуплоскости

$$u(x,y)=\mu_0(u;\ h) \qquad (0<h<y), \qquad (1)$$

т. е. значение u в точке (x,y) равно среднему весовому значению u на любой прямой с ординатой $y_0=y-h$, $0<y_0<y$. Показывается, что если $u(x,y)$ измерима и ограничена в полуплоскости Π_0 и удовлетворяет уравнению (1) для всех $(x,y)\in\Pi_0$ и всех h $(0<h<y)$, то u гармонична в Π_0. Непрерывная и ограниченная в полуплоскости $y>0$ функция $u(x,y)$ называется линейно субгармонической в Π_0, если для всякой точки $(x,y)\in\Pi_0$ и всех h $(0<h<y)$ имеет место

$$u(x,\ y)\leqslant\mu(u;\ h).$$

Теорема 1. Линейно субгармоническая в Π_0 функция не может достигнуть своего максимума во внутренней точке Π_0.

Теорема 2. Если u линейно-субгармонична в Π_0, и в какой-нибудь точке $(x, y) \in \Pi_0$ лишь для одного значения h

$$u(x, y) = \mu_0(u; h),$$

то u гармонична в полуплоскости $y > y_0$ $(y_0 = y_0 - h)$. Сходные рассмотрения делаются для области: $x > 0$, $y > 0$.

Примечание референта. При изучении функций в прямом угле $x > 0$, $y > 0$ автор неточно записывает весовые средние. В действительности эти средние нужно брать в следующем виде:

$$\mu_0(u; h, k) = \frac{k}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{(\xi-h)^2+k^2} - \frac{1}{(\xi+h)+k^2}\right] \times$$

$$\times u(\xi + x - h, y - k)\, d\xi +$$

$$+ \frac{h}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{h^2+(\eta-k)^2} - \frac{1}{h^2+(\eta+k)^2}\right] \times$$

$$\times u(x - h, \eta + y - k)\, d\eta, \qquad (0 < h < x,\ 0 < k < y).$$

А. А. Бонами

4670. Аксиоматическое обобщение субгармонических функций. Брело (Extension axiomatique des fonctions sous-harmoniques. Brelot Marcel), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 20, 1688—1690 (франц.)

Основное пространство Ω предполагается связным и локально компактным. С помощью трех аксиом определяется класс гармонических функций (класс p). При этом одна из аксиом состоит в требовании, чтобы регулярные области образовывали базис. Примером класса p могут служить решения линейного однородного эллиптического уравнения, в котором коэффициент при функции $\leqslant 0$. Затем определяются супер- и субгармонические функции (в терминологии автора, hyperprincipales и hypoprincipales) и методом Перрона, ранее развитым автором, строится верхняя и нижняя функции для краевой задачи. При этом граница L пространства Ω определяется как множество фильтров F, не имеющих точек прикосновения в Ω. Разрешимость задачи (т. е. совпадение верхней и нижней функций) для неотрицательной функции f на L эквивалентна суммируемости f относительно некоторой абстрактной меры $\geqslant 0$ на L (в обычном случае это гармоническая мера). Доказательства не приводятся.

Н. С. Ландкоф

4671. О двумерных интегралах типа Коши. Бицадзе А. В., Сообщ. АН ГрузССР, 1955, 16, № 3, 1—184

Работа является развитием работ автора по пространственному аналогу интеграла типа Коши (РЖМат, 1955, 238, 239), причем вводятся матричные обозначения, позволяющие компактно и изящно формулировать основные результаты теории. Именно, вводятся матрицы

$$D^*(X, Y, Z) \equiv \begin{Vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & 0 & Z & -Y \\ Y & -Z & 0 & X \\ Z & Y & -X & 0 \end{Vmatrix},$$

$$D(X, Y, Z) \equiv \begin{Vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & 0 & -Z & Y \\ Y & Z & 0 & -X \\ Z & -Y & X & 0 \end{Vmatrix}$$

и дифференциальный оператор

$$M(P, Q) \equiv -D^*\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\eta}, \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\frac{1}{\rho} D(\alpha, \beta, \gamma),$$

где $\rho = \rho(P, Q)$ — расстояние между точками $P(x, y, z)$ и $Q(\xi, \eta, \zeta)$, а $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ — вектор внешней нормали в точке Q к поверхности S, ограничивающей трехмерную область Ляпунова D^+.

Вектор $\mathbf{q}(P) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, компоненты которого имеют непрерывные частные производные, называется голоморфным в некоторой области, если там удовлетворяется система уравнений с частными производными

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) q = 0$$

(при $q_1 = 0$ эта система сводится к уравнениям $\operatorname{div}\mathbf{q} = \operatorname{rot}\mathbf{q} = 0$). Для голоморфных в D^+ векторов имеет место аналог теоремы Коши:

$$\int\int_S D(\alpha, \beta, \gamma)\, \mathbf{q}(Q)\, d_Q\omega = 0$$

(и теоремы Морера), а также интегральной формулы Коши:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int_S M(P, Q)\, \mathbf{q}(Q)\, d_Q\omega = \begin{cases} \mathbf{q}(P), & P \in D^+, \\ 0, & P \in D^- \equiv R^3 - \bar{D}^+. \end{cases}$$

Если вектор $\mathbf{q}$ задан лишь на S и удовлетворяет условию Гёльдера, то можно построить голоморфный в D^+ и D^- вектор

$$\mathbf{p}(P) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S M(P, Q)\, \mathbf{q}(Q)\, d_Q\omega,$$

который естественно считать аналогом интеграла типа Коши. Вводя понятие особого интеграла, автор устанавливает аналог формул Сохоцкого

$$\mathbf{p}^+(P_0) - \mathbf{p}^-(P_0) = \mathbf{q}(P_0),$$

$$\mathbf{p}^+(P_0) + \mathbf{p}^-(P_0) = \frac{1}{2\pi}\int\int_S M(P_0, Q)\, \mathbf{q}(Q)\, d_Q\omega$$

$(P_0 \in S)$, а также аналог формулы перестановки Пуанкаре—Бертрана.

Развитую теорию автор применяет для обращения системы особых интегральных уравнений

$$A\varphi(P_0) + \frac{B}{2\pi}\int\int_S M(P_0, Q)\, \varphi(Q)\, d_Q\omega = \mathbf{f}(P_0),$$

где $P_0, Q \in S$, A и B — заданные постоянные матрицы 4-го порядка, $\mathbf{f}$ — заданный и φ — искомый четырехмерные векторы, удовлетворяющие на S условию Гёльдера, а интеграл понимается в смысле главного значения (случай $A \equiv 0$, $B \equiv E$ был рассмотрен автором в предыдущей работе), а также для решения одной задачи теории потенциала в пространстве и пространственного аналога задачи Римана—Гильберта (для полупространства).

Б. В. Шабат

4672. Общая теория трехмерных комплексных функций. III. Нисигаки, Такасу (General three-dimensional complex function theory. III. Nisigaki Hisami, Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1957, 5, № 1, 1—98 (англ.)

Непосредственное продолжение второй части этой работы (РЖМат, 1958, 2886). Строится теория элементарных функций гиперкомплексного переменного $\zeta = x_1 + E_2 x_2 + E_3 x_3$ ($1, E_2, E_3$ — базис ассоциативной и коммутативной алгебры над полем действительных чисел) и теория криволинейных интегралов в трехмерном пространстве вида $\int f(\zeta)\, d\zeta$ для дифференцируемых или только непрерывных гиперкомплексных функций $f(\zeta)$, а также строится теория полигенных трехмерных функций, т. е. функций вида:

$$w = u_1 + E_2 u_2 + E_3 u_3,$$

где u_1, u_2, u_3 — любые действительные функции от x_1, x_2, x_3 с непрерывными частными производными первого, а в некоторых случаях и высших порядков. Для таких функций находится множество значений $dw/d\zeta$ по всевозможным направлениям (в данной точке) и определяются производные различных порядков по площади (секторальные производные) и по объему в данной точке ζ следующими формулами:

$$\frac{dw}{dS} = \lim_{C \to \zeta} \frac{1}{A} \int_C w \cdot (dx + E_2 dy + E_3 dz)$$

$$(x \equiv x_1, \quad y \equiv x_2, \quad z \equiv x_3),$$

$$\frac{d'w}{dS} = \lim_{C \to \zeta} \frac{1}{A} \int_C w \cdot (dy + E_2 dz + E_3 dx),$$

$$\frac{d''w}{dS} = \lim_{C \to \zeta} \frac{1}{A} \int_C w \cdot (dz + E_2 dx + E_3 dy)$$

(первая, вторая и третья производные первого порядка от w по площади);

$$\frac{d^2 w}{dS^2} = \lim_{C \to \zeta} \frac{1}{A} \int_C \frac{dw}{dS} \cdot (dx + E_2 dy + E_3 dz)$$

(первая производная второго порядка от w по площади) и т. д., где C — простая замкнутая достаточно гладкая кривая, ограничивающая поверхность S площади A. Аналогично определяются производные от w по объему в данной точке ζ. Например,

$$\frac{dw}{dV} = \lim_{S \to \zeta} \frac{1}{V} \iint_S \cdot w\,(l + E_2 m + E_3 n)\, dS$$

(первая производная первого порядка от w по объему),

$$\frac{d^2 w}{dV^2} = \lim_{S \to \zeta} \frac{1}{V} \iint_S \frac{dw}{dV} \cdot (l + E_2 m + E_3 n)\, dS$$

(первая производная второго порядка от w по объему) и т. д., где S — достаточно гладкая поверхность, ограничивающая тело с объемом V; l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S. Определяются также частные производные по площади от функций w с помощью формулы вида:

$$l \frac{dw}{\partial A_{yz}} + m \frac{dw}{\partial A_{zx}} + n \frac{dw}{\partial A_{xy}} = \frac{dw}{dS}$$

для данного направления (l, m, n) — предельного направления нормали к поверхности S ограниченной кривой C, в данной точке ζ, когда

$$C \to \zeta \quad (\text{здесь } A_{yz} = \iint_S dydz \text{ и т. п.}).$$

Доказываются трехмерные аналоги известных формул Помпейю—Хаяси (Hayashi) и известной теоремы Ломана (Looman) для производных по площади от функций (вообще не аналитических) комплексного переменного. Далее строится теория аналитических функций $f(\zeta)$, т. е. функций, разлагаемых в ряды, аналогичные известным рядам Тейлора и Лорана. Даются основания теории вычетов для таких функций и изучаются простейшие виды их особых точек. Доказывается большое количество предложений, формулировки которых трудно привести ввиду их сложности.

Примечание референта. Работа издана чрезвычайно небрежно: обилие опечаток почти на каждой странице и явных описок очень затрудняет чтение (в реферате эти опечатки исправлены). Следует отметить, что авторы совсем не исследуют вопроса о неограниченной дифференцируемости всякой функции $f(\zeta)$, дифференцируемой в данной области (согласно их определению во второй части настоящей работы) и не делают никаких ссылок на исследования других авторов о моногенности гиперкомплексных функций. В. С. Федоров

4673. Конформность относительно римановых метрик. Альфорс (Conformality with respect to Riemannian metrics. Ahlfors Lars. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. AI, № 206, 1—22 pp.) (англ.)

Отображение $w = f(z)$, конформное в метрике $ds^2 = |dz + h d\bar{z}|^2$, $z = x + iy$, $h = h(z)$, $(h) < 1$, является квазиконформным по отношению к обычной евклидовой метрике и удовлетворяет уравнению $f_{\bar{z}} = h f_z$. Методом сингулярных интегральных уравнений автор доказывает известный результат, что для $h \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha < 1$, существует квазиконформное отображение всей плоскости и единичного круга самих на себя, обладающие частными производными $\in \mathrm{Lip}\,\alpha$. В отличие от аналогичного и, вообще говоря, более общего построения у И. Н. Векуа (РЖМат, 1956, 2173), существенно продолженного Б. Б. Боярским (РЖМат, 1956, 5876), построение Альфорса не опирается на существенные результаты других авторов по теории сингулярных интегралов. Однако первоначально он доказывает теорему об отображении лишь для малых $|h|$; переход к $|h| \leqslant k < 1$ проводится с помощью конечного числа суперпозиций, требующих тонких оценок, полезных самих по себе. В конце, методом квазиконформных отображений, выводится заслуживающая внимания вариационная формула для нормированных однолистных конформных отображений единичного круга. Л. И. Волковыский

4674. Непрерывные функции в комплексной области. Куратовский К., Шусюэ цзиньчажнь, 1955, 1, № 3, 591—594 (кит.)

Лекция, прочитанная автором в Пекине, касающаяся теории непрерывных функций в комплексной области, основное содержание которой можно найти в книге автора «Топология», т. 2 (РЖМат. 1954, 5092 РЕЦ) и в одной его статье (Fundam. math., 1945, 33, 316—367). Ли Ен Пир

4675 К. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Голузин (Geometrishe Funktionentheorie. Golusin G. M., Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch Verl. Wiss., 1957, XII, 438 S., ill.) (нем.)

Немецкий перевод известной книги Г. М. Голузина «Геометрическая теория функций комплексного переменного», М.—Л., ГИТТЛ, 1952.

4676 Д. **Некоторые экспериментальные свойства аналитических функций.** **Аленицын Ю. Е.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1958

4677 Д. **Некоторые вопросы теории аналитических функций дискретного аргумента.** **Фуксман Н. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Среднеаз. ун-т, Ташкент, 1957

См. также: 4463, 4708, 4715, 4717, 4727, 4789, 4807, 4817

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4678. О линейном дифференциальном уравнении, решения которого являются произведениями решений двух данных линейных дифференциальных уравнений. **Белман** (On the linear differential equation whose solutions are the products of solutions of two given linear differential equations. Bellman Richard), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 1, 12—15 (англ.)

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — линейно независимые решения линейного дифференциального уравнения второго порядка. В статье дан метод построения линейного дифференциального уравнения третьего порядка, решения которого $u_1^2(x)$, $u_1(x)u_2(x)$ и $u_2^2(x)$. Метод применим также к уравнениям более высоких порядков. Этому же вопросу, как указывает автор, посвящена статья Сэндхема (РЖМат, 1958, 459); см. также Джулиано (РЖМат, 1958, 3731). И. М. Соболь

4679. Решение линейных дифференциально-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами. **Миролюбов А. А.,** Матем. сб., 1957, 42, № 1, 65—78

В статье автора (РЖМат, 1955, 709) рассматривался вопрос о форме и свойствах общего решения из класса аналитических функций линейного дифференциально-разностного уравнения с линейными коэффициентами. В настоящей статье тот же вопрос рассматривается применительно к более общему уравнению — уравнению с полиномиальными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} P_{ik}(x)\,f^{(i)}(x+h_k)=F(x),$$

где $F(x)$ — некоторая аналитическая функция, $h_0<h_1<\ldots<h_m$ — постоянные разности, $P_{ik}(x)=\sum_{j=0}^{p}a_{ik}^{j}x^{j}$ — многочлены степени $\leqslant p$, причем многочлены $P_{n0}(x)$ и $P_{nm}(x)$ имеют (это существенно) степени в точности равные p. Предполагается, кроме того, что у $P_{n0}(x)$ и $P_{nm}(x)$ простые нули и h_m не является корнем уравнения

$$a_{nm}^{0}-a_{nm}^{1}\lambda+\ldots+(-1)^{p}a_{nm}^{p}\lambda^{p}=0.$$

Сообразуясь с тем, что общее решение предложенного неоднородного уравнения слагается из частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения, показывается сперва, как можно найти нужное частное решение, а затем — как общее решение однородного уравнения выражается в форме предела последовательности линейных агрегатов, составленных из элементарных решений. А. Ф. Леонтьев

4680. О некоторых уравнениях с замкнутыми операторами. **Далецкий Ю. Л.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 157—177

Через $H(t)$ $(0\leqslant t\leqslant l)$ обозначаются неограниченные замкнутые линейные операторы, область определения которых D не зависит от t и плотна в банаховом пространстве E. Если λ и μ — регулярные точки операторов $H(t)$ и $H(\tau)$ соответственно, то предполагается, что ограниченный оператор

$$A(t,\tau,\lambda,\mu)=[H(t)-\lambda I][H(\tau)-\mu I]^{-1}$$

равномерно и непрерывно дифференцируем по переменной t. Замкнутую часть $S_1(t)$ спектра $S(t)$ оператора $H(t)$ автор называет изолированной ветвью спектра, если замкнуто дополнение $S(t)-S_1(t)$ и если для каждого t_0 можно указать такой гладкий контур $\Gamma_1(t_0)$, что при достаточно малых $|t-t_0|$ множество $S_1(t)$ совпадает с множеством тех точек спектра $S(t)$, которые находятся внутри области, ограниченной контуром $\Gamma_1(t_0)$. Предполагается, что спектр $S(t)$ распадается в сумму изолированных ветвей

$$S(t)=S_0(t)+S_1(t)+\ldots+S_n(t),$$

первая из которых может содержать бесконечно удаленную точку, а остальные ограничены. Определяются проекционные операторы

$$P_k(t)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_k(t)}[H(t)-\lambda I]^{-1}\,d\lambda \qquad (k=1,\ldots,n),$$

оставляющие инвариантной область D и коммутирующие с оператором $H(t)$, и оператор $P_0(t)=I-P_1(t)-\ldots-P_n(t)$. Через $Q(t,\tau)$ обозначается решение дифференциального уравнения

$$\frac{dQ}{dt}=\sum_{k=0}^{n}P_k'(t)P_k(t)\,Q, \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию $Q(\tau,\tau)=I$. Доказывается, что оператор $Q(t,\tau)$ оставляет инвариантной область D, операторы

$$[H(t)-\lambda I]\,Q(t,\tau)\,[H(\tau)-\lambda I]^{-1} \quad \left(\lambda\overline{\in}S(t)\right)$$

ограничены и имеют место соотношения $P_k(t)\,Q(t,\tau)=Q(t,\tau)\,P_k(\tau)$ $(k=0,1,\ldots,n)$.

Далее рассматривается дифференциальное уравнение

$$dx/dt=[H(t)+B(t)]\,x+f(t). \qquad (2)$$

Дополнительно предполагается, что $S(t)$ при каждом t лежит в левой полуплоскости и $\|[H(t)-\lambda I]^{-1}\|\leqslant 1/\lambda$ при $\lambda>0$. Оператор $B(t)$ ограничен, оставляет инвариантной область D и по норме непрерывно зависит от t, причем выражение $[H(\tau)-I]\,B(t)\,x$ при $x\in D$ сильно непрерывно по t. При этих предположениях уравнение (2) имеет решение, удовлетворяющее начальным условиям из D. Описывается оператор, дающий решение однородного уравнения, и дается формула для решения неоднородного уравнения. Резуль-

таты, относящиеся к уравнению (2), обобщают некоторые предложения Филлипса (например, РЖМат, 1953, 817).

В последней части работы изучается уравнение

$$dx/dt = \lambda H(t, \lambda)\, x + f(t, \lambda) \qquad (3)$$

с большим параметром λ. Предполагается, что оператор $H(t, \lambda)$ и функция $f(t, \lambda)$ представимы рядами по отрицательным степеням параметра λ.

Даются и исследуются асимптотические представления решения уравнения (3). Полученные здесь теоремы являются нетривиальным обобщением результатов С. Г. Крейна и Ю. Л. Далецкого (Укр. матем. ж., 1950, 2, № 4, 71—91) и Ю. Л. Далецкого (РЖМат, 1955, 1739). М. А. Красносельский

4681. **Интегрирование системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.** **Шаповалов В. П.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 188—191, 212 (рез. англ.)

Автор рассматривает систему двух уравнений

$$dx/dt = P(x, y);\quad dy/dt = Q(x, y), \qquad (1)$$

где

$$P = a_{11}x + a_{12}y + A_1y^2 + 2B_1xy + C_1x^2,$$

$$Q = a_{21}x + a_{22}y + A_2y^2 + 2B_2xy + C_2x^2$$

(здесь a_{ik}, A_j, B_j и C_j — вещественные постоянные). Предполагая сначала, что полиномы P и Q удовлетворяют условиям Коши—Римана, автор показывает, что в этом случае система (1) может быть сведена к одному уравнению вида:

$$dz/dt = (a_{11} + ia_{21})\, z - (A_1 + iA_2)\, z^2 \quad (z = x + iy),$$

которое всегда интегрируется в элементарных функциях. В данном случае на плоскости XOY существуют две особые точки для характеристик системы (1), а именно: точка (0, 0) и точка

$$x = \frac{a_{11}A_1 + a_{21}A_2}{A_1^2 + A_2^2};\qquad y = \frac{a_{21}A_1 + a_{22}A_2}{A_1^2 + A_2^2}.$$

Как показывает автор, может иметь место одна из трех возможностей: 1) обе особые точки являются фокусами, а все характеристики — спирали; 2) обе особые точки будут центрами, а все характеристики — окружности; 3) обе особые точки — узлы, а все характеристики — дуги окружностей, проходящие через эти узлы. Далее автор рассматривает случай, когда в результате аффинного преобразования $u = ax + by$; $v = cx + dy$ система (1), она может быть приведена к виду:

$$du/dt = \bar{P}(u, v);\quad dv/dt = \bar{Q}(u, v), \qquad (2)$$

где $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ — полиномы второй степени, удовлетворяющие условиям Коши—Римана: $\partial\bar{P}/\partial u = \partial\bar{Q}/\partial v$; $\partial\bar{P}/\partial v = -\partial\bar{Q}/\partial u$. Приводя систему (2) к каноническому виду, автор показывает, что она должна иметь вид:

$$dx/dt = \lambda x + Ax^2;\quad dy/dt = \mu y + By^2. \qquad (3)$$

Система (3) легко интегрируется, так как переменные разделяются. На плоскости XOY мы будем иметь четыре особых точки: две из этих особых точек будут всегда седлами, а две других — либо одновременно узлами, либо одновременно фокусами, либо, наконец, одновременно центрами. Автор рассматривает также случай, когда система (1) имеет вид:

$$dx/dt = \lambda x + A_1x^2;$$

$$dy/dt = \mu y + A_2y^2 + 2B_2xy + C_2x^2. \qquad (4)$$

В этом случае система также интегрируется и можно построить интегральные кривые в различных случаях. И. С. Куклес

4682. **О дифференциальном уравнении $\dot{y} + y = \ddot{y}^2$.** Зламал (Über die Differentialgleichung $\dot{y} + y = \ddot{y}^2$. Zlámal Miloš), Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 1, 26—40 (нем.; рез. русск.)

Рассматривается уравнение

$$\dot{y} + y = \ddot{y}^2 \qquad (1)$$

и доказывается, что существует решение, представимое в виде

$$y(t) = \alpha_1e^{-t} + \ldots + \alpha_{n-1}e^{-(n-1)t} + \alpha_ne^{-nt}[1 + o(t)],$$

при этом отмечается, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_ne^{-nt}$ расходится при любом t, но формально удовлетворяет уравнению (1). Кроме того, рассматривается поведение любого решения уравнения при $t \to \infty$.

Автор отмечает, что из полученных результатов следует решение первой половины проблемы, поставленной Белманом (Bellman, Bull. Amer. Math. Soc. 1955, 61, 192). Также отмечается, что во время печатания этой статьи опубликована заметка проф. Массера на эту же тему (РЖМат, 1957, 6348).

А. Н. Черкасов

4683. **Об одном классе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, имеющих сложную особую точку.** **Боэтти** (Sopra una classe di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine dotate di una singolarità mista. Boetti Giovanni), Rend. mat. e applic., 1957, 16, № 1—2, 207—220 (итал.)

Автор сравнивает поведение характеристик двух дифференциальных уравнений:

$$\varphi(x)\, dy/dx = ay + bx \qquad (1)$$

и

$$\varphi(x)\, dy/dx = ay + bx + f(x, y) \qquad (2)$$

в окрестности начала координат. Предполагается, что $\varphi(x)$ — непрерывная в окрестности начала функция, обращающаяся в этой окрестности в нуль только при $x = 0$ и удовлетворяющая условию: $\left|\int_0^x \frac{du}{\varphi(u)}\right| = \infty$ при малых x (как положительных, так и отрицательных).

Автор показывает, что если $\varphi(x)$ меняет знак вместе с x, то начало для уравнения (1) является седлом или узлом в зависимости от того $a < 0$ или $a > 0$. Если же $\varphi(x)$ сохраняет знак в окрестности начала, то начало для уравнения (1) будет седлоузлом. Поведение характеристик уравнения (2) в окрестности начала будет аналогичным поведению характеристик уравнения (1), если $f(x,y)$ удовлетворяет условиям Липшица в окрестности начала и, кроме того, либо условию

$$|f(x, y)| < ay, \qquad (3)$$

либо условию

$$\lim_{x\to 0,\, y\to 0} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \qquad (4)$$

Примечание референта. Рассматриваемая работа не содержит никаких существенно новых результатов по сравнению, например, с результатами Хартмана и Винтнера или Сансоне и Конти (Hartman Ph., Wintner A., Amer. J. Math., 1946, 68, 301—308; Sansone G., Conti R., Equazioni differenziali non lineari, Ed. Cremonese, Roma, 1956, cap. 3).

И. С. Куклес

4684. Об ошибке в теореме Ершова. Хе Цзянь-сюнь, Сямэнь дасюэ сюэбао. Цзыжанькэсюэбань, Acta csient. natur. Univ. amoensis, 1957, № 1, 1—6 (кит.; рез. русск.)

В статье Б. А. Ершова (РЖМат, 1956, 2978) имеются ошибки (РЖМех, 1955, 2841). В реферируемой статье приводится отрицательный пример к теореме Б. А. Ершова и указываются два дополнительных условия, которые следует наложить на правые части уравнений возмущенного движения для того, чтобы исправить теорему и обеспечить асимптотическую устойчивость в целом. Автор замечает, что указанные им условия являются более слабыми, чем дополнительные условия, указанные с той же целью референтом (РЖМат, 1954, 4413). Н. Н. Красовский

4685. Уравнение математического маятника переменной массы. Брэдяну (Ecuaţia pendulului matematic de masă variabilă. Brădeanu Petru), Studii şi cercetări mat. şi fiz. Acad. RPR Fil. Cluj, 1956, **7**, № 1-4, 65—77 (рум.; рез. русск., франц.)

Выводится дифференциальное уравнение движения маятника, масса которого изменяется со временем. Рассматривается случай движения маятника в пустоте и в сопротивляющейся среде. Указываются некоторые простейшие частные случаи. Г. П. Дубошин

4686. Об условиях устойчивости для уравнений типа маятника. Сейферт (On stability questions for pendulum-type equations. Seifert George), Z. angew. Math. und Phys., 1956, **7**, № 3, 238—247 (англ.; рез. нем.)

Рассматривается уравнение

$$\theta'' + f(\theta, \alpha)\,\theta' = g(\theta), \qquad (1)$$

где $f(\theta, \alpha)$ и $g(\theta)$ непрерывно дифференцируемы для всех значений θ, $f(\theta+2\pi, \alpha) \equiv f(\theta, \alpha)$ и $g(\theta+2\pi) \equiv g(\theta)$, $g(\theta) = 0$ может иметь только простые корни и для положительных α $f(\theta, \alpha)$ не принимает отрицательных значений. В цилиндрическом фазовом пространстве изучаются условия, при которых решения (1) при $t \to \infty$ приближаются асимптотически к предельным решениям (к циклам, охватывающим цилиндр; к предельным циклам, ограничивающим конечную часть цилиндра, или к особой точке). Эти условия записываются через значения функций

$$G(\theta) = \int_0^\theta g(u)\,du \quad \text{и} \quad F(\theta, \alpha) = \int_0^\theta f(u, \alpha)\,du$$

на отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. В тех же терминах записываются уравнения кривых, оценивающих сепаратрисы седел, а также формулируются условия для неустойчивого случая. М. И. Ельшин

4687. Об асимптотических свойствах решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Зламал (Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zlámal Miloš), Чехосл. матем. ж., 1956, **6**, № 1, 75—93 (нем.; рез. русск.)

В первой части работы рассматривается уравнение

$$y'' + a(t)\,y' + y = 0 \qquad (1)$$

и доказывается, что при $a(t) \geqslant \text{const} > 0$ и ограниченной при всех $t \geqslant t_0$ производной $a'(t)$ или при $a \geqslant 2$, $\lim_{t\to\infty} I = \infty$, $\lim_{t\to\infty} \frac{a'}{a^2 I} > -1$ $\left(I = \int_{t_0}^t \frac{ds}{a(s)}\right)$ все решения (1) стремятся к нулю (во втором случае монотонно). Показано также, что в случаях $a > 0$, $\lim_{t\to\infty} I < \infty$, $a'/a \leqslant \vartheta < 1$ или $a > 0$, $a' \geqslant 1$, $\int_{t_0}^\infty \frac{ds}{a} < \infty$ затухание происходит настолько быстро, что решения уравнения (1) не успевают дойти до нуля и стремятся монотонно к пределам, отличным от нуля.

Во второй части работы рассматривается уравнение Штурма

$$(py')' + qy = 0 \quad (p > 0), \qquad (2)$$

где p и q имеют непрерывные производные второго порядка при всех $t \geqslant t_0$ и доказывается, что при выполнении для всех $t \geqslant t_0$ условий

$$p \cdot q \geqslant \text{const} > 0;\ \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^t \frac{d\xi}{p(\xi)} = \infty;\ [pA']' \geqslant 0, \qquad (3)$$

где $A = (p \cdot q)^{1/4}$, имеют место асимптотические формулы

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{p \cdot q}} \left[y_0 \sin\left(\int_{t_0}^t \sqrt{\frac{q}{p}}\,ds + \varphi_0 \right) + o(1) \right], \qquad (4)$$

$$y' = \sqrt{\frac{q}{p^3}} \left[y_0 \cos\left(\int_{t_0}^t \sqrt{\frac{q}{p}}\,ds + \varphi_0 \right) + o(1) \right]$$

Для случая, когда $p = 1$, условие (3) сводится к выпуклости $q^{-1/4}$ и $q \geqslant \text{const} > 0$, доказательство проведено без предположения существования второй производной p и q.

В третьей части работы доказывается, что при выполнении

$$\lim_{t\to\infty} \inf \left[\int_{t_0}^t \frac{ds}{p} \right]^{-2} \int_{t_0}^t \int_s^t \frac{q(s) + |q(s)|}{p(\tau)}\,d\tau ds = 0 \qquad (5)$$

не все решения уравнения (2) ограничены.

В статье отсутствует сравнение полученных результатов с результатами многочисленных работ Хартмана и Винтнера (публиковались начиная с 1947 г. в Amer. J. Math., Quart. Appl. Math. и др.), посвященных аналогичным вопросам. Между тем справедливость формул (4) для случая $p = 1$ выпуклости $q^{1/4}$ и $q \geqslant \text{const} > 0$, а также и теорема автора: Если $q^{-1/4}$ выпукла в интервале (t_0, ∞) и $\lim_{t\to\infty} q(t) = \infty$, то все решения уравнения (3) стремятся к нулю при $t \to \infty$, — не представляются новыми для читателя. Кроме того, доказывая, что при $a(t) \geqslant 2$ решения уравнения (1) неколеблющиеся, автор не замечает, что доказывает частный случай предельной теоремы Линд-Поттера (РЖМат, 1954, 1640). М. И. Ельшин

4688. Задача Штурма—Лиувилля для дифференциального уравнения четвертого порядка. Эверитт (The Sturm-Liouville problem for fourth-order differential equations. Everitt W. N.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 30, 146—160 (англ.)

Изучается самосопряженная краевая задача четвертого порядка типа Штурма:

$$Ly \equiv y^{(\mathrm{IV})} [q_1(x)\,y']' + q_0(x)\,y = \lambda y,$$

$$U_i(a, y) = \sum_{j=0}^3 (-1)^{j+1} \alpha_i^{4-j} y^{(j)}(a) = 0 \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots),$$

$$U_i(b, y) = \sum_{j=0}^3 (-1)^{j+1} \beta_i^{4-j} y^{(j)}(b) = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots).$$

где векторы (α_1^j) и (α_2^j), (β_1^j) и (β_2^j) линейно независимы и удовлетворяют некоторым условиям, обеспечивающим самосопряженность краевой задачи. Доказано существование четырех функций $\Phi_i(x, \lambda)$,

$\chi_i(x, \lambda)$ $(i=1, 2)$, удовлетворяющих уравнению (1) и граничным условиям

$$U_i(a, \Phi_k)=0, \quad U_i(b, \chi_k)=0 \quad (i, k=1, 2)$$

таких, что λ является собственным значением рассматриваемой краевой задачи тогда и только тогда, когда $W(\lambda)=0$, где $W(\lambda)\equiv W(\Phi_1, \Phi_2, \chi_1, \chi_2)$ — определитель Вронского. Получено новое представление для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ при λ, не являющемся собственным значением. Изучены свойства $W(\lambda)$ и $G(x, \xi, \lambda)$. Р. С. Гусарова

4689. Оценка для решений дифференциального уравнения Штурма. Томас (Ein Abschätzungssatz für Lösungen Sturmscher Differentialgleichungen. Thomas Johannes). Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1956, 58, № 3, 110—114 (нем.)

Если при каждом x интервала I $(A\leqslant x\leqslant B)$ определена непрерывная комплексная функция $h(x)$ и функция

$$g(x)=(x-x_0)^{\nu}g_1(x) \qquad (x_0\subset I), \tag{1}$$

где $g_1(x)$ для всех $x\subset I$ действительна, положительна и имеет непрерывные производные первого и второго порядка, а показатель ν в (1) — четное целое число $\geqslant 2$, если $x_0\in(A, B]$, и для $x_0=A$ — любое положительное число, то справедлива следующая оценка для решения $u_0=u(x, \lambda)$ дифференциального уравнения

$$d^2u/dx^2+[\lambda g(x)+h(x)]u=0, \tag{2}$$

удовлетворяющего начальным условиям $u(a, \lambda)=0$; $du(a, \lambda)/dx=1$:

$$\max_{x\in I}|u_0(x, \lambda)|<\frac{1}{\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{4^{1/(\nu+2)}\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)K}\lambda^{1/(\nu+2)}-S}, \tag{3}$$

где

$$K\geqslant\max_{x\in I}\left|\frac{\left(\int_{x_0}^{x}g^{1/2}d\xi\right)^{\nu/(\nu+2)}}{g^{1/2}}\right|, \qquad S\geqslant\int_A^B|h-h_0|\,d\xi$$

и h_0 — определенный оператор, зависящий от $\dfrac{\int_{x_0}^{x}g^{1/2}d\xi}{g^{1/2}}$ и ν.

Оценка (3) справедлива при

$$\lambda>4\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}KS\right)^{\nu+2}.$$

М. И. Ельшин

4690. О существовании решения одной краевой задачи для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Ешуков Л. Н., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 313—319

Рассматриваются система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(t)x_k \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

и система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

В работе высказываются условия, при выполнении которых система (1) и система (2) имеют решение $x_i(t)$, удовлетворяющее условиям

$$x_1(t_i)=A_i \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

где числа t_i принадлежат определенному интервалу $[a, b]$, а числа A_i — произвольные постоянные.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$ — первая строка матрицы фундаментальной системы решений системы дифференциальных уравнений (1). Пусть ни один из главных миноров матрицы

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \dot{x}_{11} & \ldots & \dot{x}_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ {\scriptstyle(n-1)}x_{11} & \ldots & {\scriptstyle(n-1)}x_{1n} \end{Vmatrix}$$

не обращается в нуль на $[a, b]$. Тогда при всех $t_1, t_2, \ldots, t_n$ из $[a, b]$ и при произвольных $A_1, A_2, \ldots, A_n$ краевая задача (1), (3) имеет единственное решение.

Теорема 2. Если корни характеристического уравнения дифференциального уравнения

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=0$$

— действительные числа, то краевая задача с условиями

$$x(t_i)=A_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

имеет единственное решение при всех $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и произвольных $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пусть $x_i(t)$ — решение системы (2), очевидно, производные функции $x_1(t)$ в силу системы дифференциальных уравнений (2) будут линейными функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Теорема 3. Пусть для системы дифференциальных уравнений (2) выполняется условие

$$|I_1|=\frac{\partial\left(x_1, \dot{x}_1, \ldots, {\scriptstyle(n-1)}x_1\right)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\neq 0$$

и пусть число h, длина интервала $[a, b]$, удовлетворяет неравенству $(1+ah)^n\leqslant 2$ или более точному

$$\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(ah\sqrt{k})^k}{k!}\leqslant 1,$$

где C_n^k — биноминальные коэффициенты, $a\geqslant|a_{ik}|$, $i, k=1, 2, \ldots, n$, тогда краевая задача (2), (3) имеет единственное решение при выполнении этих условий для всех $t_1, t_2, \ldots, t_n$ из $[a, b]$ и произвольных $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если же для системы 2 выполняется условие $|I_1|=0$, то ни при каких $t_1, t_2, \ldots, t_n$ задача (2), (3) не имеет решений, если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ произвольны.

Теорема 4. Если корни характеристического уравнения системы (2) — действительные числа и при этом выполняется условие $|I_1|\neq 0$, то при любых $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и произвольных $A_1, A_2, \ldots, A_n$ краевая задача (2), (3) имеет единственное решение.

Е. А. Барбашин

4691. Граничная задача для особо возмущенного дифференциального уравнения. Хейбер, Левинсон (A boundary value problem for a singu-

larly perturbed differential equation. Haber S., Levinson N.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 866—872 (англ.)

Рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения

$$\varepsilon y'' = f(x, y, y', \varepsilon), \quad y(0) = a, \quad y(1) = b \qquad (1)$$

при малых $\varepsilon > 0$. Предполагается, что вырожденное уравнение $f(x, u, u', 0) = 0$ имеет решение $u = g(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $g(0) = a$ и решение $u = h(x)$ при $x_0 \leqslant x \leqslant 1$, $h(1) = b$, причем $g(x_0) = h(x_0) = y_0$ и $g'(x_0) < h'(x_0)$. Обозначим так определенную на отрезке $[0, 1]$ функцию через $U(x)$. Пусть R — область в пространстве (x, y, w, ε), определенная условиями: $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $0 \leqslant x < x_0 < x \leqslant 1$, $|y - U(x)| < \alpha$, $|w - U(x)| \leqslant \beta$, а также $|x - x_0| \leqslant \alpha$, $|y - y_0| \leqslant \alpha$, $g'(x_0) - \beta \leqslant w \leqslant h'(x_0) + \beta$, где α, β, ε_0 — некоторые положительные числа.

Теорема. Пусть f, f_y, $f_{y'}$ непрерывны в R, $f_{y'}(x, g(x), g'(x), 0) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $f_{y'}(x, h(x), h'(x), 0) < 0$ при $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ и пусть $f(x_0, y_0, w, 0) > 0$ при $g'(x_0) < w < h'(x_0)$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение $y = \Phi(x, \varepsilon)$ задачи (1), лежащее в R, и при $\varepsilon \to 0$ $\Phi(x, \varepsilon) \to U(x)$ равномерно на отрезке $[0, 1]$, а $\Phi'(x, \varepsilon) \to U'(x)$ равномерно на $[0, x_0 - \delta]$ и $[x_0 + \delta, 1]$, где $\delta > 0$ — произвольно малое число.

Задача (1) рассматривалась ранее в различных предположениях на $f(x, y, y', \varepsilon)$ в работах Коддингтона и Левинсона (Coddington E. A., Levinson N., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, № 1), О. А. Олейник и А. И. Жижиной (Матем. сб., 1952, **31 (73)**, вып. 3), в диссертации Н. И. Бриша (М., 1953). В работе Вазова (РЖМат, 1957, 3973) приведена большая библиография по этому вопросу. О. А. Олейник

4692. Об устойчивости систем с малым множителем. Разумихин Б. С., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 4, 578—580

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_i}{dt'} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$\mu \frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{nj}(t)\, x_j, \qquad (1)$$

где μ — малый множитель. Вместе с (1) рассматривается вырожденная система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(p_{ij}(t) - p_{in}(t) \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} \right) x_j, \qquad (2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

которая получается, если в (1) положить $\mu = 0$ и исключить переменную x_n. Целью работы является выяснение условий, при которых из асимптотической устойчивости вырожденной системы следует устойчивость исходной системы.

Доказана теорема: Асимптотическая устойчивость системы (1) следует из асимптотической устойчивости вырожденной системы (2), если: 1) коэффициенты $p_{ij}(t)$ непрерывны, ограничены и имеют ограниченные первые производные; 2) множитель μ достаточно мал и его знак противоположен знаку коэффициента $p_{nn}(t)$; 3) коэффициент $p_{nn}(t)$ для $t \geqslant t_0$ удовлетворяет условию $|p_{nn}(t)| > \varepsilon > 0$, где ε — некоторое фиксированное положительное число.

Из предположений, сделанных относительно вырожденной системы (2), следует, что для нее существует функция Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы $(n-1)$ переменных. В предположении, что такая функция $V_0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ найдена, определяется интервал допустимых значений μ. Вводится вспомогательная квадратичная форма

$$V = V_0 + \mu (2a_{1n} x_1 x_n + \ldots + 2a_{n-1,n} x_{n-1} x_n + a_{nn} x_n^2).$$

Показано, что можно подобрать коэффициенты $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}$ таким образом, что V будет функцией Ляпунова для (1), причем a_{nn} можно взять произвольно, так чтобы выполнялось условие $\mu a_{nn} > 0$. При достаточно малых μ выполняется условие

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & \mu a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & \mu a_{n-1,n} \\ \mu a_{n,1} & \cdots & \mu a_{n,n-1} & \mu a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \qquad (3)$$

При произвольно выбранном a_{nn}, удовлетворяющем условию $\mu a_{nn} > 0$, интервал допустимых значений μ определяется одновременным выполнением условий (3) и

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} + \mu\gamma_{11} & \cdots & a_{1n-1} + \mu\gamma_{1,n-1} & \mu\gamma_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} + \mu\gamma_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} + \mu\gamma_{n-1,n-1} & \mu\gamma_{n-1,n} \\ \mu\gamma_{n1} & \cdots & \mu\gamma_{n,n-1} & \mu\gamma_{nn} + 2a_{nn}/p_{nn}(t) \end{vmatrix} > 0,$$

где a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$ — коэффициенты квадратичной формы dV_0/dt (производная по t берется здесь в силу вырожденной системы (2), а γ_{ij} $(i, \gamma = 1, 2, \ldots, n)$ — коэффициенты квадратичной формы

$$u = 2\left(\frac{1}{p_{nn}} y - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_{nj}}{p_{nn}} x_j\right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{da_{in}}{dn} x_i +$$
$$+ \frac{da_{nn}}{dt}\left(\frac{1}{p_{nn}} y - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}}{p_{nn}} x_j\right)^2 +$$
$$+ \left(2\frac{1}{p_{nn}} y - \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{nj}}{p_{nn}} x_j\right) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \left(p_{ij} - \frac{p_{nj} p_{in}}{p_{nn}}\right) x_j + \frac{p_{in}}{p_{nn}} y \right\}$$

относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y$.

Полученные результаты позволяют свести задачу об устойчивости системы с малым множителем к исследованию устойчивости вырожденной системы.

В. М. Волосов

4693. Некоторые математические задачи, возникающие в связи с теорией оптимальных систем автоматического регулирования. Понтрягин Л. С., Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956, т. 2, М., АН СССР, 1957, 107—117

Излагаются результаты автора и его сотрудников В. Г. Болтянского и Р. В. Гамкрелидзе по теории оптимального регулирования. Статья примыкает к заметке тех же авторов (РЖМат, 1957, 8685).

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

описывающая управляемый процесс, x^i — величины, определяющие состояние управляемого объекта, u^k — параметры управления, причем u^k могут принимать значения лишь из замкнутой области U. Ставится задача об отыскании оптимальных управлений

$u^k(t)$, переводящих объект из состояния x_0^i в состояние x_1^i за кратчайшее время $t_1 - t_0$. Формулируется фундаментальное правило для определения оптимальных траекторий — «принцип максимума»: пусть $u^k(t)$ — оптимальное управление, допускающее, быть может, разрывы и проходящее в замкнутой области U и $x^i(t)$ — соответствующая оптимальная траектория, тогда существуют такие непрерывные функции $\psi_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$, что совокупность $u^k(t)$, $x^i(t)$, $\psi_i(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = \partial H/\partial\psi_i, \quad \dot{\psi}_i = -\partial H/\partial x^i \quad (i=1, \ldots, n),$$

где $H = \psi_\alpha f^\alpha(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r)$ и $H \geqslant 0$, причем для H выполнено также условие максимума: если в H подставить $x^i = x^i(t)$, $\psi_i = \psi_i(t)$, то при $u^k = u^k(t)$ функция H достигает абсолютного максимума по $u \in U$. Приводится доказательство этих условий в некоторых случаях. Рассматривается частный случай, когда f^i — линейные функции. Рассматривается задача синтеза оптимальных систем, т. е. задача об отыскании управлений u^k как функций координат x^i системы. Отмечается, что общий метод авторов позволяет получить известные в теории регулирования результаты для подобных оптимальных задач. В заключение подчеркивается, что принцип максимума в общем случае пока не доказан.

Н. Н. Красовский

4694. Классификация в целом динамических систем в евклидовом пространстве. Линь Чжэньшэн (Lin J. S.), Сямэнь дасюэ сюэбао. Цзыжанькэсюэбань, Acta scient. natur. Univ. amoensis, 1957, № 1, 41—58 (кит.; рез. англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

где X_i — непрерывно дифференцируемые функции, заданные в евклидовом пространстве E_n.

Пусть $f(p, I(+))$, $f(p, I(-))$ обозначают соответственно положительную и отрицательную полутраектории точки p.

Пусть

$$L_p(+) = \overline{f(p, I(+))} \setminus f(p, I(+)),$$

$$L_p(-) = \overline{f(p, I(-))} \setminus f(p, I(-)).$$

Точка p называется регулярной, если существует локальное сечение S_p такое, что точки границы $f(S_p, I)$ принадлежат $f(B(S_p), I)$ или $L(+)$ или $L(-)$ (здесь $B(S_p) = S_p \setminus S_p$) и, кроме того, для любой точки $q \in S_p$ имеет место $L_q(\pm) = L_p(\pm)$. Регулярные точки образуют открытое множество G в E_n. Каждая компонента множества G называется канонической областью.

Доказаны следующие утверждения:

1) Всякая каноническая область имеет сечение.

2) В трехмерном пространстве сечение канонической области должно быть сферой или тором, либо тором с выключенным замкнутым множеством.

Результаты статьи аналогичны результатам, установленным в случае n-2 Маркусом. Е. А. Барбашин

4695. Об установившихся режимах в трехмерных автономных динамических системах. Немыцкий В. В., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1957, № 1, 3—7

В начале работы автор формулирует свою точку зрения на понятие «установившийся режим» в том случае, когда процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Дискутируется вопрос об условиях, при которых почти периодические решения дифференциальных уравнений определяются установившимся режимом. Доказывается, что для систем с трехмерным множеством состояний установившийся режим является либо периодическим, либо же почти периодическим с двумя независимыми частотами. Ставится задача о том, имеет ли место подобное же утверждение для систем с числом измерения больше трех и о «грубости» почти периодического режима. Ссылаясь на точку зрения К. Ф. Теодорчика (Вестн. Моск. ун-та, 1948, № 10), считающего, что в реальных системах почти периодические режимы не существуют, автор подчеркивает, что вопрос о правильности такой точки зрения остается открытым. М. А. Айзерман

4696. Вопросы устойчивости в целом и качества регулирования для некоторых систем дифференциальных уравнений. I. Скачков Б. Н., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 13, 67—80 (рез. англ.)

Рассматривается система регулирования

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2 + \bar{n}_1\xi, \\ \dot{\eta}_2 &= b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + \bar{n}_2\xi, \\ \dot{\xi} &= f(\eta_1, \eta_2, \xi), \end{aligned} \tag{1}$$

где $f(\eta_1, \eta_2, \xi)$ — непрерывная функция, обладающая относительно плоскости $\sigma = \bar{p}_1\eta_1 + \bar{p}_2\eta_2 - \xi = 0$ свойствами

$$f(\eta_1, \eta_2, \xi)|_{\sigma=0} = 0, \quad \sigma f(\eta_1, \eta_2, \xi)|_{\sigma\neq 0} > 0.$$

Предполагаются также выполненными условия, обеспечивающие единственность решений. Числа b_{ij} предполагаются такими, что система (1) при помощи неособого линейного преобразования переменных η_1, η_2 может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= r_1\eta_1 + n_1\xi, \\ \dot{\eta}_2 &= r_2\eta_2 + \eta_2\xi, \\ \dot{\xi} &= f(\eta_1, \eta_2, \xi), \end{aligned} \tag{2}$$

где $r_i < 0$.

Показывается, что положение равновесия системы (2) будет устойчивым при любых начальных возмущениях, если

$$1 + |n_1p_1|/r_1 + |n_2p_2|/r_2 > 0.$$

Е. А. Барбашин

4697. Примеры устойчивости в большом некоторых динамических систем. Ершов Б. А., Соболев Ю. С., Уч. зап. ЛГУ, 1957, № 217, 17—21

Авторы используют метод С. А. Стебакова (РЖМат, 1955, 206) для анализа некоторых систем дифференциальных уравнений на устойчивость при начальных отклонениях, не выходящих из некоторой области.

Показывается, что для системы

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, x_{i-1}) = A_ix_i + B_ix_{i-1} + \varphi_i(x_i, x_{i-1}) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

условиями устойчивости при любых начальных отклонениях будут условия

$$\varphi_i(0, 0) = 0, \left|\frac{\partial f/\partial x_i}{\partial f_i/\partial x_{i-1}}\right| > \left|\frac{A_i}{B_i}\right|,$$

$$A_i < 0, \prod_{i=1}^{n}\left|\frac{A_i}{B_i}\right| > 1,$$

где

$$A_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{\substack{x_i=0\\ x_{i-1}=0}}, \quad B_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}}\right)_{\substack{x_i=0\\ x_{i-1}=0}},$$

для системы

$$\dot{x} = -f(x) - by, \quad \dot{y} = cx - \varphi(y)$$

достаточными условиями устойчивости при любых начальных отклонениях являются условия:

$$a_0 d_0 - bc > 0, \ |\partial f/\partial x| > a_0, \ |\partial \varphi/\partial y| > d_0,$$

где $a_0 = -f'(0)$, $d_0 = -\varphi'(0)$ и a_0, b, c, d_0 — положительные числа.

Рассматривается также пример, описывающий систему автоматического регулирования с двумя последовательно включенными сервомоторами однократного усиления с учетом саморегулирования машины.

Е. А. Барбашин

4698. Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова. Мельников Г. И., Докл. АН СССР, 1956, 110, № 3, 326—329

Приводятся условия асимптотической устойчивости и выводятся некоторые оценки скорости затухания переходного процесса, основанные на идеях второго метода Ляпунова, причем, однако, допускаются случаи знакопеременной производной dV/dt функции Ляпунова V. Формулируется теорема о существовании способа построения непрерывной функции $f(V)$ ($f(V) > 0$ при $V > 0$, $dV/dt < -f(V)$ в окрестности точки $x = 0$, если для системы уравнений

$$dx_i/dt = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (1)$$

существует определенно положительная функция Ляпунова, имеющая определенно отрицательную производную dV/dt. Выводятся оценки интервалов времени, в течение которых отрезки траекторий системы (1) могут лежать в кольцевых областях $h_1 \leqslant V \leqslant h$ (в том числе и в случае знакоположительной производной dV/dt). Приводятся оценки, получающиеся интегрированием неравенства

$$dV/dt \leqslant f(t, V) \qquad (2)$$

при различных предположениях о виде функции $f(t, V)$. Так, например, формулируется следующая теорема: Если найдена V — функция (т. е. определенно положительная и допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$) в области $\bar{D}(h, t)$ (т. е. при $V \leqslant h$), производная которой при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{dV}{dt} \leqslant f(t) V + \varphi(t) V^{1+k} \text{ при } 0 \leqslant V \leqslant h, \ k > 0,$$

и если M, удовлетворяющее неравенству

$$\left[h : \left(F^k + kh^k \int_{t_0}^{t} \varphi F^k dt\right)^{1/k}\right] \geqslant M \text{ при}$$

$$F = \exp \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt$$

есть конечное положительное число, то решения с начальными условиями из области $\bar{D}(h_1, t)$ (т. е. при $V \leqslant h_1$), где $0 < h_1 < M$ не выйдут из области $D(h, t)$ и в момент t будут находиться в области $D(c, t)$, где

$$c = c(t) \leqslant h_1 F : \left(1 - kh_1^k \int_{t_0}^{t} \varphi F^k dt\right)^{1/k}.$$

Если при этом $\int_{t_0}^{t} f(t)\, dt \to -\infty$ при $t \to \infty$, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Описывается построение дифференциального неравенства (2) для системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t) x_1 + \ldots + p_{sn}(t) x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad (3)$$

где X_s — ряды с непрерывными и ограниченными коэффициентами, при этом функция V выбирается в виде квадратичной формы, удовлетворяющей условию

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} (p_{s1}(t) x_1 + \ldots + p_{sn}(t) x_n) = 2(\alpha(t) + \varepsilon) V + W, \qquad (4)$$

где $\alpha(t)$ — наибольшая вещественная часть корней характеристического уравнения $\|p_{ij}\| - \lambda E\|_1^n = 0$, $\varepsilon > 0$, W — определенно отрицательная квадратичная форма. Прилагая к функции V из (4) приведенную выше теорему, автор выводит оценки для решений системы (3).

Н. Н. Красовский

4699. Об уравнениях Пфаффа с линейными коэффициентами. Куклес И. С., Тр. Узб. ун-та, 1955, вып. 59, 97—104

Изучается уравнение в полных дифференциалах вида

$$\sum_{i=1}^{n} P_i dx_i = 0, \text{ где } P_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k.$$

Показывается, что либо интегральные поверхности изучаемого уравнения принадлежат к семейству центральных поверхностей второго порядка, либо через начало координат проходит особая линия, которая может быть линией центров, фокусов, седел или узлов.

Е. А. Барбашин

4700 Д. О существовании и поведении интегральных многообразий для систем нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Лыкова О. Б. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1957

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

7401. Уравнения в частных производных. 1. Линейные уравнения первого порядка. Жане (Équations linéaires du premier ordre. Janet M.), Formulaire math. usage physiciens et ingrs, 1956, № 7, 7—10 (франц).

Излагаются основные понятия (первый интеграл, характеристики, ставится вопрос о существовании решения), связанные с уравнением

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + az = b,$$

где a_i, a и b суть функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

П. И. Кузнецов

4702. Уравнения первого порядка. Система первого порядка. Обобщение на уравнения высших порядков. Жане (Équations du premier ordre. Systèmes du premier ordre à une inconnue. Généralités sur les équations d'ordre égal ou supérieur à deux. Janet M.), Formulaire math. usage physiciens et ingrs, 1956, № 7, 11—19 (франц.)

Сначала изучается уравнение с двумя независимыми переменными. Дается понятие о характеристиках, задаче Коши, интегральных кривых, общем решении Ли. Затем рассматривается уравнение с n независимыми переменными и с одной неизвестной функцией. Дается понятие об уравнениях Пфаффа, полном интеграле и теореме Якоби. Указывается связь с вариационным исчислением. В заключение излагаются некоторые вопросы теории уравнения высших порядков.

П. И. Кузнецов

4703. Системы дифференциальных уравнений в частных производных. Жане (Systèmes d'équations aux dérivées partielles. Janet M.), Formulaire

math. usage physiciens et ingrs, 1956, № 7, 45—53 (франц.)

Даны определения и приведены без доказательства основные результаты теории систем дифференциальных уравнений в частных производных многих неизвестных функций от многих переменных в случае, когда соотношения, связывающие все входящие переменные, аналитические и ограничиваются аналитическими решениями.

Для систем дифференциальных уравнений первого порядка с одной неизвестной функцией приведены результаты классической теории и формулированы теоремы о полном, общем и особом интегралах.

Приведены основные понятия теории мономов, созданной Рикье и Жане, и дано правило решения задачи обращения дифференцирования, т. е. установления совместности и степени общности решения системы вида

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Сформулирована общая теорема существования Рикье системы дифференциальных уравнений, приведенных к канонической форме.

Для неявной системы дифференциальных уравнений, содержащей столько уравнений, сколько имеется неизвестных функций, даны понятия характеристики в смысле Beudon-Hadamard для линейных уравнений относительно старших производных и сформулирована теорема существования нормальной системы.

Результаты, по утверждению автора, обобщаются как для систем дифференциальных уравнений высших порядков, так и для уравнений нелинейных.

П. И. Кузнецов

4704. Задача Коши (с точки зрения математической физики). Фурес-Брюа (Problème de Cauchy (point de vue de la physique mathématique). Fourès-Bruhat Y.), Formulaire math. usage physiciens et ingrs, 1956, № 7, 53—55 (франц.)

Рассматривается известное решение задачи Коши для систем уравнений

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{k_0+\ldots+k_n\leqslant n_s} A_r^{sk_0\ldots k_n}(x^0, \ldots, x^n)\times$$

$$\times\frac{\partial^k u_s}{(\partial x^0)^{k_0}\ldots(\partial x^n)^{k_n}}+\ldots=f_r(x^0, \ldots, x^n),$$

$$r=1, \ldots, N,$$

при помощи метода Адамара (Hadamard, Le problème de Cauchy, Paris, Hermann, 1932). П. И. Кузнецов

4705. Формы Пфаффа. Внешние дифференциальные системы. Гальвани (Formes de Pfaff. Systèmes différentiels extérieurs. Galvani O.), Formulaire math. usage physiciens et ingrs, 1956, № 7, 57—65 (франц).

Формулируются основные положения исчисления внешних дифференциальных форм Картана, излагаются основные факты созданной Картаном теории систем дифференциальных уравнений. (E. Cartan; Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, Hermann, 1945). П. И. Кузнецов

4706. Уравнения и системы уравнений математической физики. Кахан (Équations et systèmes d'équations de la physique mathématique. Kahan Théo), Formulaire math. usage physiciens et ingrs, 1956, № 7, 75—91 (франц.)

При помощи характеристической формы дается классификация уравнений математической физики: они разделяются на параболические, гиперболические и эллиптические. Различные классические уравнения физики и техники рассматриваются с этой точки зрения. Излагаются известные методы их решения с учетом начальных и граничных условий. П. И. Кузнецов

4707. Некоторые методы решения граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Бергман (Some methods for solutions of boundary-value problems of linear partial differential equations. Bergman Stefan), Proc. Sympos. Appl. Math., 60, New York—Toronto—London, 1956, 11—29 (англ.)

Для решения граничных задач, для дифференциальных уравнений в частных производных, предлагается использование так называемых ядерных функций, строящихся из некоторой эффективно заданной системы частных решений, рассматриваемого уравнения с помощью их ортонормализации в данной области по соответствующим образом подобранной метрике.

В частности, пусть $P_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots)$ — некоторая полная (в классе решений данного уравнения) в рассматриваемой области B, система частных решений уравнения

$$L(\psi)=\frac{1}{4}\Delta\psi(x, y)-F(x, y)\psi(x, y)=0, \qquad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, а $F(x, y)$ — заданная, удовлетворяющая определенным условиям функция. Заметим, что $P_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots)$ могут быть выписаны явно на основании известных формул общего представления решений уравнения (1).

Ортонормализируя систему $P_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots)$ в B по метрике:

$$I_B(\Phi, \psi)=\iint_B\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+F\Phi\psi\right]dxdy,$$

получаем систему функций $\psi_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим ряд:

$$k(X, T)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(X)\psi_n(T),$$

$$(X=(x, y)\in B,\ T=(u, v)\in B),$$

который, как указывается в работе, сходится абсолютно и равномерно относительно обеих переменных в произвольной области $(\bar{B}', \bar{B}')$ $(X=(x, y)\in\bar{B}', T=(u, v)\in\bar{B}', \bar{B}'\in B)$, причем сумма ее $k(X, T)$ не зависит от исходной системы $P_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots)$. Функция $k(X, T)$ и называется ядерной функцией области B и уравнения (1) относительно метрики (2), с помощью которой решения основных граничных задач для рассматриваемого уравнения непосредственно даются соответственно по формулам:

$$\Phi(x, y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C\Phi(T)\frac{\partial k(X, T)}{\partial n_T}ds_T,\\ -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C\frac{\partial\Phi(T)}{\partial n_T}k(X, T)\,ds_T+\text{const},\end{cases}$$

где C — граница области B, n_T — внутренняя нормаль, а ds_T — линейный элемент C. При этом справедливо соотношение

$$k(X, T)=[N(X, T)-G(X, T)]:2\pi,$$

где N и G — классические функции Неймана и Грина.

В работе вышеописанный метод применяется далее как для определения постоянных, входящих в формулу Кристофеля—Шварца теории конформных отображе-

ний, так и для исследования уравнения потока сжимаемой жидкости.

Указывается также возможность применения ядерных функций и для пространственного случая. С этой целью, для определенного вида уравнений от трех независимых переменных выводится формула, отображающая аналитические функции от двух независимых комплексных переменных на класс решений рассматриваемого уравнения. М. Б. Гагуа

4708. Абелевы функционалы и их приложения к уравнениям с частными производными четвертого порядка. Агило-Фустер (Funcionales abeloides y aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales de cuarto orden. Aguiló Fuster Rafael), Collect. math., 1955—1956, 8, 1—221 (исп.)

Рассматривается задача Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial y^2} = a_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - c\frac{\partial}{\partial t}\right) u + f(x, y, t),$$

причем на протяжении всей работы все рассуждения особенно подробно, во всех деталях проводятся для уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} - 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + f(x, y, t).$$

Эти уравнения являются гиперболическими, но вырожденными, так как характеристическое уравнение определяет в проективной плоскости линию четвертого порядка с двумя самопересечениями. Начальные условия ставятся на произвольной достаточно гладкой поверхности $t=\varphi(x, y)$, наклон которой удовлетворяет определенным естественным требованиям. Для решения задачи автор применяет операторный метод «аналитических функционалов», развитый Фантапье в ряде работ 1926—1943 гг. Этот метод дает решение с помощью интеграла абелева типа в комплексной плоскости от произведения некоторой алгебраической функции, определяемой коэффициентами уравнения, на функцию, определяемую правой частью уравнения и начальным условием. Автор детально исследует эту алгебраическую функцию и преобразует с помощью довольно громоздких выкладок интегралы к вещественному виду, в результате чего решение оказывается выраженным через интегралы от начальных функций по основанию характеристического конуса и интеграл от правой части уравнения по телу этого конуса. Автор совсем не упоминает о формулах Херглоца—Петровского, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемому им вопросу. А. Д. Мышкис

4709. Некоторые преобразования Баклунда дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Реш (Some Baecklund transformations of partial differential equations of second order. Resch Daniel), Northwest. Univ. Studies. Ser. Math. and Phys. Sci., 1956, № 3, 97—114 (англ.)

Напоминаются общие сведения о преобразованиях Баклунда (геометрическая интерпретация, приложение к газовой динамике, обобщение условий Коши—Римана). Затем рассматривается преобразование вида

$$A^i z + B^i z^* = 0 \quad (i = 1, 2),$$

где A^i и B^i — линейные дифференциальные операторы первого порядка по трем независимым переменным и ставится вопрос о возможности выбора функций λ^i и μ^i так, чтобы выполнялись равенства

$$A^1(A^2 z + B^2 z^*) - A^2(A^1 z + B^1 z^*) = \lambda^1(A^1 z + B^1 z^*) + \lambda^2(A^2 z + B^2 z^*),$$
$$B^1(B^2 z^* + A^2 z) - B^2(B^1 z^* + A^1 z) = \mu^1(B^1 z^* + A^1 z) + \mu^2(B^2 z^* + A^2 z).$$

В результате получается ряд условий для коэффициентов операторов A^i и B^i и два линейных дифференциальных уравнения с частными производными второго порядка: одно для z, а второе для z^*. Таким способом осуществляется преобразование одного уравнения $\Delta(z) = 0$ в другое $\Delta^*(z^*) = 0$. Рассмотрен пример. И. С. Аржаных

4710. О дифференцировании спектральной функции оператора Лапласа. Левитан Б. М., Матем. сб., 1956, 39, № 1, 37—50

В области D n-мерного пространства с границей B рассматривается уравнение

$$\Delta u + \mu^2 u = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) \tag{1}$$

при условии

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_B = 0. \tag{2}$$

Пусть $\lambda_n = \mu_n$ — собственные значения, $\omega_n(x)$ — собственные функции, $\theta(x, y; \lambda) = \sum_{\mu_n^2 < \lambda} \omega_n(x)\,\omega_n(y)$ — спектральная функция задачи (1), (2).

В работе изучается асимптотическое поведение частных производных спектральной функции при $\lambda \to \infty$. Основной результат работы следующий: главный член асимптотики равен главному члену асимптотики спектральной функции оператора Лапласа во всем пространстве. Указывается применение этих результатов к исследованию сходимости и суммируемости дифференцированных разложений по собственным функциям задачи (1), (2). Р. А. Александрян

4711. О решении задачи Коши для уравнения $\Delta u - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)u = \partial^2 u/\partial t^2$ по методу С. Л. Соболева. Левитан Б. М., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, 20, № 3, 337—376

Пользуясь методом С. Л. Соболева, автор получил формулу:

$$u(x, t) = \frac{\partial^{\lambda+1} v_\lambda^{(0)}(x, t)}{\partial t^{\lambda+1}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_k} \frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial t^{\lambda+1}} \int_{|x-y| \leqslant t} w_\lambda^{(j)}(x, y; t) f(y)\, dy,$$

дающую решение, в явном виде, приведенного в заглавии уравнения, при условиях

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad (n = 2k+1;\ \lambda \geqslant k).$$

Кроме того, подробно исследовано поведение ядер $w_\lambda^{(j)}(x, y; t)$ при $t \to 0$, которое понадобилось автору, по-видимому, для обобщения его результатов (РЖМат, 1957, 2351) на случай уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, \ldots, x_n)\}u = 0$. Р. А. Александрян

4712. Письмо в редакцию. Левитан Б. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, 21, № 4, 599

Некоторые исправления и дополнительные пояснения к шестому параграфу работы автора (реф. 4711). Приведен правильный чертеж. Р. А. Александрян

4713. О разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u - \{\lambda - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} = 0$. Левитан Б. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 4, 437—468

Работа является развитием работы автора (РЖМат, 1957, 2351), посвященной уравнению $\Delta u - \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\} u = 0$. На основе проведенного автором (реф. 4711) исследования поведения решения соответствующей задачи Коши при $t \to 0$ получены формулы, дающие асимптотическое поведение спектральной функции при $\lambda \to \infty$ как в конечных, так и в бесконечных областях с оценкой остатка.

Кроме того, изучаются вопросы сходимости и суммируемости разложения по собственным функциям рассматриваемого уравнения.

Для функций с интегрируемым квадратом доказывается теорема о равной суммируемости по Риссу порядка $(n-1)/2$ разложения по собственным функциям и разложения в обычный интеграл Фурье. В дополнении к работе приведены некоторые новые результаты о суммировании кратных рядов и интегралов Фурье, соответствующих спектральному разложению при $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Р. А. Александрян

4714. О разложении по собственным функциям самосопряженного уравнения в частных производных. Левитан Б. М., Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, 5, 296—298

Результаты, полученные автором в работе (реф. 4713) для уравнения $\Delta u - \{\lambda - q(x_1, \ldots, x_n)\} u = 0$, распространяются здесь на случай общего самосопряженного эллиптического уравнения второго порядка с произвольным числом независимых переменных, при самосопряженном граничном условии.

Доказана, в частности, теорема о равной суммируемости по Риссу порядка $(n-1)/2$ разложения по собственным функциям уравнения и разложения в обычный n-кратный интеграл Фурье.

Р. А. Александрян

4715. О некоторых вопросах теории эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка на поверхностях. Данилюк И. И., Доповіді та повідомлення. Львівськ. ун-т, 1955, вип. 6, ч. 2, 96—99

На достаточно гладком двумерном многообразии R рассматривается эллиптическое дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i,j,s=1}^{2} \epsilon^{si} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a_s^j \frac{du}{dx^j}\right) = au, \quad a \geqslant 0, \quad (1)$$

a_s^j — заданное на R тензорное поле с H непрерывно дифференцируемыми компонентами, a — непрерывная скалярная плотность на R, $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$, $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$. Решения уравнения $Lu = 0$ называются квазигармоническими функциями; по аналогии с классическим случаем вводится понятие квазигармонической меры дуги относительно области.

Приводятся без доказательств утверждения:

1) Для того чтобы (открытая) поверхность R обладала (единственной) квазигармонической функцией Грина, необходимо и достаточно, чтобы граница R имела положительную квазигармоническую меру.

2) Если $a \not\equiv 0$, то на всякой открытой поверхности R существует однозначно определенная функция Грина уравнения (1).

3) На всякой замкнутой поверхности существует неотрицательное решение уравнения (1) с логарифмическим полюсом в произвольной точке поверхности.

4) На произвольной поверхности R с границей положительной квазигармонической меры существует частное решение уравнения $Lu = au + f$, где f — заданная скалярная плотность на R.

Первое утверждение обобщает классический результат (Неванлинна, Униформизация, М. 1955, гл. IV), остальные обобщают результаты Мирберга (РЖМат, 1956, 1289, 2164), установленные для случая, когда Lu есть оператор Лапласа Δu. Б. Р. Лаврук

4716. О дифференциальных свойствах и единственности решений некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений. Данилюк (Про диференціальни властивості і едність розв'язків, деяких еліптичних систем диференціальних рівнянь, Данилюк І. І), Бюл. науковой студ. конференції 1954 року, Ч. 2, Львів, Вид-во ун-ту, 1955, 108—111 (укр.)

Содержатся некоторые результаты относительно функциональных свойств обобщенных решений линейных эллиптических систем вида

$$L[u, v] = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$M[u, v] = d\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

где $a, \ldots, d$ — известные функции x и y, а также о геометрическом характере решений систем $L[u, v] = \alpha u + \beta v$, $M[u, v] = \gamma u + \delta v$ ($\alpha, \ldots, s$ — известные функции). Эти результаты в усиленной форме приведены в более поздних работах автора (Уч. зап. Львовского ун-та, 1956, 38 : 7, 75—88) и Б. В. Боярского (РЖМат, 1956, 5876). Б. В. Шабат

4717. О некоторых вопросах теории эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка на поверхностях. Данилюк И. И., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 1, 11—13

На поверхности R рассматривается поле один раз ко- и один раз контравариантного тензора α_i^j ($i, j = 1, 2$), и системой дифференциальных уравнений на R называется ковариантное равенство

$$\frac{du^1}{dx^i} = \alpha_i^j \frac{du^2}{dx^j}. \quad (1)$$

Предполагается, что поле тензора α_i^j имеет производные, удовлетворяющие условию Гельдера, и что система (1) эллиптического типа (это определяется при помощи надлежащим образом построенной квадратической формы). На R рассматриваются обобщенные решения u^1, u^2 системы (1) (квазигармонические функции) и комплекснозначные функции $f = u^1 + iu^2$ (квазианалитические функции). Для квазигармонических функций на поверхностях доказывается принцип максимума и теорема Харнака. Далее, на основании теоремы З. Я. Шапиро существования квазиконформных отображений с квазилинейным распределением характеристик доказывается, что произвольная функция $F(\zeta) = U^1 + iU^2$, обладающая в плоской области непрерывными всюду, за исключением конечного числа точек, частными производными и отличным от нуля якобианом, при помощи некоторого гомеоморфизма преобразуется в решение системы (1). Полученные результаты позволяют распространить на решения системы (1) на поверхностях альтернирующий метод Шварца и при его помощи построить теорию квазианалитических абелевых дифференциалов.

Далее вводятся пространства квазигармонических и квазианалитических на R функций, метризованные соответственно при помощи формул

$$(u^1, u^2) = \iint_R a^{ij} \frac{du^1}{dx^i}\frac{du^2}{dx^j}\, d\sigma, \quad (f, \bar{g}) =$$

$$= \iint_R b^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^j}\, d\sigma,$$

где a^{ij} и b^{ij} определяются через коэффициенты α_i^j, и доказывается, что эти пространства — гильбертовы. Это позволяет построить билинейные формы, играющие основную роль при решении граничных задач, и обобщить соответствующие результаты Бергмана и Шиффера, а также распространить теорему Римана о существовании отображений на системы вида (1), заданные на поверхностях. Б. В. Шабат

4718. О теоретико-функциональном методе в теории дифференциальных уравнений второго порядка на поверхностях. Данилюк (Про теоретико-функціональний метод в теорії диференціальних рівнянь другого порядку на поверхнях. Данилюк І. І.), Доповіді АН УРСР, 1956, № 5, 423—425 (укр.; рез. русск.)

Пользуясь терминологией и некоторыми понятиями своей работы (реф. 4717), автор рассматривает множество A решений ковариантного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа

$$Lu \equiv \varepsilon^{si} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\alpha_s^j \frac{\partial u}{\partial x^j}\right) = au \qquad (1)$$

на произвольной поверхности R при следующих условиях: величина a есть относительный инвариант, причем $a \geqslant a_0 > 0$, $a_0 = \text{const}$; α_i^j — двувалентное тензорное поле на R; ε^{si} — контравариантная антисимметрическая тензорная единичная плотность; поле инварианта a непрерывно на R; первые производные компонент поля α_i^j существуют и непрерывны на R в смысле Гёльдера; если $u \in A$, то существуют производные

$$\partial u/\partial x^i,\ \partial^2 u/\partial x^i \partial x^j,$$

непрерывные на любой поверхности R_1, $\bar{R}_1 \subset R$; интеграл

$$\|u\|^2 = \int\int_R \left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} + au^2\right) d\sigma,$$

$$a^{ij} = (\bar{a}^{ij} + \bar{a}^{ji})/2,\ \bar{a}^{ij} = \varepsilon^{si}\alpha_s^j,$$

конечен для всякого решения $u \in A$.

На множестве A вводится метрика

$$(u, v) = \int\int_R \left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} + auv\right) d\sigma, \qquad (2)$$

а также рассматриваются дистрибутивные функционалы

$$l(u) = u(\zeta), \qquad (3)$$

где ζ — фиксированная, но произвольно выбранная точка R.

Формулируются теоремы:

Теорема 1. Метризированное при помощи формулы (2) множество A решений уравнения (1) есть полное сепарабельное пространство Гильберта. Из сходимости некоторой последовательности $\{u_k\}$ элементов множества A по норме следует равномерная сходимость последовательностей $\{u_k\}$ и $\{\partial u_k/\partial x^i\}$ на любой поверхности R_1, $\bar{R}_1 \subset R$.

Теорема 2. Функционал (3) ограничен в A, т. е. является линейным. Для каждой внутренней точки $\zeta \in R$ существует такой элемент $\Psi(z, \zeta) \in A$ и при том только один, что

$$u(\zeta) = \int\int_R \left(a^{ij} \frac{\partial u(z)}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi(z, \zeta)}{\partial x^j} + au(z)\,\Psi(z, \zeta)\right) d\sigma,$$

причем

$$\|\Psi\|^2 \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^2(\zeta),\ \Psi(z, \zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu(z)\, u_\nu(\zeta),$$

так что $\Psi(z, \zeta)$ симметрично зависит от z и ζ, а ряд справа равномерно сходится (при фиксированном ζ) на всякой компактной части R_1, $\bar{R}_1 \subset R$. В предположении, что A непустое множество, функция

$$\Phi = \Psi/\|\Psi\|^2$$

имеет наименьшую норму среди всех $u \in A$, $u(\zeta) = 1$. Доказательство теоремы 2, как указывает автор, основано на двух приводимых в работе леммах, на теореме 1 и на теоремах общей теории гильбертовых пространств и линейных операторов в них.

Если $\bar{a}^{ij} = \bar{a}^{ji}$, т. е. уравнение (1) самосопряженное, то знание функции $\Psi(z, \zeta)$ дает возможность решить первую и вторую граничные задачи для каждой связной области $G \subset R$ с достаточно правильной границей Γ при помощи формул

$$u(\zeta) = \int_\Gamma u(z) \frac{\partial \Psi(z, \zeta)}{\partial \nu_z}\, ds,\quad u(\zeta) = \int_\Gamma \frac{\partial u(z)}{\partial \nu_z}\, \Psi(z, \zeta)\, ds.$$

Для несамосопряженного уравнения (1) получается формула

$$u(\zeta) = \frac{1}{2}\int_\Gamma u(z) \frac{\partial \Psi(z, \zeta)}{\partial \nu_z}\, ds + \frac{1}{2}\int_\Gamma \Psi(z, \zeta) \frac{\partial u(z)}{\partial \nu_z}\, ds.$$

В. А. Зморович

4719. О неравенстве Гарнака для линейных эллиптических уравнений. Серрин (On the Harnack inequality for linear elliptic equations. Serrin James), Итон леаналиса математит, J. analyse math., 1955—1956, 4, № 2, 292—308, 7 (англ.; рез. иврит.)

Доказывается неравенство Гарнака для положительных решений уравнения: $Lu = 0$, где $Lu = a_{ij}(P) \times \times \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(P) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(P)u$, $c \leqslant 0$. В случае $n = 2$ предполагается, что $(1/\lambda)\sum_1^n \xi_i^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \lambda \sum_1^n \xi_i^2$ (равномерная эллиптичность оператора L) и $\sum b_i^2 \leqslant M$; $-M \leqslant C$. Тогда для решения $u(P)$ уравнения $Lu = 0$, положительного в круге радиуса $a \leqslant 1$, доказывается существование константы K, зависящей только от λ и M, такой что $Ku(0) \leqslant u(P) \leqslant K^{-1}u(0)$ для всех P из круга радиуса $a/4$. Доказательство проводится элементарным путем с использованием принципа максимума и барьеров вида $v(P) = e^{-\alpha\sigma^2} - e^{-\alpha}$, где $\sigma^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2$.

В случае $n > 2$ тот же результат получается при дополнительном требовании непрерывности $a_{ij}(P)$ по Дини на границе круга. Для доказательства с помощью несложной конструкции строятся функции $K_+(P, Q)$ и $K_-(P, Q)$ (Q — точка границы γ этого круга) такие, что

$$LK_+ \geqslant 0,\ LK_- \leqslant 0, \qquad (1)$$

при любой непрерывной $f(Q)$

$$\lim_{P \to Q_0} \int_\gamma K_\pm(P, Q) f(Q)\, dS_Q = f(Q_0); \qquad (2)$$

существуют две константы $\alpha > 0$, $\beta > 0$, зависящие только от λ, M и модуля непрерывности $a_{ij}(P)$ на границе круга, для которых

$$K_+(P, Q) \geqslant \alpha,\ K_-(P, Q) \leqslant \beta \qquad (3)$$

при всех $Q \in \gamma$ и P из сферы радиуса $a/3$.

Другой вариант неравенства Гарнака доказывается с заменой требования непрерывности по Дини ограниченностью градиента u.

Полученные для сферы результаты обычным образом обобщаются для области и ее замкнутой подобласти; выводятся также соответствующие неравенства для решений неоднородного уравнения $Lu = f$.

И. В. Гирсанов

4720. Об изолированных особенностях решений эллиптических уравнений второго порядка. **Гилбарг, Серрин** (On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations. Gilbarg D., Serrin James), Итон леанализа математит, J. analyse math., 1955—1956, 4, № 2, 309—340, 7 (англ.; рез. иврит.)

Рассматривается невырождающееся уравнение эллиптического типа $Lu = \sum_{k,i=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x)$, где $x = (x_1 \ldots x_n)$ — точка n-мерного пространства и $c(x) \leqslant 0$. Уравнение рассматривается в сфере S_0 $(0 < r \leqslant r_0)$ с выключенным центром. В работе изучается локальное поведение решений $u(x)$ в зависимости от дифференциальных свойств коэффициентов уравнения.

Пусть a_{ik} непрерывны по Дини в точке 0 (функция $f(x)$ называется непрерывной по Дини в точке x_0, если $\int_0^a \frac{\omega(x)}{x} dx < \infty$, где $\omega(x)$ — модуль непрерывности $f(x)$ в точке x_0) и $|b_i| < N$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $Lu \geqslant 0$, где $c \equiv 0$, $u \neq \text{const}$. Тогда $u(x)$ удовлетворяет в S_0 обобщенному принципу максимума, т. е. $\limsup_{x \to 0} u(x) \leqslant \max u(x)|_{|x|=r_0}$, если выполнено условие

$$u(x) = \begin{cases} o(\log r), & n = 2, \\ o(r^{2-n}), & n > 2, \end{cases} \qquad r \to 0.$$

В случае $n > 2$ обобщенный принцип максимума имеет место, когда a_{ik} непрерывны в точке O, если $u(x) = O(r^{2-n+\delta})$, $\delta > 0$. Далее, применяя неравенства Гарнака (реф. 4719), авторы получают следующие теоремы:

Пусть $n > 2$ и a_{ik} непрерывны в точке O. Тогда существует предел $u(x)$ при $r \to 0$, если $|u| < M$. При $n = 2$ для существования предела достаточно ограниченности a_{ik}, b_i и условия $u \geqslant -M^2$. Положительная функция $V(x)$, $V(x) \to \infty$, удовлетворяющая в S_0 уравнению $Lu = 0$ называется фундаментальным решением.

Пусть $n = 2$ и уравнение имеет фундаментальное решение, тогда для любого положительного решения справедливо представление $u = KV + w$, где $K > 0$ и $w \in C^1$ при $0 \leqslant r \leqslant r_0$. Если коэффициенты уравнения удовлетворяют в S_0 условию Гёльдера, то V есть функция Грина для круга, а w — решение задачи Дирихле равное u при $r = r_0$.

В случае, если уравнение задано в дивергентной форме

$$Lu = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

где a_{ij}, b_i ограничены и измеримы и

$$u(x) = \begin{cases} O(|\log r|^{1-\delta}), & n = 2 \\ O(r^{2-n+\delta}), & n > 2 \end{cases} \qquad r \to 0,$$

то для уравнения выполнен обобщенный принцип максимума. В заключение автор приводит пример, указывающий на точность его результатов: у уравнения $\Delta u + g(r) \sum \frac{x_i x_k}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0$ существуют решения $u = u(r)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{u''}{u'} = \frac{1-n}{r[1+g(r)]}.$$

Пусть $n = 2$ и $g(r) = -2/(2 + \log r)$, тогда $u(r) = a + b/\log r$ и при $a = 1$, $b = 3$ $u = 1 + 3/\log r$, $u(0) = 1$, $u(e^{-3}) = 0$.

Отсюда видно, что в случае просто непрерывных коэффициентов принцип максимума не выполняется, а следовательно, не существует фундаментального решения.

Полагая $g(r) = 2/(\lg r - 2)$, получаем положительное решение $u = \log^3(1/r)$ (а не $O(\lg r)$, как в случае гладких коэффициентов).

При $n > 2$ и $g(r) = -1/(1 + (n+1)\log r)$,

$$u(r) = r^{2-n}/\log r\,(1 + o(r)),$$

т. е. $u(r) = o(r^{2-n})$ и нет обобщенного принципа максимума при $g = [(n-2)\log r - 2]/[\log r + 2]$, $u(r) = a + (b/\log r)$.

Л. Р. Волевич

4721. О некоторых новых постановках краевых задач, в частности смешанных задач для линейных эллиптических уравнений второго порядка. **Маджинес** (Su alcune recenti impostazioni dei problemi al contorno, in particolare misti, per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine. Magenes Enrico), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1956, 10, № 1-2, 75—84 (итал.)

Опираясь на результаты своей предыдущей работы (РЖМат, 1957, 457), автор доказывает следующее утверждение. Пусть дан потенциал простого слоя

$$v(P) = \int_l F(P, Q)\,\zeta(Q)\,dl_Q$$

с квадратично суммируемой плотностью ζ на дважды непрерывно дифференцируемой дуге l, причем ядром служит фундаментальное решение линейного эллиптического уравнения второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами (и отрицательным коэффициентом при неизвестной функции). Тогда производная от v по конормали ν к линии l_τ, полученной сдвигом каждой точки l на τ по нормали к l, сходится при $\tau \longrightarrow +0$ к некоторой функции $v_0 \in L_2(l)$ (аналогичное утверждение доказывается для площадного потенциала).

С помощью этого утверждения автор показывает, что при построении решения смешанной задачи для указанных уравнений (это построение выполнено им ранее; см. РЖМат, 1957, 7064) граничное условие $\partial u/\partial \nu|_{F_2} = 0$ можно считать удовлетворяющимся «в среднем» (т. е. на линиях $(F_2)_\tau$ при $\tau \to +0$); в упомянутой только что работе смысл этого граничного условия значительно менее прост. В качестве другого приложения доказано, что при решении смешанной задачи для уравнения Лапласа в постановке Мирберга (Myrberg L., Ann. Accad. Fennicae, Sar. A1, Math. Phys., 1951, № 103, 8 pp.), когда значения производной по нормали понимаются в точечном смысле, эти условия могут не задаваться на множестве нулевой емкости без нарушения теоремы о существовании и единственности решения. Наконец, с помощью того же утверждения автор показывает, что классы функций, примененных Америо и Чиммино ранее при решении краевых задач, тождественны. Автор указывает, что аналогичные утверждения имеют место для случая любого числа аргументов.

А. Д. Мышкис

4722. Геометрический признак разрешимости первой краевой задачи для уравнения эллиптического типа. Скоробогатько В. Я., Доповіді та повідомлення. Львівськ. ун-т, 1955, вип. 6. ч. 2, 108—112

Приводятся достаточные условия разрешимости в области D первой краевой задачи для уравнения

$$\sum_{k,\,l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l}+2\sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+cu=f,$$

если граница области D и коэффициенты уравнения удовлетворяют определенным условиям гладкости. Задача разрешима, если $\pi^2/d^2>\max_{x\in D} C^*$, где d — внутренний диаметр области D,

$$C^*=N\left(\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l}-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial b_l}{\partial x_l}+c\right),$$

а N — величина, обратная минимальному собственному значению матрицы $\|a_{ij}\|$ в области D. Работа является обобщением результатов автора, полученных для самосопряженного уравнения (РЖМат, 1956, 7360).

Примечание референта. Замечание к лемме, на котором основано доказательство указанного условия, ошибочно, однако теорема остается верной для $n=2$, если заменить C^* на другое выражение от коэффициентов уравнения. А. М. Ильин

4723. О целых решениях дифференциального уравнения $\Delta u=f(u)$. Вальтер (Über ganze Lözungen der Differentialgleichung. Walter Wolfgang), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, 57, 94—102 (нем.)

Под целым решением понимается дважды непрерывно дифференцируемая во всем пространстве функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая удовлетворяет указанному уравнению. Доказаны теоремы:

I. Пусть $f(s)$ непрерывна и положительна для $-\infty<s<+\infty$ и для $s\geqslant k$ существует положительная выпуклая функция $g(s)$ такая, что $g(s)\leqslant f(s)$ и $\int_k^\infty \frac{ds}{\sqrt{\int_k^s g(t)\,dt}}<\infty$. Тогда для $n\geqslant 2$ не существует ни одного целого решения.

II. Пусть $f(s)$ непрерывна, положительна и для достаточно больших s выпукла. Тогда расходимость интеграла $\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\int_0^s f(t)\,dt}}$ является необходимым и достаточным условием существования целых решений.

Теорема I верна и для уравнения $\Delta u=f(u)+f_1(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots)$, если f_1 — произвольная неотрицательная функция, а $f(s)$ удовлетворяет условиям теоремы I. А. М. Ильин

4724. Совпадение слабого и сильного продолжений линейного эллиптического дифференциального оператора. I. Нарасимхан (The identity of the weak and strong extensions of a linear elliptic differential operator. Narasimhan M. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 6, 513—514 (англ.)

На открытом множестве Ω в евклидовом пространстве R^n рассматривается линейный дифференциальный оператор:

$$D\equiv\sum_{j_1+\ldots+j_n\leqslant m} a_{j_1\ldots j_n}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}$$

с комплекснозначными неограниченно дифференцируемыми по $x\equiv(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициентами. Пусть D_1 есть ограничение D на множестве функций класса C^∞ с компактными носителями. Оператор D_k есть слабое продолжение D_1 в $L_2(\Omega)$, если его область M состоит из тех $f\in L_2$, для которых Df в смысле обобщенных функций, $\in L_2(\Omega)$, причем $D_w f=Df$, $f\in M$. Оператор D_s — сильное продолжение оператора D_1 в $L_2(\Omega)$ — определяется как замыкание в L_2 оператора D_2, определенного на множестве элементов $f\in L_2$ класса C^∞ таких, что $Df\in L_2(\Omega)$, равенством $D_2 f=Df$. В статье доказывается, что если D эллиптичен и формально самосопряжен, то слабое и сильное продолжения оператора D_1 в L_2 совпадают для любого открытого множества $\Omega\in R^n$. Если же Ω ограничено, то для совпадения D_w и D_s достаточно, чтобы D был только равномерно эллиптичным. Случай оператора второго порядка рассмотрен в статье Бирмана (РЖМат, 1954, 3328). И. И. Данилюк

4725. Совпадение слабого и сильного продолжений линейного эллиптического дифференциального оператора. II. Нарасимхан (The identity of the weak and strong extensions of a linear elliptic differential operator: II. Narasimhan M. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 7, 620 (англ.)

В терминах предыдущей статьи автора (реф. 4724) доказывается следующая теорема: Если оператор D эллиптичен в том смысле, что форма

$$p(x,\,\xi)=\sum_{j_1+\ldots+j_n=m} a_{j_1\ldots j_n}(x)\,\xi_1^{j_1}\ldots\xi_n^{j_n}$$

отлична от нуля для любой точки x из произвольного открытого множества $\Omega\in R^n$ и для всякого отличного от нуля действительного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то слабое и сильное продолжения оператора D_1 совпадают. И. И. Данилюк

4726. Предельные задачи на римановом многообразии. Нарасимхан (The problem of limits on a Riemannian manifold. Narasimhan M. S.), J. Indian Math. Soc., 1956, 20, № 4, 291—297 (англ.)

Используя теорию потоков и теорию линейных преобразований в гильбертовом пространстве, автор изучает самосопряженные продолжения оператора Лапласа $\Delta=d\delta+\delta d$ (Ж. де Рам, РЖМат, 1958, 703 К) заданного в пространстве D форм класса C^∞ с компактными носителями, в гильбертово пространство квадратично суммируемых форм на римановом многообразии M класса C^∞. Прежде всего автор доказывает предложение: Для того чтобы замыкание Δ в $L_2(M)$ было самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы множество потоков, удовлетворяющих уравнению $\Delta T=iT$ и таких, что одновременно с $T\in L_2$ также и $\Delta T\in L_2$, было пусто, что эквивалентно условию: $(\Delta\varphi,\,\psi)=(\varphi,\,\Delta\psi)$ для любых двух форм класса C^∞ и таких, что φ, ψ, $\Delta\varphi$, $\Delta\psi\in L_2$ (обобщение теоремы Бохнера—Гафнея—Иосида). Всякому самосопряженному продолжению $\tilde{D}$ оператора Δ и комплексному числу λ сопоставляется предельная задача: для заданных $f\in L_2(M)$ и $h\in L_2$, $\Delta h\in L_2$, требуется найти форму $u\in L_2$, $\Delta u\in L_2$, по условиям: $-\Delta u+\lambda u=f$, $h-u\in$ области определения оператора $\tilde{D}$. Устанавливается, в частности, что эта задача допускает единственное решение тогда и только тогда, когда λ принадлежит резольвентному множеству $\tilde{D}$; кроме того, если $\lambda=0$ и $\tilde{D}$ — неположительное самосопряженное продолжение Δ, то эта задача однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $(-\tilde{D}u,\,u)\geqslant C(u,\,u)$, для любого u из области определения $\tilde{D}$, где C — положительная от u не зависящая постоянная. Библ. 11 назв. И. И. Данилюк

4727. О некоторых дифференциальных уравнениях в частных производных и их особенностях. Кре й-

сиг (On certain partial differential equations and their singularities. Kreyszig Erwin), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, № 5, 805—820 (англ.)

В своей предыдущей работе (РЖМат, 1957, 3132) автор выделил определенный подкласс эллиптических уравнений, по терминологии автора, экспоненциального типа, т. е. уравнений, для которых производящая функция $E(z, z^*, t)$ имеет вид:

$$E(z, z^*, t) = \exp\left\{ \sum_{\sigma=0}^{m} q_\sigma(z, z^*) t^\sigma \right\},$$

и указал, что частные решения таких уравнений, соответствующие (по известной формуле Бергмана (Bergman S., Duke Math. J., 1947, 14, 349—366) функциям $f(\zeta) = \zeta^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, удовлетворяют, независимо от n $(n = 0, 1, \ldots)$, также некоторым обыкновенным дифференциальным уравнениям. В настоящей работе дается эффективное построение этих уравнений и исследуются особенности их коэффициентов в зависимости от особенностей коэффициентов соответствующих исходных уравнений. М. Б. Гагуа

4728. **Видоизмененные граничные задачи для квазилинейных эллиптических уравнений.** Дафф (Modified boundary value problems for a quasilinear elliptic equation. Duff G. F. D.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 2, 203—219 (англ.)

В ограниченной области D n-мерного евклидова или риманова пространства рассматривается уравнение $\Delta u = -F(P, u)$, где $F(P, u)$ — непрерывная функция u и $P \subset D$. Для этого уравнения изучается задача Дирихле и Неймана в новой видоизмененной постановке.

Теорема 1. Пусть заданная на границе B области D функция $f(P) \subset C_1$, $0 < m_0 \leqslant f(P) \leqslant M_0$, $F(P, u)$ — положительная неубывающая функция u и пусть $M > 0$. Тогда существует решение $u(P)$ уравнения $\Delta u = -F(P, u)$ такое, что $u(P)|_B = tf(P)$, $\max_{P \subset D+B} u(P) = M$, где t — некоторое число. Эта задача сводится к нахождению решения интегрального уравнения

$$u(P) = \int_D G(P, Q) F(Q, u(Q))\, dV_Q + tV_0(P),$$

где $G(P, Q)$ — функция Грина для задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D, $V_0(P)$ — решение уравнения Лапласа, принимающее на границе B значения $f(P)$. С помощью теоремы Шаудера и Лере доказывается, что функциональное уравнение $T_k[u] = u$ имеет решение при $0 \leqslant k \leqslant 1$, где

$$T_k[u] = \int_D G(P, Q) F(Q, ku(Q))\, dV_Q + t_k[u]\, V_0(P)$$

и $t = t_k[u]$ выбирается так, что $\max_{D+B} T_k[u] = M$. Этим же путем устанавливаются следующие теоремы:

Теорема 2. Пусть $F \geqslant \delta > 0$, $f \subset C^1$, $M > 0$. При подходящем выборе параметра t существует решение $u(P)$ уравнения $\Delta u = -tF(P, u)$, принимающее на границе B заданные значения $f \leqslant M$, и $\max_{D+B} u(P) = M$.

Теорема 3. Пусть $F(P, 0) = 0$, $F_u(P, u) \geqslant \delta > 0$. Тогда существует при подходящем выборе параметра t решение $u(P)$ уравнения $\Delta u = -F(P, tu)$ такое, что $u|_B = f \leqslant M$ и $\max_{D+B} u(P) = M$.

Теорема 4. Пусть $F(P, u) \geqslant -F_0$, $F_u(P, u) \geqslant 0$, $M > 0$, $\rho(P) \geqslant \rho_0 > 0$. Тогда при подходящем выборе t существует решение $u(P)$ уравнения $\Delta u = -F(P, u) - t\rho(P)$ такое, что $u|_B = f$ и $\max_{P \subset D+B} u(P) = M$. Для видоизмененной задачи Неймана с помощью теоремы Шаудера и Лере доказывается следующая

Теорема 5. Пусть $F(P, u) \geqslant F_0$, $F_u(P, u) \geqslant 0$, $q_0, q_1 \subset C_1$, $q_1 > 0$. Тогда существует в D решение $u(P)$ уравнение $\Delta u - \delta u = -F(P, u)$ удовлетворяющее на границе B условию $du/dn = q_0(P) + tq_1(P)$ и такое, что $\max_{D+B} u(P) = M$. Вопрос о единственности решения указанных задач в работе не рассматривается. В работе не оговорены необходимые предположения о гладкости $F(P, u)$. О. А. Олейник

4729. **Некоторые свойства решений одной задачи с особенностью и параметром.** Брусс (Quelques propriétés de la solution d'un problème singulier à un paramètre. Brousse Pierre), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 17, 2093—2094 (франц.)

Уравнение $\Delta\Phi - \dfrac{\lambda}{y^2}\Phi(x, y) = 0$ рассматривается в области D, ограниченной кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$, и отрезками Δ оси x, λ — действительная постоянная и $\lambda > \lambda_0$, $(\lambda_0 \geqslant -1/4)$. На границе Γ задана функция $\varphi(P)$, непрерывная всюду, кроме конечного числа точек S_i, и такая, что в окрестности каждой точки A_i пересечения Γ и оси x

$$\varphi(P) = O(A_iP)^{-\mu}, \qquad \mu_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda_0}}{2}.$$

Ставится задача: найти решение $\Phi(\lambda/M)$ рассматриваемого уравнения, регулярное в D, принимающее на Γ значения $\varphi(P)$ во всех точках непрерывности $\varphi(P)$ и такое, что оно будет $O\left(\ln\dfrac{1}{S_iM}\right)$ в точках S_i, $O(A_iM)^{-\mu}$, $\left(\mu = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}\right)$, в точках A_i и $O(y^\delta)$, $(\delta = 0$ для $\lambda \geqslant 0$, $\delta = 1 - \mu$ для $-1/4 < \lambda < 0)$, на Δ. Утверждается существование единственного решения $\Phi(\lambda/M)$ поставленной задачи. Если $\varphi(P)$ одного знака, то $\Phi(\lambda/M)$ — убывающая функция λ для всех точек области D. При $\lambda \to \infty$ $\Phi(\lambda/M) \to 0$ равномерно в любой строго внутренней подобласти D. О. А. Олейник

4730. **О второй и третьей граничной задаче для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + qu + f = 0$.** Лоухиваара (Über das zweite und dritte Randwertproblem für die Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} + qu + f = 0$. Louhivaara Ilppo Simo), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. AI, № 203, 14 (нем.)

Вариационными методами исследуются вторая и третья краевые задачи для уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + qu = -f.$$

При этом не предполагается, что квадратичная форма, отвечающая задаче, дефинитна. Доказано, что пространство функций с конечным интегралом Дирихле разлагается в сумму трех подпространств, в которых соответственно эта форма положительна, отрицательна или равна нулю. Последние два пространства — конечномерны. Доказана теорема существования вариационного решения второй и третьей краевых задач, если правая часть удовлетворяет конечному числу условий. М. И. Вишик

4731. **О проблеме Коши для гиперболических уравнений и дифференцируемость решений эллиптических уравнений.** Лакс (On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations. Lax Peter D.), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 4, 615—633 (англ.)

Исследуется задача Коши для гиперболических систем вида:

$$Lu \equiv \sum_i A_i u_{x_i} + Bu = 0$$

с симметрическими матрицами A_i. Вводятся пространства с нормами отрицательного порядка. Доказывается непрерывная зависимость в этой норме решения задачи Коши от начальных условий. Отсюда переходом к сопряженному оператору получается существование сколь угодно гладкого решения задачи Коши и его единственность. Во второй части работы доказана теорема о дифференциальных свойствах слабого решения u эллиптического уравнения порядка $2m$ $Lu = v$: если v имеет в L_2 производные до порядка j, то при достаточной гладкости коэффициентов, решение u имеет внутри области производные до порядка $2m + j$, принадлежащие L_2. Этот результат другим методом был ранее получен К. Фридрихсом.

М. И. Вишик

4732. О проблеме Гурса для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка. Шмидт (Sur le problème de Goursat concernant les équations différentielles hyperboliques du second ordre. Szmydt Z.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 6, 571—575 (франц.; рез. русск.)

Для уравнения

$$z_{xy} = f(x, y, z, p, q) \qquad (1)$$

ищется решение, принимающее заданные значения на двух пересекающихся кривых:
$y = \gamma(x)$; $x = \lambda(y)$; $|x| \leqslant \alpha$; $|y| \leqslant \beta$; $\lambda(0) = \gamma(0) = 0$.

Задача эта легко сводится к системе интегральных уравнений, аналогичных уравнениям типа Вольтерра.

При некоторых дополнительных предположениях доказывается существование и единственность решения этой системы интегральных уравнений, а следовательно, и поставленной задачи для уравнения (1). Для исследования интегральных уравнений вместо традиционного применения метода последовательных приближений автор пользуется теоремой о неподвижной точке.

В. М. Бабич

4733. Элементарное решение одного разлагающегося оператора гиперболического типа четвертого порядка. Тиссен (Solution élémentaire d'un opérateur hyperbolique décomposable du quatrième ordre. Thyssen M.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 6, 371—382 (франц.)

Определяется элементарное решение для оператора с постоянными коэффициентами вида

$$\left(-\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_2\right)\left(-\Delta_a + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2\right),$$

где $\Delta \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\Delta_a = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $a_i > 0$;

для случаев $n = 1$, 2 и 3 операционным методом (Garnir H. G., C. r. Acad. sci., 1952, 234, 583—585; Thyssen M., Archives originales du C. N. R. S., 1954, № 353, 1—30). При $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ получаются известные результаты Герглотца и Бюро (Herglotz G., Ber. Verhandl. Akad. Wiss. Leipzig, 1928, 80; Bureau F., Bull. cl. Sci. Acad. roy. Belgique. 1948, 34, 566-591; Mém. Acad. roy. Belgique, Cl. sci., 1948, 21, 6).

Б. Р. Лаврук

4734. Явное решение задачи Коши обобщенного гиперболического уравнения с тремя аргументами. Скоробогатько В. Я., Доповіді та повідомлення. Львівськ. ун-т, 1953, вип. 4, ч. 2, 61—64

Развивая и обобщая известный способ В. И. Смирнова и С. Л. Соболева (Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, М.—Л., Гостехиздат 1949, стр. 196) построения класса аналитических решений уравнения цилиндрических волн, автор строит подобные решения уравнения

$$\sum_{k_1+k_2+k_3=n} a_{k_1k_2k_3} \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial t^{k_3}} = 0, \quad n = 2k \geqslant 4, \quad (1)$$

где $a_{k_1k_2k_3}$ — постоянные и такие, что кривая

$$H(\xi_1, \xi_2, 1) = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} a_{k_1k_2k_3} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} 1^{k_3} = 0$$

распадается на $n/2$ овалов, охватывающих начало координат. В частности, разрешающее ядро задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными:
$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0$; $k = 0, 1, \ldots, n-2$, $\left.\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=0}$ — задана и отлична от 0, получается в виде контурного интеграла в плоскости некоторой комплексной переменной.

И. Л. Кароль

4735. Замечания к задаче Коши для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с постоянными коэффициентами и несколькими независимыми переменными. Курант, Лакс (Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables. Courant R., Lax A.), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 4, 497—502 (англ.)

Исследуется задача Коши для системы гиперболических уравнений вида

$$Lu \equiv g(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях. Для этой цели уравнение (1) заменяется приведенным уравнением относительно двух независимых переменных t и $y = \sum \alpha_\nu x_\nu$, где α — любой единичный вектор в n-мерном пространстве. Задача Коши для приведенного уравнения имеет решение, непрерывно зависящее от правой части и от параметров α_ν. По этому решению строится решение исходной задачи Коши на основе теоремы о восстановлении функции по значениям ее интегралов по плоскостям.

М. И. Вишик

4736. О теореме крайних значений. Вылкович В., Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, 1, № 1, 35—43

Статья является переводом работы того же автора (РЖМат, 1956, 6582).

Т. Д. Вентцель

4737. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца. Шатунов М. П., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1956, вып. 6, кн. 2, 247—253

Рассматривается уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + ku = 0 \qquad (1)$$

в области (V), граница которой есть одна из координатных поверхностей в некоторой криволинейной системе координат ξ, η, φ. При этом предполагается, что: а) $k = |k| e^{i\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; б) элемент дуги в координатах ξ, η, φ определяется формулой $ds^2 = [p^2(\xi) + \rho^2(\eta)](d\xi^2 + d\eta^2) + r^2(\xi) q^2(\eta) d\varphi^2$, где p, ρ, r, q непрерывны, а r и q, кроме того, непрерывно дифференцируемы в замыкании прямоугольной (предполагаемой конечной) области $\Omega(a < \xi < b, c < \eta < d)$, являющейся образом исходной области (V) при отображении $(\xi, \eta, \varphi) \to (x, y, z)$. Если u не зависит от φ, то

для оператора Лапласа Δ и в уравнении (1) имеем $\Delta u = Lu$, где

$$Lu = \frac{1}{r^2(\xi)+\rho^2(\eta)}\left[\frac{1}{p(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}p(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{q(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}q(\eta)\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]. \qquad (2)$$

Основной результат:

Пусть $\psi(\tau_1, \lambda)$ — решение уравнения $\frac{1}{q(\tau_1)}\frac{d}{d\eta}q(\tau_1)\frac{d\psi}{d\eta} + k\rho^2(\tau_1)\psi - \lambda\psi = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $\psi(c, \lambda) = 0$, $\psi'_{\tau_1}(c, \lambda) = 1$ и пусть R_λ — резольвента дифференциального оператора в $L^2(a, b)$, определенного дифференциальным выражением

$$lv = \frac{1}{p(\xi)}\frac{d}{d\xi}p(\xi)\frac{dv}{d\xi} + kp^2(\xi)v$$

и краевыми условиями $v(a) = v(b) = 0$; наконец, пусть C — прямая в λ-плоскости, направленная так, что на правую сторону от нее функция $\psi(d, \lambda)$ не имеет нулей (доказывается, что такая прямая существует). Для любой дважды непрерывно дифференцируемой в $[a, b]$ функции $f(\xi)$, удовлетворяющей условиям $f(a) = f(b) = 0$, формула

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_c E_\lambda(\eta) R_\lambda f d\lambda,$$

где $E_\lambda(\eta) = \psi(\eta, \lambda)/\psi(d, \lambda)$ определяет решение краевой задачи

$$Lu + ku = 0, \quad u|_{\xi=a} = u|_{\xi=b} = u|_{\eta=c} = 0; \quad u|_{\eta=d} = f(\xi).$$

При доказательстве используются асимптотические формулы для $R_\lambda f$, полученные автором в его предыдущей статье (РЖМат, 1956, 6593). М. А. Наймарк

4738 К. Теория потенциала. Нодзаки Ясуо, Токио, Токайт сёбо, 1953, 350 иен (японск.)

Книга состоит из 9 глав. В гл. I—VII даны основные понятия из теории потенциала и связанных с ней вопросов. Гл. VIII посвящена проблеме Дирихле, в гл. IX освещено новое направление в теории потенциала, появившееся в настоящее время.

Содержание книги: Гл. I. Общая теория. Рассматриваются функции одной переменной, заданные на гладкой кривой, двух переменных — на гладкой поверхности. Гл. II. Понятие потенциальной функции. Приведены различные виды потенциальной функции, потенциал 2-го слоя, логарифмический потенциал и др. Гл. III. Теория потенциала в пространстве. Рассматриваются уравнение Лапласа, разложения потенциальной функции в ряд, многочлены Лежандра, ньютонов потенциал, шаровые функции, разложение гармонических функций в ряд по сферическим, разложение потенциальной функции в окрестности бесконечно удаленной точки, поведение ньютонова потенциала на бесконечности, логарифмический потенциал. Гл. IV. Существование объемного потенциала. Гл. V. Гармонические функции. Приведена формула Грина для бесконечной области, теорема Гаусса и ее обращение. Гл. VI. Функция Грина и интеграл Пуассона. Рассматривается проблема Кельвина, функция Грина и интеграл Пуассона. Гл. VII. Гармонические ряды функций. Приведены теоремы Гарнака, теорема Асколи, рассмотрены особые точки гармонических функций. Гл. VIII. Проблема Дирихле. Дан исторический обзор, решение задачи Дирихле с помощью интегральных уравнений, рассматриваются супергармонические и субгармонические функции, теоремы Лебега, Винера. Гл. IX. Новая теория потенциала. Рассмотрены обобщенный потенциал, проблема равновесия, емкость, нулевая емкость, задача Дирихле. Н. И. Мозжерова

4739 К. Уравнения в частных производных. (Equations aux dérivées partielles (Formulaire mathém. usage physiciens et ingrs., № 7). Paris, Centre Nat. Rech. Scient., 1956, 115 p.) (франц.)

Настоящий сборник посвящен уравнениям в частных производных. Содержащиеся в нем статьи (Janet M. (Жане), реф. 4701, 4702, 4703; Jermain P. (Жермен), РЖМат, 1957, 7880; Fourés-Bruhat V. (Фурес-Брюа), реф. 4704; Galvani O. (Гальвани), реф. 4705; Duchon R., Brelot M. (Дюшон, Брело), РЖМат, 1957, 5592; Kahan T. (Кахан), реф. 4706; Robin L. (Робен), РЖМат, 1957, 7903; Pétiau G., Colombo S. (Петьо, Коломбо), РЖМат, 1957, 4905) имеют целью ознакомить с современным состоянием различных разделов уравнений в частных производных. Указана литература, в которой можно найти более подробное изложение затронутых вопросов. Для первого ознакомления физиков и инженеров с уравнениями в частных производных этот сборник представляет интерес. П. И. Кузнецов

4740 Д. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа. Ильин В. А. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

4741. Приближенный численный метод расчета переходных процессов в линейных и нелинейных системах. (Метод рекуррентных формул). Хухриков С. С., Тр. Моск. авиац. ин-та, 1957, вып. 78, 59 стр., илл.

Исследуется приближенное представление переходных функций линейных и нелинейных систем на основании следующего соотношения:

$$X[(m+1)\tau] = (-1)^m \frac{1}{m!\,\tau^{m+1}}\left[\frac{d^m X(p)}{dp^m}\right]_{p=1/\tau}.$$

В настоящее время по указанному вопросу имеется обширнейшая литература. Рассматриваемый метод наиболее подходит к методу А. А. Красовского и Г. С. Поспелова (РЖМат, 1955, 968). Автором развиты приемы построения переходных функций, а также решены смежные вопросы, из которых наиболее важными являются приближенные представления интеграла свертки функций.

Приведено значительное число примеров и интересных иллюстраций методов решения различных задач. Г. М. Уланов

4742. О решении дифференциального уравнения с нелинейностью, проявляющейся в наличии линейного и кубического слагаемого в члене со второй производной. Шэнь Цзи-нэн (On the solution of a differential equation with nonlinearity appearing in the second derivative of combined linear and cubic terms. Shen Chi-neng), Quart. Appl. Math., 1957, 15, № 1, 11—30 (англ.)

Рассматривается задача о колебании уровня при течении жидкости через два последовательно включенных сосуда, из которых один имеет форму прямого, а второй — параболического цилиндра.

Задача сводится к исследованию уравнения

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}(Y + \beta Y^2) + M_n\frac{d}{d\sigma}(Y + \beta Y^3) +$$
$$+ M_1\frac{dY}{d\sigma} + Y = r, \qquad (1)$$

где β, M_n, M_1 и r — параметры (числа).

Исследуется топологическая структура фазовой плоскости уравнения (1) при разных значениях параметров. М. А. Айзерман

4743. **Математические свойства метода корневых годографов, применяемого при разработке системы управления. Реза** (Some mathematical properties of root loci for control system design. Reza F. M.), Commun. and Electronics, 1956, № 23, 103—108 (англ.)

В работе содержится изложение метода корневых годографов и его связи с передаточными функциями автоматики управляемых систем с сосредоточенными и распределенными параметрами.

В статье формулируются теоремы о свойствах указанных годографов, построенных в K-плоскости, где K — коэффициент усиления системы автоматического управления. Формулируются условия, дающие зависимость между годографами в K- и S-комплексной плоскости ($S = \sigma + j\omega$), дающими решение в областях устойчивости рассматриваемых систем. Г. М. Уланов

4744. **Построение переходного процесса в системах автоматического регулирования по характеристикам их отдельных звеньев. Цыпкин Я. З., Гольденберг Л. М.,** Тр. Всес. заочн. энерг. ин-та, 1957, вып. 7, 90—106

Излагается приближенный метод построения переходных процессов в линейных системах автоматического регулирования по передаточным функциям или временным характеристикам отдельных звеньев этих систем. Метод основан на замене непрерывных временных характеристик ступенчатыми и применении дискретного преобразования Лапласа и позволяет сравнительно просто вычислить переходный процесс в дискретные моменты времени. Приводятся обобщения предложенных методов на случай, когда известны лишь экспериментально снятые временные характеристики звеньев. Г. М. Уланов

4745. **О некоторых методах исследования дифференциальных уравнений процессов регулирования 4-го порядка и избранные примеры приложения. Лоренц** (Über einige Verfahren zur Behandlung von Regelungs-Differentialgleichungen vierter Ordnung und ausgewählte Anwendungsbeispiele. Lorenz Ingward Martin. VDI-Forschungsh., 1957, № 460, 44 S., ill.) (нем.; рез. англ.)

В работе И. А. Вышнеградского, положенной в основу теории регулирования (Z. Civiling., 1877, 23, 95—132), исследования устойчивости системы прямого регулирования были сведены к изучению линейного дифференциального уравнения 3-го порядка и был построен график, выделяющий в плоскости двух существенных параметров область устойчивости и область, где все корни соответствующего характеристического уравнения действительны. В дальнейшем этот же график был дополнен линиями, соответствующими одинаковому распределению корней характеристического уравнения, либо одинаковым показателям, характеризующим процесс, описываемый уравнением. За последние 20 лет некоторые авторы выполнили подобное же построение для линейного дифференциального уравнения 4-го порядка. В связи с тем, что такое уравнение содержит не менее трех существенных параметров, построение ведется в плоскости двух параметров при фиксированном значении третьего параметра.

Реферируемая работа посвящена обзору этих построений и их дальнейшему развитию. Приводится много примеров вывода уравнений для простейших систем автоматического регулирования, имеющих характеристическое уравнение 4-го порядка. Приведены примеры использования построенных графиков для практических расчетов. М. А. Айзерман

4746. **По поводу работ Р. Вернича о регуляризации и периодических решениях задачи трех тел. Мерман Г. А.,** Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1956, 6, № 6, 408—415 (рез. нем.)

Вернич утверждает, что в ряде работ (реф. 4747; 4764 К) ему удалось найти преобразование независимой переменной, которое полностью устраняет все особые точки решения задачи трех тел на всей комплексной плоскости. Кроме того, он получает парадоксальный результат об отсутствии в задаче трех тел периодических решений, кроме лагранжевых. В настоящей работе показывается несостоятельность обоих утверждений Вернича. Резюме автора

4747. **Условия соударений в задаче трех тел. Вернич** (Die Stossbedingungen im Dreikörperproblem. Vernić Radovan), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1954, 9, № 1, 3—13 (нем.; рез. хорв.)

Приведен ряд соотношений, которые должны выполняться в задаче трех тел для различных видов соударений, являющихся подвижными особыми точками решений дифференциальных уравнений небесной механики. Часть результатов приводится без доказательства, со ссылкой на две основные работы автора (Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, 8, № 4, реф. 4764К).

Основные условия соударений, полученные автором, следующие:

Лемма III. Для каждого вида соударений имеют место соотношения:

$$1/V(0) = 0,\ (dJ/du)_0 = 0,\ (dJ/dt)_0 = 0,\ u_0 + 2ht(u_0) = 0,$$

где V — потенциальная функция, J — момент инерции, t — время, u — псевдовремя (регуляризирующая переменная Леви—Чивита, связанная со временем соотношением $dt = du/V$).

Следствие II и теорема II. Двойные и тройные соударения в задаче трех тел не могут иметь точки сгущения на конечном расстоянии.

Теоремы III, IV, V. Вещественные тройные соударения в задаче трех тел имеют место только при прямолинейном движении. В общем случае такие соударения являются мнимыми, причем в инерциальной системе соударение происходит в одной и той же точке комплексного пространства.

Автор приходит к выводу, что все соударения представляют собой критические особые точки типа двулистных точек ветвления, а мнимые соударения являются трехлистными особыми точками.

Примечание референта. Утверждения автора относительно свойств мнимых соударений основываются на исследовании задачи двух тел и поэтому не могут считаться строго доказанными. Г. А. Мерман

4748. **Оптимальные процессы в линейных системах. Гамкрелидзе Р. В.,** Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 252—254

4749. **Бесконечная система линейных уравнений, полученная в теории дифракции. Магнус** (An infinite system of linear equations arising in diffraction theory. Magnus W., N. Y. Univ. Inst. Math. Sci. Div. Electromagn. Res. Res. Rept, 1955, № EM-80, 19 pp.) (англ.)

Рассматривается бесконечная система линейных уравнений, полученная в теории дифракции от круглого отверстия. Коэффициенты этой системы зависят от некоторого параметра α. В работе показано, как находится приближенное решение этой системы для случаев, когда α является действительным или часто мнимым числом. Для достаточно малых значений $|\alpha|$ это было сделано ранее (Levine H., Schwinger J., Phys. Rev., 1948, 74, 958—974).

§ 1. Введение. Рассматривается уравнение

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad (1)$$

которое описывает плоскую дифракционную волну, падающую перпендикулярно на плоский экран с круглым отверстием. Предполагается, что $u \equiv 0$ на поверхности экрана вне отверстия и что $u = \Phi(p)$ внутри отверстия радиуса a $(0 \leqslant p \leqslant a)$. Тогда, если $\Phi(p)$ разлагается в ряд по полиномам Лежандра типа

$$\Phi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_{2n+1}(\sqrt{1 - p^2/a^2}), \qquad (2)$$

то, согласно результатам Боукампа, на которые ссылается автор (РЖФиз, 1956, № 1, 2228), коэффициенты b_n удовлетворяют бесконечной системе уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_{m,n} b_n = \frac{6}{i\alpha}\delta_{m,0}, \qquad (3)$$

$$\alpha = ka,\ \delta_{0,0} = 1,\ \delta_{m,0} = 0, \text{ если } m \neq 0,$$

$$d_{m,n} = \left(\frac{6}{\alpha}\right)^2 \frac{\Gamma(n+3/2)}{n!}\,\frac{\Gamma(m+3/2)}{m!}\,G^*_{m,n}(\alpha),$$

$$G^*_{m,n}(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{v^2-1}}{v^2} J_{2m+3/2}(\alpha, v)\, J_{2n+3/2}(\alpha, v)\, dv,$$

J — функция Бесселя 1-го рода.

§ 2. Вместо коэффициентов b_n разложения (2) вводятся величины

$$s_n = (-1)^n \frac{\Gamma(n+3/2)}{n!} b_n,$$

рассматривается система линейных уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_{m,n} s_n = t_m, \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ \ldots), \qquad (4)$$

где

$$G_{m,n} = (-1)^{m+n} G^*_{m,n},$$

$$t_m = -\frac{i\alpha}{6}\,\frac{m!\,(-1)^m}{\Gamma(m+3/2)}\,\delta_{m,0},$$

$$\delta_{m,n} = 0, \text{ если } m \neq n,$$

$$\delta_{n,n} = 1$$

и доказывается, что при существовании предела

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\Gamma(n+3/2)} s_n P_{2n+1}(1-\varepsilon)$$

и выполнении условий

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{s_n}{n + \frac{1}{2}} \right|^2 < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (4m+3)\,|t_m| < \infty$$

определение решения системы (4) сводится к решению интегрального уравнения

$$T(s) = S(s) + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 K(s, \sigma; \alpha)\, S(\sigma)\, d\sigma, \qquad (5)$$

где

$$S(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n P_{2n+1}(\sigma),$$

$$T(s) = \sum_{m=0}^{\infty} t_m P_{2m+1}(s).$$

Доказывается существование и единственность непрерывного решения интегрального уравнения (5), если α — либо действительное, либо чисто мнимое число.

И. П. Макаров

4750. Расчет устойчивости сложных осенагруженных стержней при помощи преобразования Лапласа и матричной алгебры. Вагнер (Die Stabilitäts-berechnung abgesetzter Knickstäbe mit Hilfe der Laplace-Transformation und der Matrizenrechnung. Wagner Hans), VDI-Zeitschrift, 1957, 99, № 25, 1251—1256 (нем.)

Исследуется изгибание осенагруженного стержня, состоящего из m кусков с различными жесткостями изгиба. Математически это приводит к решению задачи о собственных значениях для уравнения

$$y^{IV} + k(x)\, y'' = 0, \qquad (1)$$

где $k(x)$ — кусочно-постоянная, причем все постоянные зависят от одного параметра. Вместе с уравнением (1) рассматриваются 4 различных типа однородных граничных условий (случаи Эйлера).

Решение задачи протекает следующим образом. Уравнение (1) преобразуется в систему уравнений типа (1) для тех отдельных промежутков, в которых $k(x)$ сохраняет постоянное значение. Полученные уравнения связаны между собой требованием непрерывности функций y, y', y'', y''' во всем промежутке. Уравнения типа (1) решаются при помощи операционного исчисления, связь между значениями y, y', y'', y''' в начале и конце промежутка дается в матричной форме. Найдены уравнения для нахождения собственных значений в указанных 4 случаях граничных условий. В случае $m = 2$ полученное первое собственное значение и критическая нагрузка сравниваются с теми приближенными значениями, которые получаются по методу Рица и по методу конечных разностей.

Э. Я. Риекстыньш

4751. Об одном случае плоского движения трех материальных точек. Газарх и Л. А., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 2, 203—213

4752. Изгибание неоднородной балки. Джонс (The flexure of a non-uniform beam. Jones E. E.), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 1, 799—806 (англ.)

4753. Анализ непрерывной балки с помощью рядов Фурье. Ли Сэн (Analysis of continuous beams by Fourier series. Lee Seng-Lip), J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1957, 83, № 4, 1399—1—1399—13 (англ.)

4754. Влияние гироскопических сил на движение неконсервативной системы. Меркин Д. Р., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1955, 103, 107—125

Рассматриваются материальные системы, уравнения возмущенного движения которых можно привести к виду

$$\ddot{q}_k + b_k \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} [g_{kj}\dot{q}_j + (c_{kj} + e_{kj})\, q_j] = 0, \qquad (1)$$

где $g_{kj} = -g_{jk}$, $c_{kj} = c_{jk}$, $e_{kj} = -e_{jk}$, и соответствующие силы гироскопические, потенциальные и неконсервативные (последние названы радиальной коррекцией).

Для такой системы изучены необходимые условия асимптотической устойчивости, которые формулируются аналогично классическим теоремам Томсона и Тэта о гироскопической стабилизации.

Показано, что если гироскопы, входящие в состав рассматриваемой системы, обладают значительным кинетическим моментом, то для получения достаточных условий асимптотической устойчивости можно ограничиться при определенных, весьма слабых условиях анализом неравенств Гурвица для двух характе-

ристических полиномов степени $n/2$, один из которых соответствует исходной системе уравнений без позиционных членов, а другой — той же системе уравнений с отброшенными нутационными членами (упрощенной системе).

Доказано, что решение этой упрощенной системы является приемлемым, т. е. близко к решению исходной системы, порядка вдвое большего, если только кинетические моменты гироскопов достаточно велики. Библ. 5 назв. Л. А. Розенберг

4755. О задаче типа Стефана. Киносита, Мура, Сугаку, 1957, 8, № 4, 216—218 (японск.)

4756. Об одной частной задаче прослеживания контура нефтеносности. Коротков С. Ф., Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1957, вып. 11, 135—142

Рассматривается стягивание первоначально кругового контура нефтеносности к круговой батарее равнодебитных скважин в неограниченном однородном пласте постоянной мощности с учетом различия коэффициентов текучести в нефтяной и водной зонах. Жидкости и порода предполагаются несжимаемыми. Основываясь на сведении задач такого типа к задаче Коши для некоторого функционального уравнения, автор предлагает методику, позволяющую установить границы кольца, внутри которого в некоторый момент времени заключен деформирующийся контур.

Для этого производится оценка скоростей движения контура по главным и нейтральным направлениям.

Методика эффективна в случае коэффициента фильтрации в водной зоне меньшего, чем в зоне нефти (что может иметь место за счет пониженной проницаемости для воды в зоне вытеснения). Приведены результаты расчета батареи из 12 скважин. Библ. 5 назв.

В. Л. Данилов

4757. О колебаниях треугольной мембраны. Лакшмана-Рао (On the vibrations of triangular membranes. Lakshmana Rao S. K.), J. Indian Inst. Sci., 1956, AB38, № 1, B1—B3 (англ.)

Рассматривается решение уравнения установившихся колебаний мембраны:

$$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + h^2 u = 0,$$

удовлетворяющее краевому условию на контуре треугольника.

Решение получено для двух случаев: 1) равнобедренный прямоугольный треугольник; 2) прямоугольный треугольник с углом 60°.

В первом случае формы собственных колебаний имеют вид:

$$u(x, y) = \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a} + \cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a};$$

$h^2 = \dfrac{\pi^2(m^2+n^2)}{a^2}$ (m, n — целые числа); уравнения сторон треугольника: $y=0$, $x=a$, $y=x$.

Во втором случае получены следующие выражения:

$$u = \cos\frac{(m-n)\pi x}{a}\cos\frac{m+n}{a\sqrt{3}}\pi y + \cos\frac{n\pi x}{a}\times$$

$$\times\cos\frac{2m-n}{a\sqrt{3}}\pi y + \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{2n-m}{a\sqrt{3}}\pi y;$$

$h^2 = \dfrac{4}{3}(m^2 - mn + n^2)\dfrac{\pi^2}{a^2}$; уравнения сторон треугольника: $y=0$, $x=a$, $x=y\sqrt{3}$. Я. С. Уфлянд

4758. Принцип предельной амплитуды в дифракционных задачах. Кочура А. И., Праці Одеськ. ун-ту, Тр. Одесск. ун-та, 1956, **146**, Зб. студ. робіт, Сб. студ. работ, № 4, 187—190

Рассматривается задача:

В неограниченном пространстве помещено некоторое ограниченное тело T с границей S и требуется найти единственное решение уравнений:

$$\Delta V + k_{\text{вн}}^2 V = -f_{\text{вн}} \text{ в } T,\ k_{\text{вн}}^2 = \frac{\mu_{\text{вн}}\varepsilon_{\text{вн}}\omega^2 + i\mu_{\text{вн}}\sigma_{\text{вн}}\omega}{c^2},$$

$$\Delta V + k_{\text{н}}^2 V = -f_{\text{н}} \text{ вне } T,\ k_{\text{н}}^2 = \frac{\mu_{\text{н}}\varepsilon_{\text{н}}\omega^2 + i\mu_{\text{н}}\sigma_{\text{н}}\omega}{c^2},$$

ограниченное на бесконечности и удовлетворяющее краевым условиям:

$$V_{\text{вн}}|_S = V_{\text{н}}|_S,\ \left.\frac{\partial V}{\partial n}_{\text{вн}}\right|_S = \left.\frac{\partial V}{\partial n}_{\text{н}}\right|_S.$$

Автор, пользуясь принципом предельной амплитуды, вводит еще некоторые дополнительные ограничения и в одном частном случае, когда: $\sigma_{\text{н}} = 0$, $\frac{1}{2}|\alpha|\,d^2 < 1$ (d — диаметр тела T, $\alpha = k_{\text{вн}}^2 - k_{\text{н}}^2$) и $\varepsilon_t(M, t)$ непрерывно при переходе через поверхность S ($\varepsilon(M, t)$ — выражает влияние начальных условий), доказывает теорему единственности для рассматриваемой задачи. Д. З. Авазашвили

4759. Об одной смешанной задаче теории установившихся упругих колебаний. Шаташвили С. Х., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 4 (52), 81—90

Изучается плоская задача теории установившихся упругих колебаний в случае, когда упругая среда заполняет конечную односвязную область, на границе которой заданы касательная составляющая напряжений и нормальная составляющая смещений.

Поставленная задача относительно продольного и поперечного потенциалов среды $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ приводится к следующей математической граничной задаче:

Найти в области D решения $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ дифференциальных уравнений

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0,\ \Delta\psi + k_2^2\psi = 0,$$

удовлетворяющие на L граничным условиям:

$$\frac{d\varphi}{dn_0} + \frac{d\psi}{dS_0} = f_1(S_0),$$

$$k_2^2\psi + 2\frac{d\alpha_0}{dS_0}\left(\frac{d\psi}{dn_0} - \frac{d\varphi}{dS_0}\right) = f_2(S_0) - 2f_1'(S_0),$$

где

$$k_1 = \omega/a_1,\ k_2 = \omega/b_1,\ a_1 = \sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)}{\rho}},\ b_1 = \sqrt{\mu/\rho},$$

$f_j(S_0)$ ($j=1, 2$) — заданные на L функции, непрерывные вместе с первыми производными на дуге S_0, α_0 — угол, образуемый нормалью к L с осью абсцисс.

Решение ищется в виде следующих потенциалов:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_L \left\{N_0(k_1 r)\,\mu_1(S) + A\times\right.$$

$$\left.\times\left[b\frac{\partial N_0(k_1 r)}{\partial x} - a\frac{\partial N_0(k_1 r)}{\partial y}\right]\mu_2(S)\right\}dS,$$

$$\Psi(x, y) = -\frac{A}{\pi}\int_L \frac{dN_0(k_2 r)}{dn}\,\mu_2(S)\,dS,$$

где $N_0(k_j r)$ — функция Неймана, $A = 1/k_2^2$, $\mu_j(S)$ — неизвестные плотности, a и b — направляющие косинусы нормали кривой L.

Для определения неизвестных плотностей μ_1 и μ_2 получается система интегральных уравнений типа Фредгольма и при помощи теоремы Тамаркина (Ann. Math., 1927, 28, № 2) доказывается, что она имеет единственное решение.

Автор отмечает, что эта же задача была им ранее изучена (РЖМат, 1954, 2595) при помощи более сложного потенциала. Полученные результаты остаются справедливыми и в случае внешней бесконечной области. Д. З. Аваазашвили

4760. Об одной смешанной задаче теории установившихся упругих колебаний для круга. Шаташвили С. Х., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 4 (52), 91—96 (рез. груз.)

Полученные в работе (РЖМат, 1958, 4759) результаты автор применяет в частном случае, когда упругой областью является круг. В этом случае решение задачи строится эффективно в виде рядов Фурье. Д. З. Аваазашвили

4761. Интегральные представления решений двух основных граничных задач теории упругости для сферы. Игнатьев (Інтегральні представлення розв'язків двох основних граничних задач теорії пружності для сфери. Ігнатьєв М. О.) Наук. зап. Львівськ. ун-т, 1957, 44, 48—59 (укр.)

Рассмотрены внутренние и внешние первая (когда заданы перемещения на границе) и вторая (когда заданы поверхностные силы), задачи теории упругости для сферы. Суммируются известные ряды, представляющие решения названных задач в сферических функциях. Суммирование основано на специфических свойствах сферических функций. В результате автор представляет решения в виде интегралов по сфере. Для первой задачи дается подробный вывод как в случае внутренней, так и в случае внешней задачи. Для второй задачи приведены лишь окончательные результаты. И. С. Аржаных

4762. О некоторых следствиях метода отображений для системы уравнений теории упругости. Игнатьев (Про деякі застосування методу відображень до системи рівнянь теорії пружності. Ігнатьэв М. О.), Наук. зап. Львівськ. ун-т, 1957, 44, 60—70 (укр.)

Рассматриваются краевые задачи математической теории упругости для полупространства и для круга. Во втором случае используются формулы общих решений Г. В. Колосова. Строятся тензоры Грина первой задачи. Затем автор выполняет некоторые преобразования как уравнений Ляме, так и соответствующих решений краевых задач. Отмечается симметричность тензора Грина и тот факт, что транспонированный тензор также удовлетворяет уравнениям Ляме. Доказано, что из данного решения $\bar{u}$ можно получить другое решение, применив к $\bar{u}$ некоторый линейный оператор дифференцирования первого порядка. И. С. Аржаных

4763. О методе «склеивания» в теории волноводов. Розет Т. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 208—211

4764 К. Исследование зундманового решения задачи трех тел. Вернич (Diskussion der Sundmanschen Lösung des Dreikörperproblems. Vernić Radovan. Zagreb, Südslavische Akademie der Wissenschaften und Künste, 1954, 146 S.) (нем.)

Книга состоит из двух частей и снабжена списком литературы, содержащим 170 наименований. Первая часть содержит исторический и критический обзор литературы о траекториях соударения в задаче трех тел. В первой главе («Первые регуляризации задачи трех тел») излагаются приемы регуляризации ограниченной задачи трех тел в работах Копенгагенской школы и известные исследования этой задачи в работах Пенлеве, Леви Чивита, Мультона, Биркгоффа и др. Здесь же рассматриваются результаты Бисконччини и исследования референта в области обобщенной задачи трех тел. Во второй главе («Зундман. Двойное соударение») трактуются знаменитые исследования Зундмана, относящиеся к решению общей задачи трех тел при наличии парных соударений и связанные с ними работы Белорицкого, Леви Чивита (регуляризация в канонической форме), Розенблатта, Шази, и др. Третья грава («Зундман. Тройное соударение») посвящена результатам исследований случая общего соударения в работах Зундмана, Блока, Шази и референта и теории «мнимых соударений». Критические замечания автора по адресу своих предшественников в исследуемом вопросе основаны на двух недоразумениях, приводящих автора в дальнейшем к формулировке ряда неверных теорем. Первое из них заключается в том, что применение строго обоснованной теории асимптотических решений, разработанной в трудах Пуанкаре, Ляпунова, Горна, Пикара, Боля, Бендиксона, Коттона, Шази и др., автор считает некоторым приемом «асимптотического решения системы дифференциальных уравнений посредством аппроксимации линейной системой». Его утверждение о неприменимости в данной задаче этого метода основано на втором недоразумении, заключающемся в утверждении, что предельное соотношение

$$\lim_{t\to t_0} R^2\dot{R} = -\sqrt{2F}\ \left(R^2 = \sum_{i=1}^{3}\frac{r_i^2}{m_i};\right.$$
$$\left.\lim_{t\to t_0} R = 0;\ F = \text{const}\right) \qquad (1)$$

при α-1/2 «исключает всякие иррациональные показатели и для действительного соударения допускает только показатель 2/3» (стр. 35, 75, 81 и др.). В действительности это утверждение не имеет основания и соотношение (1) не исключает иррациональных показателей, так же как соотношение (231), стр. 78, не исключает показателя такого рода в выражении функции $w = ct^{2/3} + bv^{\pi}$, удовлетворяющей этому соотношению. В заключение первой части книги автор приходит к неверному утверждению (стр. 81): «Из всего этого следует, что не существует никакого принципиального, аналитического или физического различия между двойным и тройным соударением как в мнимом, так и в действительном случае». Это положение является руководящей мыслью в собственных, оригинальных исследованиях автора по регуляризации задачи трех тел и аналитическому продолжению движения после соударения, которые сосредоточены в трех главах второй части его диссертации («Регуляризация тройного соударения», «Теория алгеброморфных функций». «Униформизация задачи трех тел»). В их основе лежит систематизация обобщений зундманового преобразования независимой переменной, данных различными авторами. Отправным пунктом этих исследований является ряд теорем, относящихся к аналитическому продолжению движения трех тел после момента общего соударения. Неправильно утверждая в теореме II (стр. 82) существование (в общем случае) такого продолжения, автор приходит (стр. 84) к неверным примечаниям к теореме III, утверждающим, что «аналитическая структура задачи о соударениях, при действительных двойных и тройных соударениях — одна и та же» (ср. также стр. 136). В действительности же, в общем случае момент тройного соударения, как это

с несомненностью следует из исследований Зундмана, Блока, Шази, референта и др., является подвижной особой трансцендентной точкой. Только в частных случаях Лагранжа или при некоторых исключительных соотношениях масс иррациональные показатели в разложениях исчезают и становится возможным действительное аналитическое продолжение движения после момомента общего соударения. Автор не замечает, что разложение (4) на стр. 84 относится не к общему, а к весьма частному случаю. Ю. Д. Соколов

4765 Д. **Нелинейные задачи теории тонких пластин.** Морозов Н. Ф. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1958

См. также: 4371, 4604, 4651, 4671, 4817, 4945, 5182, 5183—5185

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

4766. **Об одном специальном интегральном уравнении.** Пёшль (Über eine spezielle Integralgleichung. Pöschl Klaus), Z. angew. Math. und Mech., 1956, 36, № 5—6, 161—167 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Изучается в зависимости от интервала интегрирования уравнение (не типа Вольтерра)

$$u(t, s) - \lambda \int_0^s K(t, \eta)\, u(\eta, s)\, d\eta = f(t, s), \qquad (1)$$

$$0 \leqslant s \leqslant 1;\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

которое при каждом фиксированном s является уравнением Фредгольма.

К уравнению типа (1) приводит исследование изгиба стержней рамки, на которую наматывается тонкая проволока, что приходится делать при изготовлении сеток электронных ламп.

В работе при определенных допущениях выводится уравнение изгиба стержней рамки, которое после упрощений принимает вид (1) с функцией Грина для уравнения $y^{(IV)} = 0$ как в качестве ядра, так и в качестве правой части.

Полученное уравнение решается методом последовательных приближений. Устанавливается, что уравнение не имеет собственных значений и дается формула распределения напряжения.

Далее изучается общий вид уравнения (1). Строится резольвента уравнения (1), зависящая от параметра s, которая имеет особенности, определяемые собственными числами уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^s K(t, \eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta.$$

В случае симметричности ядра изучается характер функции $\lambda(s)$, а также некоторые свойства резольвенты (непрерывность и дифференцируемость по некоторым аргументам и т. д.). Г. Н. Агаев

4767. **Оценка роста решения интегрального уравнения вольтерровского типа.** Евграфов М. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 297—302

Рассматривается вопрос об оценке роста решений интегрального уравнения

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x f(t)\, K(x, t)\, dt \quad (0 \leqslant x < \infty). \qquad (1)$$

Теорема 1. Пусть $K(x, t)$ удовлетворяет условиям:

1) $\int_t^A |K(x, t)|\, dx < \infty$, $A < \infty$.

2) Существует такое число $h_A > 0$, что

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant A} \int_0^h |K(x, t)|\, dt = \theta < 1.$$

Пусть, кроме того, $\int_0^A |\varphi(x)|\, dx < \infty$, $A < \infty$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\int_0^A |f(x)|\, dx < \infty$ при любом конечном A.

Теорема 2. Если, помимо условий предыдущей теоремы, выполнены условия

$$\inf_{A \geqslant 0} h_A = h > 0, \int_0^\infty |\varphi(x)|\, e^{-xr} dx < \infty,\ r > 0,$$

$\int_0^\infty |K(x+s, x)|\, e^{-sr} ds < \infty$, $x \geqslant 0$, $r > 0$ и сходится при любом $r > 0$ ряд

$$S(r) = \sum_{k=0}^\infty \lambda^{k+1} \gamma_1(r) \ldots \gamma_k(r),\ \lambda = 1/(1-\theta);$$

$$\gamma_{k+1}(r) = \sup \int_0^\infty |K(x+s, x)|\, e^{-sr} ds,$$

то

$$\int_0^\infty |f(x)|\, e^{-xr} dx \leqslant S(r) \int_0^\infty |\varphi(x)|\, e^{-xr} dx,$$

где $f(x)$ — решение уравнения (1). Получены другие формулы для оценки. М. К. Номоконов

4768. **Обобщение одной теоремы о расщеплении линейного оператора.** Поволоцкий А. И., Тр. Ленингр. лесотехн. акад., 1957, вып. 78, 27—30

Рассматривается действующий в L^2 линейный интегральный оператор

$$A\varphi(s) = \int_G K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

с симметричным положительно определенным ядром $K(s, t)$, которое либо само, либо некоторая его итерация почти всюду ограничена. Предполагается, что $\operatorname{mes} G = \infty$. Изучаются свойства положительного квадратного корня из A. Без доказательства формулируется теорема, доказанная референтом в случае $\operatorname{mes} G < \infty$ (Матем. сб., 1950, 26 (68), № 3, лемма 7; РЖМат, 1957, 5737 К). В случае полной непрерывности A из L^2 в L^2 доказывается предложение, установленное М. А. Красносельским в предположении, что $\operatorname{mes} G < \infty$ (РЖМат, 1953, 331; 1957, 3310 К). Рассмотрен и сопряженный оператор $(A^{1/2})^*$. М. М. Вайнберг

4769. **Сингулярные интегральные уравнения для дифференциальных форм на римановых многообразиях.** Кон (Singular integral equations for differential forms on Riemannian manifolds. Kohn J. J.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, 42, № 9, 650—653 (англ.)

Основные понятия теории сингулярных интегральных уравнений, изложенные, например, в работе

С. Г. Михлина (Успехи матем. наук., 1948, 3, 29—112), переносятся на уравнения, в которых неизвестной является дифференциальная форма на произвольном дифференцируемом многообразии. В частности, дается изложение в более современных терминах и обобщение критериев регуляризуемости, содержащихся в указанной выше работе.

Сингулярным оператором называется оператор

$$I\varphi(x)=\xi(x)\varphi(x)+\int_M G(x,\ y)\wedge{}^*\varphi(y),$$

где φ — p-мерная дифференциальная форма (ковариантный кососимметрический тензор ранга p) на m-мерном римановом многообразии M, ${}^*\varphi$ — форма, сопряженная φ, $\xi(x)$ — ковариантный тензор ранга $2p$ на M, кососимметрический по p первым и p последним индексам и не меняющийся при перестановке p первых индексов с p последними, $\xi\cdot\varphi$ означает свертывание всех индексов φ с последними индексами ξ, а $G(x,\ y)$ — двойная форма, определенная при $x,\ y\in M$, $x\neq y$ (по поводу определений см. Де Рам, Дифференцируемые многообразия). Про форму G предполагается, что $r^m(x,\ y)\,G(x,\ y)$ стремится к определенному пределу, когда y стремится к x по любому направлению (r — геодезическое расстояние на M), а также накладываются некоторые другие естественные условия.

Уравнение $I\varphi=\alpha$ называется регуляризируемым, если существует такой сингулярный оператор K, что уравнение $KI\varphi=K\alpha$ является уравнением Фредгольма. Приводится естественное обобщение критериев регуляризуемости, содержащихся в теоремах 1 и 2 §§ 22 и 23 цитированной работы С. Г. Михлина. Последние получаются из результатов работы при $p=m$ и когда M содержится в евклидовом пространстве.

В качестве приложения рассматривается оператор

$$d_\tau\varphi=\frac{1}{2}(\tau-i)\,d_z\varphi+\frac{1}{2}(\tau+i)\,d_{\bar z}\varphi$$

на квазикомплексном многообразии. Здесь τ — комплексное число, а d_z и $d_{\bar z}$ — операторы дифференцирования формы по комплексным и комплексно-сопряженным координатам. На многообразии с границей задача Неймана d_τ заключается в нахождении формы φ по нормальным значениям на границе φ и $d_\tau\varphi$. Эти задачи сводятся к сингулярному уравнению, про которое утверждается, что оно тогда и только тогда регуляризуемо, когда $\tau\neq it$, $t\leqslant 1$.

Доказательств работа не содержит.

И. Р. Шафаревич

4770. Задача о конечной полосе. Пирсон (On the finite strip problem. Pearson Carl E.), Quart. Appl. Math., 1957, 15, № 2, 203—208 (англ.)

Решается уравнение

$$\int_{-1}^{1}[P(x-t)\ln|x-t|+Q(x-t)]\,f(t)\,dt=g(x),\qquad -1<x<1,\qquad (1)$$

в котором P и Q — полиномы, n — высшая из их степеней. Применением вспомогательной функции комплексного переменного $z=x+iy$

$$S(z)=(z^2-1)^{1/2}\int_{-1}^{1}\left[P(z-t)\ln\frac{z-t}{z+t}+Q(z-t)\right]f(t)\,dt$$

уравнение (1) приводится к виду

$$\int_x^1 P(x-t)\,f(t)\,dt=h(x),\qquad (2)$$

где $h(x)$ есть известная функция от x и $n+2$ постоянных

$$C_r=\int_{-1}^{1}t^r f(t)\,dt,\ r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1.$$

Уравнение (2) в свою очередь легко приводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_{r+}. С. Г. Михлин

4771. Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Ахиезер Н. И., Щербина В. А., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 80, Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 21, 191—198

Рассматривается уравнение

$$\varphi(x)=\int_0^a L(x,\ y)\,\psi(y)\,dy;\ 0<x<a,\ a\leqslant\infty,\qquad (1)$$

ядро которого выражается через гипергеометрическую функцию

$$L(x,\ y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^p}F\left(\frac{p}{2},\ \frac{p+1}{2},\ \frac{q}{2};\ \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right),\qquad (2)$$

причем $0<2p<q<2p+2$. Используя интегральные представления гипергеометрической функции, авторы получают решение уравнения (1) в виде

$$\psi(x)=\frac{x^{q-2}}{\Gamma\left(1+p-\frac{q}{2}\right)}\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{tg(t)\,dt}{(t^2-x^2)^{q/2-p}},$$

где

$$g(t)=\frac{2\Gamma(p)\sin\pi\left(p-\frac{q}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}t^{1-2p}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\varphi(s)\,s^{q-1}ds}{(t^2-s^2)^{q/2-p}}.$$

При $a=\infty$ даются еще две формы решения. Указывается, что к классу ядер (2) принадлежат ранее изученные ядра

$$L_1(x,\ y)=\frac{1}{2xy}\ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right|;\ L_2(x,\ y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^p},$$

$$0<p<1;\ L_3(x,\ y)=\frac{2}{\pi(x+y)}K\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\right);$$

K — полный эллиптический интеграл первого рода. С. Г. Михлин

4772. L-функции в абстрактном дифференциальном кольце и их применение к интегро-дифференциальным уравнениям. Хеброни (On L-functions in the abstract differential ring with application to integrodifferential equations. Hebroni P.), Riveon lemat., 1955, 9, 54—69 (иврит.)

В абстрактном нормированном кольце с дифференцированием (Hebroni P., Compositio math., 1938, 5) рассматривается дифференциальное уравнение вида $y'=f(y)$, где $f(y)$ — L-функция в R, т. е. функция, переводящая дифференцируемые элементы кольца в дифференцируемые и удовлетворяющая условиям:

$A)\ f(y\pm z)=f(y)\pm f(z)$, $B)\ f(\zeta,\ y)=\zeta f(y)$,

$C)\ [f(a)]'=f(a')$, $D)\ |f(y)|\leqslant H|y|$; здесь $\zeta=\int 1$, a — элемент из R, имеющий вторую производную a'', а H — какое-либо положительное число (это опреде-

ление уже, чем в статье автора (РЖМат, 1957, 1527), так как здесь положено $c=0$ и добавлено условие D). Оказывается, что общее решение такого уравнения получается с помощью обобщенной показательной функции, соответствующей данной функции f и определяемой сходящимся рядом $E(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{n!}f_n(a)$, где $f_n(a)$ означает n-ю итерацию функции $f(a)$ (такая обобщенная показательная функция превращается в $e^{\zeta}\cdot a$, если $f(a)=a$). А именно, это общее решение будет $y=E(c)$, где c пробегает все постоянные элементы кольца R (т. е. такие, что $c'=0$). Устанавливается также единственность решения для случая, когда задано «начальное значение» $A_w y$ элемента y (определяемое так: $A_w y=y-\int y'$). Для установления этих результатов доказываются теоремы о почленном дифференцировании и об итерациях для рядов в кольце R, в частности для L-рядов, т. е. рядов вида $\sum_{n=\alpha}^{\infty}a_n\zeta^{n-\alpha}f_n(a)$, где a — элемент из R, α — неотрицательное число, называемое индексом L-ряда, и a_n — рациональные числа. Полученные результаты применяются, в частности, к уравнениям вида $y'=\sum_1^{\infty}a_i y b_i\,(a_i'=0,\ b_i'=0)$. Во второй части работы должны быть рассмотрены применения этих результатов к интегро-дифференциальным уравнениям. М. Ф. Бокштейн

4773. Об одном методе решения линейных интегро-дифференциальных уравнений. Кривошеин Л. Е., Уч. зап. Физ.- матем. фак. Кирг. ун-та, 1957, вып. 4, ч. I, 118—123

Решается задача Коши для уравнения

$$L[y]=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,P[y]\,dt, \qquad (1)$$

где

$$L[y(x)]=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\,y^{(n-i)}(x),\quad P[y(t)]=\sum_{i=0}^{m}b_i(t)\,y^{(m-i)}(t)$$

при начальных условиях

$$y^{(i)}(x_0)=y_0^{(i)}\,(i=\overline{0,\ n-1});\ x_0\in[a,\ b]. \qquad (2)$$

Автор исходит из фундаментальной системы $\{y_i\}\,(i=\overline{1,\ m})$ решений уравнения

$$P[y]=0. \qquad (3)$$

Этим реферируемая работа отличается от работы А. И. Некрасова (Тр. ЦАГИ, 1934, 190), который исходил из фундаментальной системы решений уравнения $L[y]=0$.

1) $n=m$. Решение ищется в виде:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)\,y_i(x), \qquad (4)$$

где функции $c_i(x)$ подчиняются условиям

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)\,y_i^{(k)}(x)=0\quad(k=\overline{0,\ n-2}),$$

откуда следует, что $c_i'(x)=\varphi_i(x)\,z(x)\,(i=\overline{1,\ n})$, где $z(x)=c_n'(x)$; $\varphi_n(x)\equiv 1$. Постоянные $c_i(x_0)=c_{i0}$ определяются из системы

$$y_0^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}c_{i0}y_i^{(k)}(x_0)\quad(k=\overline{0,\ n-1}).$$

Подставляя $y(x)$ из (4) в (1), получим

$$z(x)-\int_{x_0}^{x}K_1(x,\ t)\,z(t)\,dt=f_1(x)+\sum_{i=1}^{n}c_{i0}a_i(x)+\lambda\int_a^b K_2(x,\ t)\,z(t)\,dt, \qquad (5)$$

где функции $K_1(x,\ t)$, $f_1(x)$, $a_i(x)$, $K_2(x,\ t)$ находятся по определенным формулам. Если $R(x,\ t)$ — резольвента ядра $K_1(x,\ t)$, то решение уравнения (5) запишется так:

$$z(x)=f_2(x)+\sum_{i=1}^{n}c_{i0}\gamma_i(x)+\lambda\int_a^b K_3(x,\ t)\,Z(t)\,dt, \qquad (6)$$

где функции $f_2(x)$, $\gamma_i(x)$, $K_3(x,\ t)$ выражаются через $R(x,\ t)$ по указанным в работе формулам. Таким образом, вопрос сводится к решению неоднородного уравнения Фредгольма (6). Если λ — собственное число ядра $K_3(x,\ t)$ ранга r, то из условия ортогональности свободной функции уравнения (6) к фундаментальным функциям союзного однородного уравнения возникает дополнительная система линейных алгебраических уравнений относительно постоянных c_{i0}.

2) $n<m$. Здесь начальные условия берутся в точке $x=a$. После подстановки $y(x)$ из (4) в (1) получается линейное интегро-дифференциальное уравнение типа Н. Н. Назарова

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n}c_{ia}\pi_i(x)+f_4(x)+\lambda\int_a^b K_6(x,\ t)\sum_{i=0}^{p}d_i(t)\,z^{(i)}(t)\,dt, \qquad (7)$$

где функции $\pi_i(x)$, $f_4(x)$, $K_6(x,\ t)$, $d_i(t)$ находятся по определенным формулам. Уравнение (7) сводится к интегральному уравнению типа (6).

3) $n>m$. Система фундаментальных функций $\{y_i(x)\}\,(i=\overline{1,\ m})$ пополняется функциями $y_{m+1}(x)\ldots y_n(x)$ с таким расчетом, чтобы функции $y_1(x)\ldots y_n(x)$ были линейно независимы и чтобы для функции (4) выполнялись условия (2). В остальном этот случай аналогичен первому случаю. В. В. Васильев

4774 К. Лекции об интегральных уравнениях. Трикоми (Lezioni sulle equazioni integrali. Tricomi Francesco Giacomo. Torino, Ed. Gheroni, 1954, 343 p.) (итал.)

Книга представляет собой учебное пособие по интегральным уравнениям для университетов. Она разбита на пять глав. В гл. 1 «Интегральные уравнения Вольтерра» содержится подробная теория уравнений Вольтерра 1-го и 2-го родов с некоторыми применениями. Гл. 2 «Интегральные уравнения Фредгольма» содержит систематическое изложение теории и приложений таких уравнений. Гл. 3 «Системы ортогональных функций». Гл. 4 «Интегральные уравнения с симметрическими ядрами». Здесь, в частности, излагаются некоторые вопросы о связи интегральных уравнений с вариационным исчислением. Гл. 5 «Некоторые типы сингулярных и нелинейных интегральных уравнений».

В книге имеется много разобранных примеров. В конце каждой главы приводятся рекомендуемые задачи. М. К. Керимов

См. также: 4651, 4671, 4732

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

4775. Основные понятия математического анализа. Динкуляну (Noțiuni de bază din analiza matematică. Dinculeanu N.), Gaz. mat. și fiz., 1957, A9, № 9, 457—473 (рум.)

4776. Два простых замечания. Миранда (Dos notas elementales. Miranda Rafael), Gac. mat., 1957, 9, № 4—5, 121—125 (исп.)

4777. Итерированный экспоненциал x. Гудстейн (The iterated exponential of x. Goodstein Peter), Math. Gaz., 1957, 41, № 337, 219 (англ.)

4778. Замечания о круговых и гиперболических функциях. Мак-Каллн (Notes on circular and hyperbolic functions. McCulley William S.), Math. Mag., 1957, 31, № 1, 33—38 (англ.)

4779. Об итерации некоторого класса функций. Тулянская Т. С., Уч. зап. Чкаловского гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11, 229—238

4780. Некоторые числовые последовательности. Зарицький (Деякі числові послідовності. Зарицький М. О.), Наук. зап. Львівськ. ун-та, 1957, 44, 115—122 (укр.)

Рассматриваются элементарно получаемые свойства некоторых специальных числовых последовательностей. Приведем один типичный результат. Последовательность u_n определим следующим образом: $u_1=0$, $u_{n+1}=u_n+3^{s-1}$, где s определяется из представления n в форме $n=2^{s-1}(2k-1)$. Тогда $u_{2n}=n+3u_n$, $u_{2n+1}=n+3u_{n+1}$, $u_{2n-1}=n+3u_n-1$, $u_{2^n}=3^n-2^n$, $u_{2n+1}-u_{2n}=2\cdot 3^n-2^n$, $\sum_{i=1}^{n}u_{2i-1}-\sum_{i=1}^{n-1}u_{2i}=3u_n$, $u_{2n}=u_{2n-i}+u_{i+1}$ $[i=0,\ 1,\ \ldots,\ (2^n-1)]$. В работе также рассматриваются свойства последовательности b_n, определяемой следующим образом: $b_n=p_n+u_{p_n+1}$, где $p_n=2r+1$ для $2^m\leqslant n=2^m+r<2^{m+1}$.

И. И. Огиевецкий

4781. Несколько соображений о понятии дифференциала. Блей (Enkele beschouwingen over het begrip differentiaal. Blij F. van der), Simon Stevin, 1957, 31, № 4, 156—168 (гол.)

4782. О теореме Тейлора с остаточным членом. Дананда (On Taylor's theorem with remainder. Dianand a P. H.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 7, Part I, 492—495 (англ.)

4783. О замене переменных. Хадраке (Sobre el cambio de variables. Jadraque V. Martin), Gac. mat., 1957, 9, № 4—5, 116—120 (исп.)

4784. Теорема о среднем и ее применение к задачам о максимуме и минимуме. Клэр (The theorem of the means and its application to problems of maxima and minima. Clair Harry S.), School Sci. and Math., 1957, 57, № 6, 468—473 (англ.)

4785. Замечание об оценке интеграла, встречающегося в теории сервомеханизмов. Баттин (Note on the «Evaluation of an integral occurring in servomechanism theory». Battin R. H.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 4, 481—482 (англ.)

Рассматривается интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{g(x)}{h(x)\,h(-x)}\,dx,$$

где $g(x)$ и $h(x)$ — полиномы по «x» порядка $2n-2$ и n, встречающийся в расчетах динамической точности сервомеханизма. Дается оценка интеграла I путем установления связи $I=I(F_j)$, где

$$F_j=\frac{(-1)^{j+1}}{a_0}\sum_{k=1}^{n}A_kB_{jk},$$

B_{jk} определяется из уравнений

$$\frac{h(x)}{x-x_k}=\sum_{j=1}^{n}B_{jk}x^{n-j}.$$

Г. М. Уланов

4786. О теоремах Пуанкаре и Перрона. Фрейман Г. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 241—246

Даются новые простые доказательства теорем об уравнении в конечных разностях

$$y(x+k)+P_{k-1}(x)\,y(x+k-1)+$$
$$+P_{k-2}(x)\,y(x+k-2)+\ldots+P_0(x)\,y(x)=0.$$

Теорема Пуанкаре. Если существуют $\lim\limits_{x\to\infty}P_i(x)=a_i$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$ и если корни уравнения

$$\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0$$

все различны по модулю, то для всякого решения $y(x)$ существует $\lim\limits_{x\to\infty}[y(x+1)/y(x)]$, равный одному из корней $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$.

Теорема Перрона. Если, кроме того, $P_0(x)\neq 0$ при всех целых x, то существует k линейно независимых решений $y_i(x)$ таких, что

$$\lim_{x\to\infty}[y_i(x+1)/y_i(x)]=\lambda_i.$$

Метод доказательства — исследование сходимости некоторого линейного процесса итерационного типа в k-мерном векторном пространстве. Р. Э. Виноград

4787. Формула удвоения. Фордер (Duplication formulae. Forder H. G.), Math. Gaz., 1957, 41, № 337, 215—217 (англ.)

Показано, что единственным непрерывным непостоянным действительным четным решением функционального уравнения $C(2x)=2C^2(x)-1$, имеющим вторую производную в точке $x=0$, являются функции $C(x)=\cos kx$ и $C(x)=\operatorname{cosh} kx$. Э. А. Черышенко

4788. О формуле удвоения. Купер (On a duplication formula. Cooper R.), Math. Gaz., 1957, 41, № 337, 217—218 (англ.)

Развивается идея Фордера (реф. 4787) о решении функционального уравнения $\varphi(2x)=2\varphi^2(x)-1$. Если не предполагать существования $\varphi''(0)$, то возможны решения, отличные от $\operatorname{cosh} kx$. Так, решением является выпуклая функция

$$f(x)=\operatorname{cosh} k(3ax-2a^2)^{1/2}\ \text{при}\ a\leqslant x\leqslant 2a,\ f(0)=1,$$

определенная для $x\geqslant 0$ и пересекающаяся с кривой $y=\operatorname{cosh} kx$ в точках $x=a$ и $x=2a$.

Э. А. Черышенко

4789. О периодических решениях некоторых функциональных уравнений. Олаидер (Sur les solutions périodiques d'une certaine équation fonctionnelle.

Alander Martin), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 16, 2118—2120 (франц.)

Разыскиваются целые периодические решения $F(z)$ уравнения $F'(z)=F(z+\alpha)$, где α — действительная постоянная, или уравнения $F'(z)+aF(z+\beta)$, где a и β — постоянные. Предполагается, что при действительных z значения $F(z)$ действительны. При этом условии период $F(z)$ может быть только или действительным или чисто мнимым. Показывается, что в случае первого уравнения (второе уравнение исследуется аналогично) искомое решение $F(z)$ с действительным периодом имеет вид $A\sin z+B\cos z$ (при этом должно быть $\alpha=\pi/2$), а с чисто мнимым периодом — вид $Ae^{\gamma z}$ или $Ae^{\gamma z}+Be^{\delta z}$, где γ и δ — действительные корни уравнения $t=e^{\alpha t}$ (причем при некоторых целых p и q должно быть $p\gamma=q\delta$). А. Ф. Леонтьев

4790 К. Алгебраический анализ бесконечно малых. Матаиш-Арасиль (Análisis algebraico infinitesimal. T. I. Catálogo diferencial. 5ta ed, Mataix Aracil Carlos. Madrid, Dossat. 1957, 583 p., il., 130 ptas), Bibliogr hisp., 1957, 16, № 5, 119 (исп.)

4791 К. Сборник задач по алгебраическому анализу. Ребес (Colección de problemas de análisis algebraico. Rebés S. Madrid, Dossat, 1956, 247 p., il.), Bibliogr. hisp., 1957, 16, № 5, 119 (исп.)

4792 К. Курс математического анализа. Марнеску (Curs de analisă matematică. Anul 4, 5. Marinescu Gh. Univ. «C. I. Parhon». Bucureşti, 1956, 334 p., il., 10 lei. — Litogr.), Bibliogr. RPR, 1957, 6, № 10, 336 (рум.)

4793 К. Лекции по математическому анализу. Т. 2, 2-е изд. Пиньедоли (Lezioni di analisi matematica. Vol. 2. 2 ed. Pignedoli Antonio. Padova, Ed. Casa ed dott. A. Milani, 1956, xii, 505 p., 4500 L.), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 669, 80 (итал.)

4794 К. Курс математического анализа. Ч. II. Берман (Matematikai analizis. 2 r. Egyetemi tankönyv. 2. kiad. Bermant A. F. Oroszból. ford. Budapest. Tankönyvkiadó 1955, 368, l., 14 Ft.), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 7, 222 (венг.)

Перевод с русского (М.—Л., Гостехиздат, 1944).

4795 К. Высшая математика для математиков, физиков и инженеров. Т. 4, № 1—2. Задачи с решениями к Т. 1, 10-е изд. Роте (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. T. 4, № 1—2. Übungsaufgaben mit Lösungen zu T. 1, 10. Aufl. Rothe R., Leipzig, Teubner, 1957, 109 S., ill., 3. — DM), Dtsch. National bibliogr., 1957, A, № 15, 1047 (нем.)

4796 К. Исчисление конечных разностей. Гельфонд (Calculul cu diferenţe finite. Ghelfond A. O. Trad. din limba rusă. Bucureşti, Ed. tehn., 1956, 471 p., 17, 40 lei), Bibliogr. RPR, 1957, 6, № 1, 9 (рум.)

Перевод с русского (М.—Л., Гостехиздат, 1952).

4797 К. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Рыжик, Градштейн (Summen-, Produkt- und Integral-Tafeln. Tables of series, products, and integrals. Ryshik I. M., Gradstein I. S. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1957, XXIII, 438 S., ill.) (нем., англ.)

Перевод с третьего русского издания (М.—Л., Гостехиздат, 1951). Текстовой материал помещен в двух параллельных колонках на немецком и английском языках.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

4798. О неравенстве Матьё. Макаи (On the inequality of Mathieu. Makai E.), Publs math., 1957, 5, № 1—2, 204—205 (англ.)

Выводится справедливость неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+x^2)^2}<\frac{1}{x^2}$$

из соотношения

$$\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+x^2-\frac{1}{4}}-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+x^2-\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{2n}{(n^2+x^2-n)(n^2-x^2+n)}>\frac{2n}{(n^2+x^2)^2}.$$

В. В. Немыцкий

4799. О сходимости рекуррентных последовательностей. Кудревич (O zbieżności ciągów rekurencyjnych. Kudrewicz Jacek), Zesz. nauk. Politechn. warsz., 1957, № 32, 103—109 (польск.; рез. русск., англ.)

Рекуррентные последовательности встречаются в математике при решении уравнений итерационным методом. В статье даются необходимые и достаточные условия сходимости числовых рекуррентных последовательностей на основе их геометрической интерпретации.

В одном из примеров теория применяется к определению предела периодических непрерывных дробей.

Резюме автора

4800. Некоторые критерии о сходимости бесконечных степенных цепей. Густый (Některá kriteria o konvergenci nekonečných odmocninových řetězců. Hustý Zdeněk), Sbor. Vysoké školy zeměd. a Lesn. fak. Brně, 1956, C, № 3, 33—46 (чешск.; рез. русск., англ.)

Рассматриваются последовательности специальной конструкции (называемые «цепями») и даются некоторые критерии их сходимости. В резюме (на русском языке) имеются опечатки и неточности в отдельных формулировках. М. П. Щеглов

4801. Об одном обобщенном геомстрическом ряде. Милошевич (O једном генерализаном геометриском реду. Милошевић Ковина), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1956, 7, 44—50 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Для обобщенного геометрического ряда $F_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[a+(k-1)d]^n x^k$, $n>0$ и целое, $|x|<1$, дается выражение

$$F_n(x)=\frac{x}{(1-x)^{n+1}}P_n(x),\ \text{с}\ P_n(x)=\sum_{r=0}^{n}K_r^n(a,d)x^r,$$

где коэффициенты $K_r^n(a,d)$, входящие в выражение

$$(a-xd)^n=(-1)^n\sum_{r=0}^{n}K_r^n(a,d)\binom{x+k-1}{n},$$

получены в виде

$$K_r^n(a,d)=\sum_{m=0}^{r}\binom{n+1}{m}[a+(r-m)d]^n.$$

Резюме автора

4802. К теории рядов Фурье по рациональным функциям. Джрбашян М. М., Изв. АН АрмССР. Физ.-матем. естеств. и техн. н., 1956, 9, № 7, 3—28 (рез. арм.)

Изучаются ряды Фурье по трем ортогональным на окружности $|z|=1$ системам функций $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$,

$\{\psi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{F_n(z)\}_{-\infty}^{+\infty}$, которые определяются следующим образом:

$$\varphi_0(z)=\left(\frac{1-|\alpha_0|^2}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{1-\bar{\alpha}_0 z},$$

$$\varphi_n(z)=\left(\frac{1-|\alpha_n|^2}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z},$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — произвольная последовательность чисел из круга $|z|<1$;

$$\psi_1(z)=\left(\frac{|\beta_1|^2-1}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{1-\beta_1 z},$$

$$\psi_m(z)=\left(\frac{|\beta_m|^2-1}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{1-\beta_m z}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{z-\beta_k}{1-\beta_k z},\ m=2, 3, \ldots,$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — произвольная последовательность чисел из области $|z|>1$;

$$F_n(z)=\begin{cases}\varphi_n(z), & n\geqslant 0,\\ \psi_{-n}(z), & n\leqslant -1.\end{cases}$$

В первом параграфе, с помощью определенных выше систем, решаются две интерполяционные задачи и находятся явные выражения для ядер

$$\sum_{k=0}^{n}\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(z)},\quad \sum_{k=1}^{n}\psi_k(z)\overline{\psi_k(z)},\quad \sum_{-n}^{m}\Phi_k(z)\overline{\Phi_k(z)}.$$

Во втором параграфе вводятся два дополнительных ограничения на числа α_k и β_k:

1. Последовательности α_k и β_k не имеют предельных точек на окружности $|z|=1$;

2. $\beta_k=\dfrac{1}{\bar{\alpha}_k}$.

В этих предположениях устанавливаются два признака сходимости в точке рядов Фурье по системе $F_n(z)$:

I. Если функция $f(x)\in L_1[-\pi, \pi]$ и в некоторой окрестности (x_0-h, x_0+h) точки x_0 имеет ограниченную вариацию, то

$$\lim S_n(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2},$$

где $S_n(x)=\sum_{k=-n-1}^{k=n}c_k\Phi_k(x)$ и $c_k=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\Phi_k(e^{it})\,dt$.

II. Пусть $f(x)\in L_1[-\pi, \pi]$ и в точке x_0 существуют предельные значения $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$. Если для функций $\theta_1(y)=f(x_0-y)-f(x_0-0)$, $\theta_2(y)=f(x_0+y)-f(x_0+0)$ существуют интегралы

$$\int_0^{\omega}\frac{|\theta_1(y)|}{y}\,dy,\quad \int_0^{\omega}\frac{|\theta_2(y)|}{y}\,dy,\quad \omega>0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

В. Я. Козлов

4803. **Некоторые тауберовы теоремы. Якимовский** (Some Tauberian theorems. Jakimovski Amnon), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 1, 943—954 (англ.)

Рассматриваются и даются обобщения некоторым тауберовым теоремам и тауберовым неравенствам. Приведем отдельные результаты:

1) Чтобы последовательность $\{s_n\}$ была суммируема методом Гёльдера (H, K), необходимо и достаточно, чтобы $\{s_n\}$ была суммируема методом Абеля и

$$\binom{n}{k}\Delta^k s_{n-k}\to 0\quad (n\to\infty).$$

2) Если последовательность $\{s_n\}$ суммируема методом Абеля и последовательность $\left\{\binom{n}{k}\Delta^k s_{n-k}\right\}$ $(H, \alpha+k)$-ограничена для некоторого числа α, тогда $\{s_n\}$ суммируема $(H, \alpha+\varepsilon)$ для любого $\varepsilon>0$.

М. П. Щеглов

4804. **Упрощенные доказательства для «некоторых тауберовых теорем» Якимовского. Раджагопал** (Simplified proofs of «Some Tauberian theorems» of Jakimovski. Rajagopal C. T.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 1, 955—960 (англ.)

Предложены упрощенные доказательства для леммы 1 и теорем 2, 3 и 5 из статьи Якимовского (реф. 4803), основанные на применении разложения

$$\binom{n}{k}\Delta^k s_{n-k}=\frac{(-1)^k}{n!}H^{-k}(H^0-H^1)(H^0-2H^1)\ldots$$

$$\ldots(H^0-kH^1)\,s,$$

где H^{α} — хаусдорфово преобразование при $\mu_n=(n+1)^{\alpha}$. Вместе с тем дано следующее обобщение леммы 5 на стр. 1019 работы Саса (РЖМат, 1957, 4915 К):

Пусть 1) $\{t_n\}=H^{\alpha}\{s_n\}$; 2) последовательность $\{s_n\}$ суммируема A к l; 3) последовательность $\{t_n\}$ ограничена снизу и квазимонотонно убывает (т. е. найдется такое положительное число c, для которого $s_{n+1}\leqslant(1+c/n)\,s_n$ при $n>n_0(c)$). Тогда последовательность $\{s_n\}$ суммируема (H, α) к l. (Здесь (H, α) — метод суммирования с помощью преобразования H^{α}).

Примечание референта. Д-р Раджагопал сообщил в редакцию РЖ, что вскоре после опубликования его статьи, он узнал о результатах Хаусдорфа (Math. Z., 1930, 31, 186—196), которые пересекаются с его результатами; и что, кроме того, вывод неравенства (6) на стр. 958 ошибочен; однако это место в доказательстве теоремы 1 может быть исправлено.

В. А. Магарик

4805. **Заметка о некоторых семействах методов суммирования, области суммирования которых окружают точку $z=1$. Зонненшейн** (Une remarque sur certaines familles de procédés de sommation dont les domaines de sommabilité entourent le point $z=1$. Sonnenschein J.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 5, 328—330 (франц.)

Пусть F — линейный метод (регулярный или нет) суммирования последовательностей, который суммирует последовательность $\{z^n\}$ равномерно к нулю в некоторой области, содержащей замкнутую спрямляемую кривую, окружающую точку $z=1$. Утверждается, что метод F содержит противоречие. В качестве примера приводится известный метод Эйлера—Кнопна E_{α} с изменяющимся (комплексным) параметром α.

Примечание референта. Утверждение автора является справедливым лишь при дополнительном условии, что F-сумма последовательности $\{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ отлична от нуля.

Г. Ф. Кангро

4806. **Методы выбора при линейном суммировании. Альбрехт** (Auswahlverfahren bei linearer Li-

mitierung. Albrecht Rudolf), Math. Z., 1957, 67, № 4, 320—331 (нем.)

Эндль (РЖМат, 1957, 1562) предложил обобщение метода суммирования Хаусдорфа, при котором суммируемая последовательность $\{s_n\}$ разделится в k подпоследовательностей $\{s_{\lambda+kn}\}$ $(\lambda=0, 1, \ldots, k-1)$, причем в каждой подпоследовательности применяется соответственно метод Хаусдорфа $(H, \mu_{\lambda+kn})$. Автор рассматривает произвольное разбиение последовательности $\{s_n\}$ в конечное или счетное множество подпоследовательностей $\{s_{\lambda_n}\}$ и последовательность произвольных линейных методов суммирования $\{A_\lambda\}$. Метод суммирования A, называемый автором методом выбора, определяется следующим образом: последовательностью, получаемой из $\{s_n\}$ при помощи A, считается последовательность $\{t_n\}$, подпоследовательности $\{t_{\lambda_n}\}$ которой возникают из $\{s_{\lambda_n}\}$ применением метода A_λ.

Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы метод выбора A был консервативным, в частности регулярным. Изучаются также свойства переместительности, совместимости и включения двух методов выбора A и B, относящихся к одному и тому же разбиению последовательности $\{s_n\}$ в подпоследовательности. Показывается, например, что A и B переместимы (совместны) тогда и только тогда, когда A_λ и B_λ переместимы (совместны) при всех (одном) λ.

Рассматривается пример, когда A_λ — методы суммирования Хаусдорфа. Г. Ф. Кангро

4807. **Об эквивалентности $|B_k|$-процессов. Гайер** (Über die Äquivalenz der $|B_k|$-Verfahren. Gaier Dieter), Math. Z., 1956, 64, № 2, 183—191 (нем.)

По данному ряду

$$\sum a_n \qquad (1)$$

составляются ряд

$$\underbrace{0+0+\ldots+0}_{k}+a_0+a_1+\ldots \qquad (2)$$

и выражение $B_k(x, s_\nu)=e^{-x}\sum \frac{s_n x^n}{n!}$, в котором s_n — частные суммы ряда (2). Ряд (1) называется B_k-суммируемым, если существует предел $\lim_{x\to\infty} B_k(x, s_\nu)$, и $|B_k|$-суммируемым, если существует интеграл $\int_0^\infty \left|\frac{d}{dx} B_k(x, s_\nu)\right| dx$.

Доказана теорема: Все $|B_k|$-процессы эквивалентны, если $a_n=O(k^n)$. Это утверждение перестает быть верным, если условие заменить более слабым $a_n=O(k^n n^{\varepsilon n})$. Для B_k-процессов аналогичный факт известен. Для доказательства этой теоремы устанавливается ряд вспомогательных положений, из которых мы отметим следующее:

Если $f(z)$ — голоморфна и конечной степени в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z\geqslant 0$ и $\int_0^\infty |f(x)|^p dx<\infty$ $(p>0)$, то $\int_0^\infty |f'(x)|^p dx<\infty$.

Далее устанавливается, что при любом $\rho>1$ существует целая функция порядка ρ, у которой существует первый из интегралов и не существует второго. Б. Я. Левин

4808. **Некоторые теоремы о множителях суммируемости для бесконечных интегралов. Сарджент** (Some summability factor theorems for infinite integrals. Sargent W. L. C.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 4, 387—396 (англ.)

Пусть λ, $\mu\geqslant 0$ — постоянные, а $x(t)$ — функция, интегрируемая в смысле Лебега на каждом конечном подынтервале в $(1, \infty)$. Главная теорема статьи:

Суммируемость интеграла $\int_1^\infty x(t)\,dt$ методом (C, λ) влечет за собой суммируемость интеграла $\int_1^\infty k(t)\,x(t)\,dt$ методом $|C, \mu|$ при $\mu\geqslant\lambda+1$ тогда и только тогда, когда:

1) для некоторого $c\geqslant 1$ функция $k(t)$ измерима и существенно ограничена на $(1, c)$;

2) почти везде на (c, ∞)

$$k(t)=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_t^\infty (u-t)^\lambda\, dh(u), \text{ где } \int_a^\infty u^\lambda |dh(u)|<\infty;$$

3) $\int_c^\infty t^{-1}|k(t)|\,dt<\infty$.

Случай $\mu<\lambda+1$ недавно исследован автором (РЖМат, 1958, 451). Соответствующую теорему для интегралов Стилтьеса доказал при $\mu=\lambda+1$ Боруэйн (РЖМат, 1955, 5098). Из реферированной теоремы вытекает, что утверждение теоремы Боруэйна остается справедливым также при $\mu>\lambda+1$ Г. Ф. Кангро

4809. **Суммирование двойных и тройных интегралов методами Чезаро и Абеля. Тедеев С. А.**, Тр. Сталинирск. гос. пед. ин-та, 1956, 3, 523—543

Связь между чезаровскими и абелевскими суммированиями двойных и тройных интегралов. Тедеев С. А., Тр. Сталинирск. гос. пед. ин-та, 1956, 3, 563—576

Суммирование двойных и тройных рядов методами (C, α, β), $(C, \alpha, \beta, \gamma)$ и Абеля. Тедеев С. А., Тр. Сталинирск. гос. пед. ин-та, 1956, 3, 545—562

В указанных заметках рассматривается суммирование интегралов от неограниченных функций и рядов с неограниченными частными суммами методами Чезаро и Абеля. Устанавливаются условия, при которых эти методы регулярны, а также условия при которых из суммируемости ряда или интеграла методом Чезаро следует его суммируемость методом Абеля. Аналогичные результаты, естественно, справедливы и для суммирования тройных рядов и тройных интегралов. Н. Е. Жак

4810. **Некоторые задачи о бесконечных произведениях. Такаги** (Some problems about infinite products. (I). Takagi Shigeyuki), Гифу дайгаку когакубу кэнкю хококу, Res. Repts. Fac. Engng Gifu Prefect. Univ., 1956, № 6, 107—109 (англ.)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

4811. **Об оценке неопределенных интегралов, связанных со специальными функциями; развитие метода. Максимон, Морган** (On the evaluation of indefinite integrals involving the special functions: development of method. Maximon L. C., Morgan G. W.), Quart. Appl. Math., 1955, 13, № 1, 79—83 (англ.)

Сложным способом устанавливаются некоторые очевидные соотношения, содержащие решения обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка. И. П. Натансон

4812. **О выражении неопределенных интегралов, содержащих функции Бесселя, простыми рядами Неймана. Максимон** (On the representation of indefinite integrals containing Bessel functions by

simple Neumann Series. Maximon Leonard C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1054—1062 (англ.)

Устанавливается несколько формул для выражения некоторых интегралов, содержащих функции Бесселя. Например, если α, β, γ — постоянные ($\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq 0$), а $f(x)$ — функция, подчиненная условию

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \int \exp\left[\frac{1}{2}\gamma(1-f^2)g\right] g^2 f^{\nu+n+1} J_{\nu+n}(\gamma f g)\, df = 0,$$

где $g(x) = (\alpha f^2 + \beta)^{-1}$, то

$$\gamma \int \exp\left[\frac{1}{2}\gamma(1-f^2)g\right] g^2 f^{\nu} J_{\nu-1}(\gamma f g)\, df =$$

$$= (\beta-\alpha)^{-1} \exp\left[\frac{1}{2}\gamma(1-f^2)g\right] \cdot \left[\sum_{m=0}^{\infty} f^{m+\nu} J_{m+\nu}(\gamma f g) - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha f}{\beta}\right)^{m+\nu} J_{m+\nu}(\gamma f g)\right].$$

Специализируя выбор $f(x)$, α, β, γ, автор получает некоторые известные соотношения. П. П. Натансон

4813. **О построении полиномов, ортогональных на семействе эллипсов. Взорова А. И.**, Вычислит. математика, сб. I, 1957, 120—130

4814. **Асимптотическое поведение полиномов Эрмита. Хефлингер** (The asymptotic behaviour of the Hermite polynomials. Heflinger Lee O.), Proc. Koninkl. ned rl. akad. wetensch., 1956, A59, № 3, 255—264; Indagationes math., 1956, 18, № 3, 255—264 (англ.)

Применяя мультипликационно-интерполяционный метод, развитый в работах Секера (Szekeres, Acta Sci. Math. Szeged, 1950, B19, 187—198) и Ван дер Корпута (РЖМат, 1958, 1982), автор получает асимптотическую формулу для полиномов Эрмита

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2/2},$$

пригодную для $k = 1$ и произвольных вещественных или комплексных x, удовлетворяющих неравенству $4k < |x|^2$. Эта формула имеет вид

$$\ln H_k(x) = k[\ln x + (1+\zeta)^{-1} + \ln(1+\zeta) - 1/2 - \ln 2] - 1/2[\ln\zeta - \ln(1+\zeta) + \ln 2] - \sum_{h=2}^{n-1} \frac{1}{(4k)^{h-1}} \sum_{s=0}^{h-2} (-1)^s \binom{h-2}{s} \times \int_1^{1/\zeta} u^{-2s-3} P_h(u)\, du + R_n \quad (n \geqslant 3),$$

где $\zeta = (1 - 4k/x^2)^{1/2}$ и $P_h(u)$ — некоторые полиномы относительно u, в частности

$$P_2(u) = 5/4\, u^5 - u^4 - 1/4 u^3, \quad P_3(u) = -15/2 u^8 + 25/4 u^7 + 5/2 u^6 - 5/4 u^5 \text{ и т. д.}$$

Для величины остаточного члена приводится оценка

$$|R_n| \leqslant \frac{(2n-2)!}{n!\,(2k)^{n-1}} \left[\left(1 - \frac{2k^{1/2}}{|x|}\right)^{1-2n} - 1 - (4n-2)\frac{k^{1/2}}{|x|}\right].$$

Примечание референта. Утверждение автора, что данная асимптотическая формула справедлива также для $n = 2$, верно лишь при условии, что для такого значения n сумма $\sum_{h=2}^{n-1}$ должна быть положена равной нулю. Н. Н. Лебедев

4815. **Многочлены Эрмита, эрмитовы функционалы и их интегралы в вещественном гильбертовом пространстве. Милкман** (Hermite polynomials, Hermite functionals and their integrals, in real Hilbert space. Milkman Joseph), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, 6, № 1—2, 65—88 (англ.)

В работе рассматриваются многочлены Эрмита в пространстве n измерений, определяемые равенством $H^p_{i_1 \ldots i_p} = (-1)^p (2\pi)^{-p} w^{-1} \nabla^p_{i_1 \ldots i_p} w$, где $w = e^{-\pi(x,x)}$, $\nabla^p_{i_1 \ldots i_p} = \dfrac{\partial^p}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}}$. Эти многочлены выражаются через обычные многочлены Эрмита. Имеет место формула

$$H^p_{i_1 \ldots i_p} = \prod_{k=p}^{1} \{x_{i_k} - (2\pi)^{-1} \nabla_{i_k}\} \cdot 1.$$

Если $\mathfrak{X}$ — вещественное гильбертово пространство и $A(x)$ — непрерывная симметричная форма в $\mathfrak{X}$ степени n, то через TA обозначается

$$\frac{n(n-1)}{4\pi} \sum_{j=1}^{\infty} A_1(x, \ldots, x, \varphi_j, \varphi_j),$$

где $A(x) = A_1(x, \ldots, x)$ (A_1 — мультилинейная форма) и $\{\varphi_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{X}$. Если ряд для TA абсолютно сходится, то TA не зависит от выбора базиса в $\mathfrak{X}$. Многочлен Эрмита $H^n(A)$, где A — непрерывная симметричная форма степени n определяется формальным рядом

$$H^n(A) = A - TA + \frac{T^2 A}{2!} + \ldots + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{T^{\left[\frac{n}{2}\right]} A}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$$

(ряды, определяющие $T^k A$, могут и расходиться). Выводятся некоторые формулы для этих многочленов и для функций $J^n A(x) = H^n A e^{-\pi(x,x)^2}$ (функций Эрмита). Рассматриваются также некоторые вопросы интегрирования в гильбертовом пространстве.

Н. Я. Виленкин

4816. **О классе функциональных уравнений модулярного типа. Белман** (On a class of functional equations of modular type. Bellman Richard), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 9, 626—629 (англ.)

Функция

$$V_a(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-\pi x^2 s - \pi y^2/s} ds/s^a$$

называется функцией Вороного или обобщенной бесселевой функцией. Работа содержит различные функциональные уравнения для функций, определяемых некоторыми рядами функций $V_a(x, y)$. Например, если

$$f(x, y; u, v; t_1, t_2) = \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty}{}' V_a[(x+m)\sqrt{t_1}, (y+n)\sqrt{t_2}]\, e^{2\pi i(mu+nv)},$$

то

$$f(x, y; u, v; t_1, t_2) = \frac{e^{-2\pi i(xu+yv)}}{\sqrt{t_1 t_2}} f(v, u; -y, -x; t_2^{-1}, t_1^{-1}).$$

Из этих соотношений получаются некоторые теоретико-числовые тождества. Даны различные обобщения функций Вороного и соответствующих тождеств (на функции матричного аргумента, алгебраические числовые поля и т. д). Н. Я. Виленкин

4817. Об одном классе целых функций. Х р и п т у н М. Д., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 5, 1002—1005

Функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{(2n)!\,n!},$$

введенная референтом (РЖМат, 1956, 1329, 1485) при построении аналога спектральной теории задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального оператора 2-го порядка, после замены s на $(z/3)^3$, $n!$ на $\Gamma(n+p+1)$ и умножения на $(z/3)^p$ удовлетворяет уравнению

$$z^3U''' + \frac{3}{2}z^2U'' - \frac{1}{2}z(6p^2+3p+1)U' + \left(2p^3+3p^2-\frac{1}{4}z^3\right)U = 0 \qquad (1)$$

— аналогу уравнения Бесселя.

Автор находит: 1) три типа решений уравнения (1); 2) их производящую функцию

$$\frac{1}{2\pi}\exp\left[\frac{z}{3}(e^{-2iw}+e^{iw})+2piw\right],$$

через которую они выражаются контурными интегралами по комплексному переменному w; 3) теоремы сложения, в которых алгебраическая функция

$$R = \sqrt[3]{(r_1e^{-i\theta/2}-r_2)(r_1e^{i\theta}-r_2)}$$

играет ту же роль, какая в теоремах сложения для цилиндрических функций принадлежит функции

$$R = \sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\theta}.$$

М. К. Фаге

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4818. Асимптотические разложения методом стационарной фазы. Ф о к к е (Asymptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationären Phase. F o c k e J o a c h i m.), Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-naturwiss. Kl., 1957, **101**, № 3, 48 S., ill. (нем.)

В первой части работы рассматриваются асимптотические разложения при $|p|\to\infty$ интегралов

$$I(p) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-p\varphi(x)} g(x)\,dx,$$

где p — комплексный параметр, причем $|p|>1$, $|\arg p|\leqslant\pi/2$, x — вещественная переменная, $g(x)$ и $\varphi(x)$ — вещественные функции, не зависящие от p. Пусть $\varphi(x)$ во всем промежутке (ξ_1, ξ_2) обладает производными сколь угодно высокого порядка. Предполагается, что внутри промежутка (ξ_1, ξ_2) имеется конечное число точек стационарности $x=\xi$ функции $\varphi(x)$. Пусть $\varphi'(\xi)=0,\ \ldots,\ \varphi^{(\alpha-1)}(\xi)=0;\ \varphi^{(\alpha)}(\xi)\neq 0$, причем α может иметь для различных ξ различные значения. Точки ξ называются критическими точками первого рода, а точки ξ_1 и ξ_2 критическими точками второго рода.

Функция $g(x)$ должна иметь в обыкновенных точках промежутка (ξ_1, ξ_2) производные сколь угодно высокого порядка. В критической точке ξ $g(x)$ может обращаться в бесконечность, но при этом $g(x) = |x-\xi|^{-\lambda}\tilde{g}(x)$, $0\leqslant\lambda<1$, где функция $g(x)$, так же как и $\varphi(x)$, в окрестности ξ разлагается в ряд Тейлора.

Пусть при $|h|\leqslant\delta$

$$\varphi(\xi+h)-\varphi(\xi) = \sum_{\nu=\alpha}^{\infty}\varphi_\nu h^\nu,$$

$$g(\xi+h)-g(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu h^\nu.$$

Параллельно рассматриваются два случая: а) $|\arg p| = \pi/2$ и б) $|\arg p|\leqslant\vartheta<\pi/2$.

В случае б) допускается, что во всех критических точках $\varphi(\xi)=0$, а вне δ-окрестностей точек ξ $\varphi(x)\geqslant S>0$.

Если ξ_1 — критическая точка, для которой $\alpha\geqslant 1$, то $\varphi^{(\alpha)}(\xi_1)>0$, если ξ — внутренняя критическая точка, то α должно быть четным числом, а $\varphi^{(\alpha)}(\xi)>0$ ($\alpha\geqslant 2$); если ξ_2 — критическая точка, то либо α четное и $\varphi^{(\alpha)}(\xi_2)>0$, либо α нечетное и $\varphi^{(\alpha)}(\xi_2)<0$.

Каждой критической точке ξ сопоставляется нейтрализатор $N_\xi(x)$, определяемый условиями: $N_\xi(x)=1$, если $|x-\xi|<\varepsilon$, $N_\xi(x)=0$, если $|x-\xi|\geqslant\delta>\varepsilon>0$, причем $N_\xi(x)$ имеет при любом x непрерывные производные сколь угодно высокого порядка. Пусть

$$I_\xi^+(p) = \int_\xi^{\xi+\delta} N_\xi(x)\,g(x)\,e^{-p\varphi(x)}\,dx;$$

$$I_\xi^-(p) = \int_{\xi-\delta}^{\xi} N_\xi(x)\,g(x)\,e^{-p\varphi(x)}\,dx,$$

$$I_\xi(p) = I_\xi^-(p) + I_\xi^+(p).$$

Доказывается, что при $|p|\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$I(p)\sim I_{\xi_1}^+(p) + \sum_\xi I_\xi(p) + I_{\xi_2}^-(p).$$

Устанавливаются следующие асимптотические разложения:

$$I_\xi^+(p)\sim e^{-p\varphi(\xi)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\alpha}\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda+1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\varphi_\alpha p}\right)^{(\nu-\lambda+1)/\alpha},$$

$$I_\xi^-(p)\sim e^{-p\varphi(\xi)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu a_\nu}{\alpha}\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda+1}{\alpha}\right)\times \left(\frac{1}{(-1)^\alpha\varphi_\alpha p}\right)^{(\nu-\lambda+1)/\alpha},$$

причем, в случае б) $\varphi(\xi)=0$.

Вторая часть работы посвящена двойным интегралам

$$I(p) = \iint_D g(x,y)\,e^{-p\varphi(x,y)}\,dxdy,$$

зависящим от комплексного параметра p, причем $|p|\to\infty$ и либо а) $|\arg p|=\pi/2$, либо б) $|\arg p|\leqslant\vartheta<\pi/2$. Граница C области D задается уравнением $f(x,y)=0$ и состоит из конечного числа кусков, вдоль каждого из которых $f(x,y)$ имеет непрерывные производные сколь угодно высокого порядка; $\varphi(x,y)$ и $g(x,y)$ — вещественные функции, имеющие в замкну-

той области D непрерывные производные сколь угодно высокого порядка. Вдоль C $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \geqslant a>0$.

Рассматриваются три рода критических точек (ξ, η).

1) Критическими точками (ξ, η) первого рода называются точки замкнутой области D, в которых $\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$.

2) Критическими точками (ξ, η) второго рода называются точки границы C, в которых

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix}=0.$$

3) Вершины контура C любого порядка, т. е. точки контура, в которых какая-нибудь производная функции $f(x, y)$ терпит разрыв, называются критическими точками третьего рода. Предполагается, что в окрестности критических точек функции $\varphi(x, y)$, $g(x, y)$ и $f(x, y)$ разлагаются в абсолютно сходящиеся степенные ряды. В случае б) всюду в D $\varphi(x, y) \geqslant 0$.

Каждой критической точке (ξ, η) сопоставляется нейтрализатор $N_{\xi, \eta}(x, y)$, определяемый следующими условиями: $N_{\xi, \eta}(x, y)=1$ в некоторой замкнутой окрестности E точки ξ, η и $N_{\xi, \eta}(x, y)=0$ вне некоторой области Δ, содержащей E, причем $N_{\xi, \eta}(x, y)$ всюду в D имеет непрерывные производные любого порядка. Пусть

$$I_{\xi, \eta}(p)=\iint_D N_{\xi, \eta}(x, y)\, g(x, y)\, e^{-p\varphi(x, y)} dx dy.$$

Доказывается, что при $|p| \to \infty$

$$I(p) \sim \sum_{\xi, \eta} I_{\xi, \eta}(p).$$

Затем выводятся асимптотические разложения интегралов $I_{\xi, \eta}(p)$, принадлежащих критическим точкам различного рода.

В заключение исследуются критические точки первого рода, лежащие на границе C области D и для которых $\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2 \neq 0$. Ю. Л. Рабинович

4819. **Теоремы, относящиеся к проблеме устойчивости линейных систем. Бауэр** (Some theorems applicable to the problem of stability in linear systems. Bower John L.), IRE Convent. Rec., 1956, Part 2, 4, 8—12 (англ.)

Рассматриваются теоремы, устанавливающие достаточные условия конечных отклонений функции $W(t)$ по свойствам ее лапласового изображения $H(s)$. Г. М. Уланов

4820. **Интерпретирование теорем о цепи в терминах преобразований Лапласа. Нарбутт** (Interpretation of network theorems in terms of Laplace transforms. Narbutt V. M.), J. Instn Telecommun. Engrs, 1957, 3, № 4, 304—309 (англ.).

4821. **Дискретные приближения преобразования Лапласа. Вазов** (Discrete approximations to the Laplace transformation. Wasow Wolfgang), Z. angew Math. und Phys., 1957, 8, № 5, 401—417 (англ.; рез. нем.)

Вводится дискретный аналог преобразования Лапласа

$$\mathfrak{L}f=\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

в виде суммы

$$h\mathfrak{Z}_s f=h\sum_{n=0}^\infty f(nh)\, e^{-snh},$$

причем

$$\mathfrak{L}f-h\mathfrak{Z}_s f=\sum_{\nu=1}^m \frac{h^\nu}{\nu!} B_\nu \left[\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}[f(t)\, e^{-st}]\right]_{t=0}+R_m,$$

$$R_m=\frac{h^{m+1}}{m!}\int_0^\infty \bar{B}_m(-t)\left[\frac{d^m}{dx^m}[f(x)\, e^{-sx}]\right]_{x=th} dt.$$

Здесь m — произвольное положительное целое число, B_ν — ν-число Бернулли, $\bar{B}_m(z)$ — периодическая функция с периодом, равным единице, совпадающая в интервале $0 \leqslant z < 1$ с m-многочленом Бернулли. Вышеуказанное дискретное преобразование используется для приближенного решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами, а также некоторых нелинейных уравнений. А. П. Прудников

4822. **Вещественная формула обращения для класса двусторонних преобразований Лапласа. Гаффи** (A real inversion formula for a class of bilateral Laplace transforms. Gaffey William R.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 1, 879—883 (англ.)

Обобщается формула обращения Поста—Уиддера на двусторонние (билатеральные) преобразования Лапласа.

Пусть $\Phi(u)$ интегрируема на $(-\infty, \infty)$ и c — ее точка непрерывности. Если

$$\left|\int_{-\infty}^{-x} \Phi(z)\, dz\right| \leqslant A \exp(-dx^{2+\alpha})$$

для некоторых A, d, α, и если $\max(1/3, 1/(2+\alpha)) < \varepsilon < 1/2$, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{k+1}}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi[(c+k^{\varepsilon})z-k^{\varepsilon}]\, z^k \exp(-kz)\, dz=\Phi(c).$$

Л. Я. Цлаф

4823. **Преобразование Лапласа—Стилтьеса возрастающей векторной функции. Олубумме** (The Laplace—Stieltjes transform of an increasing vector-valued function. Olubummo A.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 30, 97—107 (англ.)

Дается обобщение теоремы Гамбургера на случай векторной функции: Пусть V — частично упорядоченное банахово пространство с нормальным конусом V^+ и $T(t)$ — возрастающая функция, определенная на $[0, \infty)$ с значениями в V. Тогда абсцисса сходимости ξ_0 преобразования Лапласа—Стилтьеса $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dT(t)=f(\lambda)$ есть особая точка функции $f(\lambda)$. Л. Я. Цлаф

4824. **О мультипликаторах интегралов Фурье. Михлин С. Г.**, Докл. АН СССР, 1956, 109, № 4, 701—703

Доказывается следующая теорема:

Пусть E_m — евклидово пространство m измерений и пусть во всем пространстве E_m, кроме, быть может, начала координат, функция $\Phi(x)$ непрерывна и ее производная $\partial^m\Phi/\partial x_1 \ldots \partial x_m$ существует в каждой точке, тогда как все производные, предшествующие этой, непрерывны. Пусть еще $|x|^k |D^k\Phi| \leqslant M$, $k=0, 1, \ldots, m$, где D^k — любые из упомянутых производных и k — ее порядок. Тогда оператор

$$F(g)=h(x)=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int_{E_m} e^{i(x, y)} \times$$

$$\times \Phi(y)\, dy \int_{E_m} e^{-i(y, z)} g(z)\, dz$$

определен на множестве, плотном в $L_p(E_m)$, $1<p<\infty$, и ограничен в этом пространстве.

Эта теорема применяется для установления ограниченности в $L_p(E_m)$ сингулярного оператора вида

$$Au = au(x) + \int_{E_m} \frac{\Phi(\theta)}{r^m} u(y)\,dy, \quad a = \text{const}.$$

А. Г. Костюченко

4825. Об одном обобщенном интеграле Лапласа. Саксена (On a generalized Laplace integral. Saksena K. M.), Math. Z., 1957, 68, № 3, 267—271 (англ.)

Необходимыми и достаточными условиями представления функции в форме преобразования Мейера

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}xt} (xt)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+1/2,\,m}(xt)\,\varphi(t)\,dt$$

с ограниченной функцией $\varphi(t)$ являются:
1) $f(x)$ — бесконечно дифференцируема на $(0, \infty)$; 2) $f(x) \to 0$ для $x \to \infty$; 3) $|V_q[f(u)]| < M$ $(0 < u < \infty$; $q = 1, 2, \ldots)$, M — константа.

Здесь

$$V_q[f(u)] = \frac{u^{-1}}{\Gamma\left(q+k+m-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times [U_q[f(x)]]_x = \frac{q+k+m-\frac{1}{2}}{u},$$

$$U_0[f(x)] = f(x),$$

$$U_1[f(x)] = (-1)\, x^{m-k-\frac{3}{2}} D\left[x^{k-m+\frac{1}{2}} f(x)\right], \ldots,$$

$$U_q[f(x)] = (-1)^q x^{m-k-q-\frac{1}{2}} D^q\left[x^{k-m+\frac{1}{2}} f(x)\right]$$

$$(q = 2, 3, \ldots), \quad D \equiv x^2 d/dx.$$

Л. Я. Цлаф

4826. Заметка об обобщенном преобразовании Вебера. Гриффит (A note on a generalisation of Weber's transform. Griffith James L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1956, 90, № 4, 157—162 (англ.)

Вводится в рассмотрение обобщенное преобразование Вебера

$$F(s) = \int_0^\infty xC_\nu(xs, as) f(x)\,dx,$$

где

$$C_\nu(z, w) \equiv J_\nu(z)[PY_\nu(w) - QY_{\nu+1}(w)] -$$

$$- Y_\nu(z)[PJ_\nu(w) - QwJ_{\nu+1}(w)],$$

$J_\nu(t)$, $Y_\nu(t)$ — функции Бесселя; P, Q — произвольные постоянные. Приводятся формулы обращения и формулы Парсеваля трех типов в зависимости от условий накладываемых на P, Q, ν. Используя вышеуказанное преобразование при $P = h$, $Q = 1$, $\nu = 0$, решается краевая задача

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} + hz = 0 \text{ при } r = a,$$

$$z = f(r), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0$$

в двух случаях, когда $h < 0$ и $h > 0$.

А. П. Прудников

4827. Операционное исчисление: 1. Общие принципы (Operational calculus: 1. — General principles. Computer.), Electronic and Radio Engr, 1957, 34, № 9, 345—347 (англ.)

4828 К. Таблицы для преобразований Фурье. Оберхеттингер (Tabellen zur Fourier-Transformation. Oberhettinger Fritz. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1957, X, 213 S., 39.50 DM), Disch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 20, 1414 (нем.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4829. Математический аппарат в линейных сервомеханизмах. Перре (Les instruments mathématiques dans les servomécanismes linéaires. Perret René), Automatisme, 1957, 2, № 11, 403—412 (франц.)

4830. Расчет рам шедового типа при помощи уравнения в конечных разностях. Кэраре, Амзулеску (Calculul cadrelor tip shed prin ecuaţii cu diferenţe finite. Cărare Teodor, Amzulescu Cezar), Studii şi cercetări mec. apl., 1957, 8, № 1, 190—212 (рум.; рез. русск., франц.)

См. также: 4612, 4615, 4653, 4733, 4750, 4772

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

4831. Критерий компактности множества в линейном топологическом пространстве. Тарнопольский (Критерій компактності множини в лінійному топологічному просторі. Тарнопольський В. Г.), Наук. зап. Криворізьк. держ. пед. ін-т, 1957, вип. 2, 157—161 (укр.)

Пусть T — линейное топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, $\{U_\nu\}$ — полная система окрестностей нуля. Множество L_{ν_0} называется U_{ν_0}-сетью для части D пространства T, если $L_{\nu_0} \subset D$ и множества вида $x + U_{\nu_0}$ $(x \in L_{\nu_0})$ покрывают D. Предполагая, что все окрестности U_ν симметричны относительно нуля, автор доказывает следующую теорему.

Для компактности части D пространства T необходимо, а в случае полноты T — достаточно, чтобы для каждой окрестности U_ν существовала в D конечная U_ν-сеть.

М. С. Бродский

4832. Характеристическое свойство пространств L_p в классе пространств Орлича. Салехов Д. В., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1957, вып. 5, 39—51

Подробное изложение сформулированных ранее результатов (РЖМат, 1957, 6476).

Я. Б. Рутицкий

4833. Почти равномерная сходимость. Брейс (Almost uniform convergence. Brace John W.), Portugaliae math., 1955, 14, № 3—4, 99—104 (англ.)

Пусть $\{f_\alpha, \alpha \in D\}$ — сеть (т. е. обобщенная последовательность) функций, принимающих вещественные или комплексные значения. Говорят, что она сходится почти равномерно к функции f_0 на множестве A, принадлежащем пространству определения функций, если $\lim_\alpha \overline{\lim_\beta} |f_\alpha(x_\beta) - f_0(x_\beta)| = 0$ для любой сети $\{x_\beta, \beta \in B\}$ из A. Понятие почти равномерной сходимости сети функций используется автором для изучения топологий в линейных пространствах и для изучения непрерывности линейных операторов. Пусть E — локально выпуклое линейное топологическое пространство, E^* и E^{**} — сопряженные пространства соответственно с E и E^*. В E^* рассматриваются две топологии: слабая* топология равномерной сходимости на конечных множествах из E и слабая топология равномерной сходимости на конечных множествах из E^{**}. Пусть T — линейный оператор, отображающий E в локально выпуклое линейное топологическое пространство F. Оператор T называется слабо непрерывным, если он непрерывен для слабых топологий в E и F. Сопряженный оператор T^* (отображающий F^* в E^*) называют слабо непрерывным, если он непрерывен для слабых топологий в F^* и E^*.

Доказываются следующие теоремы.

1) Слабая* топология в E^* эквивалентна топологии почти равномерной сходимости на слабо компактных множествах из E.

2) Слабая топология в E эквивалентна топологии почти равномерной сходимости на слабо* компактных множествах из E^*.

3) Слабая топология в E^* эквивалентна топологии почти равномерной сходимости на ограниченных множествах из E.

4) Если оператор T слабо непрерывен, то и сопряженный оператор T^* слабо непрерывен.

5) Следующие три предложения эквивалентны: а) оператор T слабо компактен; б) оператор T^* непрерывен для слабой* топологии в F^* и слабой топологии в E^*; в) оператор T^{**} непрерывен для слабой* топологии в E^{**} и слабой топологии в F (предполагая F^* наделенным слабой* топологией, а E^* — слабой, можно считать, что оператор T^{**} отображает E^{**} в F).

Отмечается, что последняя теорема принадлежит Гротендику (РЖМат, 1954, 5663), но ее доказательство в реферируемой статье проводится иначе, чем у него. С. Н. Крачковский

4834. Некоторые классы гомоморфизмов в векторных пространствах. Депри (Quelques classes d'homomorphismes dans des espaces vectoriels. Deprit André), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1957, Sér. 1, 71, № 1, 5—43 (франц.)

В статье систематически изучаются свойства различных гомоморфизмов одного векторного пространства в другое (или в себя), причем изложение ведется в чисто алгебраическом аспекте. Все векторные пространства $A, B, \ldots$ рассматриваются над одним и тем же коммутативным телом. Если f — гомоморфизм A в B, то $\mathrm{Ker}(f)$ обозначает его ядро, $\mathrm{Im}(f)$ — его образ, $k(f) = \dim_A \mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{cok}(f) = \mathrm{codim}_B \mathrm{Im}(f)$; разность $\varkappa(f) = k(f) - \mathrm{cok}(f)$ (в предположении, что $k(f)$ и $\mathrm{cok}(f)$ конечны) называется индексом гомоморфизма f. Основные результаты содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть f — гомоморфизм A в B. 1) Для того чтобы имело место $k(f) < \infty$ или $\mathrm{cok}(f) < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $f = f_1 + f_2$, где f_1 — мономорфизм или эпиморфизм, а f_2 — гомоморфизм конечного ранга. 2) Для того чтобы имело место $k(f) < \infty$ и $\mathrm{cok}(f) = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы f_1 было мономорфизмом с образом бесконечной коразмерности. 3) Для того чтобы имело место $k(f) < \infty$, $\mathrm{cok}(f) < \infty$ и $\varkappa(f) < 0$, необходимо и достаточно, чтобы f_1 было мономорфизмом с образом конечной, отличной от нуля коразмерности. 4) Для того чтобы имело место $k(f) < \infty$, $\mathrm{cok}(f) < \infty$ и $\varkappa(f) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы f_1 было изоморфизмом A на B. 5) Для того чтобы имело место $k(f) < \infty$, $\mathrm{cok}(f) < \infty$ и $\varkappa(f) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы f_1 было эпиморфизмом с ядром конечной, отличной от нуля коразмерности. 6) Для того чтобы имело место $k(f) = \infty$ и $\mathrm{cok}(f) < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы f_1 было эпиморфизмом с ядром бесконечной размерности.

Теорема 2. Для того чтобы эндоморфизм f пространства A имел ядро конечной размерности и чтобы последовательность итерированных ядер $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}(f^n) \subset \ldots$ насчитывала только конечное число различных между собой подпространств, необходимо и достаточно, чтобы $f = g_1 + g_2$, где g_1 есть мономорфизм пространства A в себя, g_2 — эндоморфизм конечного ранга, $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

Теорема 3. Для того чтобы эндоморфизм f пространства A имел образ конечной коразмерности и чтобы последовательность итерированных образов $A = \mathrm{Im}(f^0) \supset \mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Im}(f^2) \supset \ldots \supset \mathrm{Im}(f^n) \supset \ldots$ насчитывала только конечное число различных между собой подпространств, необходимо и достаточно, чтобы $f = g_1 + g_2$, где g_1 есть эпиморфизм пространства A на себя, g_2 — эндоморфизм конечного ранга, $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

Теорема 4. Для того чтобы эндоморфизм f пространства A был эндоморфизмом Рисса (РЖМат, 1958, 3891), необходимо и достаточно, чтобы $f = g_1 + g_2$, где g_1 — автоморфизм пространства A, g_2 — эндоморфизм конечного ранга, $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

С. Н. Крачковский

4835. Теоремы существования и экстремальные решения для неравенств с выпуклыми функциями или линейными операторами. Фань Цюй (Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations. Fan Ky), Math. Z., 1957, 68, № 2, 205—216 (англ.)

На системы неравенств с выпуклыми функциями или с линейными операторами обобщаются некоторые результаты теории линейных неравенств. Приведем, например, теорему 1: Пусть K — компактное выпуклое множество в линейном топологическом пространстве, а $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ — семейство полунепрерывных сниз выпуклых функций на K. Тогда система $f_\nu(x) \leqslant 0$ ($\nu \in I$) совместна на K тогда и только тогда, когда для любого набора индексов $\nu_1, \ldots, \nu_n$ из I и любых $\lambda_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выполняется неравенство

$$\min_{x \in K} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\nu_i}(x) \leqslant 0.$$

При помощи теоремы 1 доказывается теорема 4. Пусть A — линейный непрерывный оператор из рефлексивного банахова пространства X в линейное нормированное пространство Y. Пусть C — замкнутое выпуклое множество в Y, содержащее нулевой элемент, и $y_0 \in Y$. Тогда, для того чтобы для $\rho \geqslant 0$ существовал $x \in X$ такой, что $\|x\| \leqslant \rho$ и

$$Ax - y_0 \in C,$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $f \in \hat{C}$ было $1 + f(y_0) + \rho \| A^* f \| \geqslant 0$, где $\hat{C} = \{f \in X^* \mid f(x) \leqslant 1$ для каждого $x \in C\}$. Если множество S всех $x \in X$, удовлетворяющих (1), не пусто и $0 \notin S$, то

$$\min_{x \in S} \| x \| = \sup_{\substack{f \in \hat{C} \\ A^* f \neq 0}} \frac{-1 - f(y_0)}{\| A^* f \|}.$$

Устанавливается ряд теорем для случая вполне непрерывного оператора. С. И. Зуховицкий

4836. **Предкомпактность линейных операторов в локально выпуклых пространствах. Рингрос** (Precompact linear operators in locally convex spaces. Ringrose J. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 3, 581—591 (англ.)

Пусть E — локально выпуклое хаусдорфово пространство над телом комплексных чисел. Сопряженное с ним пространство E' есть пространство линейных непрерывных функционалов на E, наделенное топологией равномерной сходимости на всяком ограниченном множестве из E. Линейный оператор T, отображающий E в себя, называется предкомпактным, если существует окрестность V нуля в E такая, что множество $T(V)$ предкомпактно в E; если V можно выбрать так, чтобы $T(V)$ было компактно в себе, то оператор T называется компактным. Оба эти условия влекут ограниченность T. Доказывается, что если A и T — линейные операторы, отображающие E в себя, причем оператор A ограничен, а T предкомпактен, то $T'A'$ (T' и A' — операторы, сопряженные с T и A) есть компактный оператор, отображающий E' в себя. Далее доказываются три теоремы, которые обобщают теорию Рисса—Шаудера на случай компактных операторов в локально выпуклых хаусдорфовых пространствах. В отличие от аналогичных обобщений Лере (Leray J., Acta scient. math., 1950, 12, 177—186) и Вильямсона (РЖМат, 1955, 5937), автор не предполагает компактности оператора, сопряженного с рассматриваемым. В заключение доказывается, что если T — предкомпактный оператор, действующий в E, и комплексное число $\lambda (\neq 0)$ не является собственным значением для сопряженного оператора T', то: 1) область значений $\mathfrak{M}_\lambda$ оператора $T - \lambda I$ всюду плотна в E; 2) оператор $T - \lambda I$ отображает E на $\mathfrak{M}_\lambda$ взаимно однозначно; 3) оператор $T' - \lambda I'$ непрерывно обратим.

Как отмечает автор, в статье Альтмана (РЖМат, 1955, 1846) также дано обобщение теории Рисса—Шаудера, но понятие непрерывности там определено с помощью последовательностей, а не с помощью окрестностей. Поэтому понятие компактности оператора и понятие сопряженного пространства имеют там иной смысл. С. Н. Крачковский

4837. **Об одном распространении теоремы продолжения Урысона—Титце. Акуаро** (Sopra talune estensioni del teorema di prolungamento di Uryshon—Tietze. Aquaro Giovanni), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, 6, № 1—2, 111—115 (итал.)

Автор дает свое доказательство двух предложений Аренса (Arens R., Pacif. J. Math., 1952, 2, 11—12; см. также РЖМат, 1954, 1593), распространяющих теорему Урысона на отображения нормальных топологических пространств в банаховы. В. А. Ефремович

4838. **Свойство рефлексивности и верхняя грань линейных функционалов. Джеймс** (Reflexivity and the supremum of linear functionals. James Robert C.), Ann. Math., 1957, 66, № 1, 159—169 (англ.)

Известно, что если пространство Банаха рефлексивно, то каждый линейный непрерывный функционал достигает своей верхней грани на единичной сфере этого пространства. Автор ставит своей целью получение обратных теорем. Приведем основные результаты.

Теорема 2. Каждое из следующих условий является достаточным для рефлексивности банахова пространства B: 1) Всякий непрерывный линейный функционал достигает своей верхней грани на единичной сфере любого сепарабельного подпространства пространства B; 2) B имеет базис безусловной сходимости (т. е. такой базис, что разложение всякого элемента сходится при любой перестановке членов) и каждый линейный непрерывный функционал достигает своей верхней грани на единичной сфере пространства B.

Теорема 3. Всякое сепарабельное пространство Банаха рефлексивно, если любой непрерывный линейный функционал достигает своей верхней грани на единичной сфере этого пространства.

Теорема 4. Обозначим через S единичную сферу банахова пространства B. Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для рефлексивности B:

а) Пусть W есть ограниченное замкнутое выпуклое подмножество пространства B такое, что $W \cap S = 0$; тогда W и S могут быть отделены гиперплоскостью, не пересекающей W.

б) Каково бы ни было ограниченное замкнутое выпуклое подмножество W пространства B, $S + W$ есть замкнутое множество ($S + W$ есть множество всех сумм $s + w$, $s \in S$, $w \in W$).

в) Каково бы ни было ограниченное замкнутое выпуклое подмножество W пространства B, выпуклая оболочка множества $S \cup W$ замкнута.

В. Н. Никольский

4839. **Об одном классе пространств Сакса. Матушевская, Орлич** (On a class of Saks spaces. Matuszewska W., Orlicz W.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 6, 611—614 (англ.; рез. русск.)

Пусть $\varphi(u)$ выпукла и непрерывна при $u \geqslant 0$; $\varphi(0) = 0$; $\varphi(u) > 0$, $u > 0$; $\varphi(u)/u \to 0$, $u \to 0$; $\varphi(u)/u \to \infty$, $u \to \infty$; $\psi(u)$ — функция, дополнительная к $\varphi(u)$. Для всякой вещественной измеримой при $-\infty < t < \infty$ функции $x(t)$ положим

$$\Im_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(|x(t)|)\, dt, \quad \Im_\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(|x(t)|)\, dt,$$

$$\Im(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt.$$

Пусть L^φ или M — класс функций $x(t)$, $-\infty < t < \infty$ таких, что $\Im_\varphi(kx) < \infty$ для некоторого $k > 0$ или соответственно $\operatorname{vrai\,max} |x(t)| < \infty$. L^2 обозначает L^φ при $\varphi(u) = u^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$. Далее, пусть M состоит из функций класса M, для которых $\Im(x) < \infty$, а $M^\varphi = M \cap L^\varphi$. Доказано, что для того чтобы $M^{\varphi_2} \subset M^{\varphi_1}$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_1(u) = O[\varphi_2(u)]$ при $u \to 0$, а для того чтобы $M = M^\varphi$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(2u) = O[\varphi(u)]$ при $u \to 0$.

В линейном пространстве M^φ рассматриваются следующие нормы: $\| x \| = \operatorname{vrai\,max} |x(t)|$, $-\infty < t < \infty$; $\| x \|^* = \inf l$, $l > 0$, $\Im_\varphi(x/l) \leqslant 1$; $\| x \|^0 = \sup |\Im(xy)|$, $\Im_\varphi(y) \leqslant 1$.

Нормы $\| \|^*$ и $\| \|^0$ можно также рассматривать на L^φ. Относительно этих норм L^φ полно, причем $\| x \|^* \leqslant \| x \|^0 \leqslant 2 \| x \|^*$. Пусть M_s^φ — множество тех функций из M^φ, для которых $\| x \| \leqslant 1$. Определяя расстояние формулой $d(x, y) = \| x - y \|^*$, превращаем M_s^φ в пространство Сакса. Доказывается, что соотношения (а) $\| x_n \|^* \to 0$, $n \to \infty$,

$x_n \in M_s^{g\varphi}$ и (б) $\Im_{\xi}(x_n) \to 0$, $n \to \infty$, $x_n \in M_s^{g\varphi}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\varphi(2u) = O[\varphi(u)]$, $u \to 0$. Это же условие необходимо и достаточно для сепарабельности пространства $M_s^{g\varphi}$.

Дистрибутивный функционал ξ на $M^{g\varphi}$ называется линейным на $M_s^{g\varphi}$, если из $\| x_n \| \leqslant 1$ и $\| x_n \|^* \to 0$ вытекает $\xi(x_n) \to 0$. Далее $\| \xi \|^* = \sup \{ | \xi(x) | ;\ x \in M^{g\varphi}, \| x \| \leqslant 1, | x |^* \leqslant 1 \}$. Доказывается, что функционалы вида (α) $\xi_1(x) = \Im(xy_1)$, $y_1 \in L^1$, и (α') $\xi_2(x) = \Im(xy_2)$, $y_2 \in L^{g\varphi}$ линейны на $M_s^{g\varphi}$. Если $\varphi(2u) = O[\varphi(u)]$, $u \to 0$, то общий вид линейного функционала на $M_s^{g\varphi}$ будет $\xi(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x)$ (ср. (α) и (α')).

При этом функционалы ξ_1 и ξ_2 всегда можно подобрать так, чтобы $\| \xi \|^* = \| \xi_1 \|^* + \| \xi_2 \|^*$, $\| \xi_1 \|^* = \| y_1 \|^*$, $\| y_2 \|^*/2 \leqslant \| \xi_2 \|^* \leqslant 2 \| y_2 \|^*$ ($\| y_2 \|^*$ — обычная норма функционала в L^1). Если условие $\varphi(2u) = O[\varphi(u)]$, $u \to 0$, не выполнено, то существуют линейные на $M_s^{g\varphi}$ функционалы, не представимые с помощью интеграла $\Im(xy)$. Если же это условие выполнено, то для сходимости последовательности ξ_n функционалов, линейных на $M_s^{g\varphi}$, необходимо и достаточно, чтобы а) существовали функции $y_{1n} \in L^1$, $y_{2n} \in L^{\psi}$, удовлетворяющие условию $\| y_{1n} \|^* \leqslant K$, $\| y_{2n} \|^* \leqslant K$, $0 < K < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$; б) $\xi_n(x) = \xi_1^n(x) + \xi_2^n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\xi_1^n(x) = \Im(xy_{1n})$, $\xi_2^n(x) = \Im(xy_{2n})$, в) интегралы $\int_e | y_{1n}(t) + y_{2n}(t) | \, dt$ равнонепрерывны на кольце множеств конечной меры; г) для каждого τ существует предел $\lim \Im(x_\tau (y_{1n} + y_{2n}))$, где x_τ — характеристическая функция интервала $(0, \tau)$. В. Э. Лянце

4840. Распространение теоремы Крейна, Мильмана и Рутмана о базисах на случай пространства типа B_0. Бессага, Пелчинский (An extension of the Krein — Milman — Rutman theorem concerning bases to the case of B_0-spaces. Bessaga C., Pełczyński A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 4, 379—383, XXX (англ.; рез. русск.)

Пусть E — линейное пространство типа B_0 (линейное, счетно-нормированное, полное пространство) с базисом. Доказываются следующие теоремы: 1) Для того чтобы любое подмножество $Z \subset E$, плотное в E, содержало базис пространства E, необходимо и достаточно, чтобы в E существовала однородная непрерывная норма. 2) Для того чтобы этим свойством обладало любое плотное линейное подмножество $Z \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы в E существовала однородная непрерывная норма или E было изоморфно пространству s (s — пространство числовых последовательностей с метрикой

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} | x_n - y_n | / (1 + | x_n - y_n |).$$

В. Э. Лянце

4841. Выпуклые множества и ближайшие точки. Фелпс (Convex sets and nearest points. Phelps R. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 790—797 (англ.)

Пусть E — линейное нормированное пространство, S — некоторое подмножество E, $z \in S$. Через S_z обозначается множество таких точек $x \in E$, для которых z является ближайшей точкой в S, т. е. множество таких $x \in E$, для которых $\| x - z \| = \inf_{y \in S} \| x - y \|$. Множества $S \subset E$, к которым расстояние от любой точки $x \in E$ всегда достигается, автор называет проксиминальными (proximinal). Изучаются некоторые свойства множеств S и пространства E в связи со свойствами множеств S_z. Приведем некоторые утверждения.

Теорема 3.4. Замкнутое множество S конечномерного пространства выпукло тогда и только тогда, когда для любого $z \in S$ множество S_z является конусом с вершиной в z.

Пространство E называется пространством со скалярным произведением (inner product space), если в E можно ввести скалярное произведение (x, y) так, чтобы имеющаяся в нем норма $\| x \|$ была равна $\sqrt{(x, x)}$.

Теорема 4.3. Пусть размерность пространства E не менее трех (соответственно равна двум). Тогда пространство E является пространством со скалярным произведением (соответственно строго выпукло) в том и только том случае, если для любого выпуклого множества S и любого $z \in S$ множество S_z выпукло.

Пусть множество S из E проксиминально. Тогда можно определить оператор $f: z = f(x)$, ставящий в соответствие каждой точке $x \in E$ ближайшую в S точку z. Пространство E обладает свойством P, если для любого замкнутого выпуклого множества $S \subset E$ оператор f является оператором сжатия:

$$\| f(x) - f(y) \| \leqslant \| x - y \| \ (x, y \in E).$$

Элемент $y \in E$ называется (по Биркгофу) ортогональным к элементу $x \neq 0$, если

$$\| y - \lambda x \| \geqslant \| y \| \ (-\infty < \lambda < \infty).$$

Эта ортогональность называется симметричной, если из $y \perp x$ вытекает $x \perp y$.

Теорема 5.2. Пусть размерность пространства E не менее трех (соответственно равна двум). Тогда пространство E является пространством со скалярным произведением (соответственно строго выпуклым с симметричной ортогональностью) в том и только том случае, если оно обладает свойством P. Я. Б. Рутицкий

4842. О принципе максимума Фань Цюя. Маркус, Мойлс (On the maximum principle of Ky Fan. Marcus M., Moyls B. N.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 2, 313—320 (англ.)

Пусть x_i ($i = 1, \ldots, r$), $1 \leqslant r \leqslant n$ — векторы n-мерного унитарного комплексного пространства V_n и $x_\omega = x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}$ — внешнее грассмановское произведение, являющееся вектором пространства V_m размерности $m = \binom{n}{r}$. Если A — линейный оператор в V_n, то $C_r(A)$ означает оператор в V_m, определяемый формулой $C_r(A) x_1 \wedge \ldots \wedge x_r = Ax_1 \wedge \ldots \wedge Ax_r$. Пусть $E_r(a_1, \ldots, a_n)$ означает элементарную симметрическую форму r-й степени.

Основной результат (теорема 3): Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — произвольные комплексные матрицы n-го порядка, $\alpha_{\sigma i}$ — собственные значения матрицы $A_\sigma^* A_\sigma$, причем $\alpha_{\sigma i} \geqslant \alpha_{\sigma, i+1}$ ($i = 1, \ldots, n-1$; $\sigma = 1, \ldots, m$). Пусть

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k;\ U_1, \ldots, U_m) = \left| \sum_{\omega} (C_r(U_1 A_1 \ldots U_m A_m) x_\omega, x_\omega) \right|,$$

где $1 \leqslant r \leqslant k \leqslant n$ и сумма берется по всем различным последовательностям $\omega = (i_1, \ldots, i_r)$ натуральных чисел $1, \ldots, k$ ($1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant k$). Тогда $\max \varphi = E_r\left(\prod_{\sigma=1}^{m} \alpha_{\sigma 1}, \ldots, \prod_{\sigma=1}^{m} \alpha_{\sigma k}\right)$, где max берется по всем системам из k ортонормальных векторов $x_1, \ldots, x_k$ и всем унитарным матрицам $U_1, \ldots, U_m$.

Эта теорема обобщает результат Фань Цюя (Fan K., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1951, 37, 760—766). Приводятся некоторые применения.

С. И. Зуховицкий

4843. О непрерывном вращении подпространств в банаховом пространстве. Далецкий Ю. Л., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 147—154

В банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ рассматривается проекционный оператор $P(t)$, являющийся непрерывной в смысле нормы операторов функцией параметра t ($a \leqslant t \leqslant b$) с ограниченной вариацией.

Пусть T — произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ точками $\alpha = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$, $\sigma(T) = \max(t_{k+1} - t_k)$ и пусть

$$U_T(\beta, \alpha) = P(t_n) P(t_{n-1}) \ldots P(t_2) P(t_1),$$

$$U_T(\alpha, \beta) = P(t_1) P(t_2) \ldots P(t_{n-1}) P(t_n).$$

Доказывается, что при $\sigma(T) \to 0$ существуют пределы в смысле нормы операторов

$$U(P, \alpha, \beta) = \lim_{\sigma(T)\to 0} U_T(\alpha, \beta), \quad U(P, \beta, \alpha) = \lim_{\sigma(T)\to 0} U_T(\beta, \alpha).$$

Устанавливается ряд свойств операторной функции $U(P, \tau, t)$.

Пусть $P_k(t)$ ($k = 1, \ldots, n$, $a \leqslant t \leqslant b$) — проекционные операторы, являющиеся непрерывными функциями t с ограниченной вариацией и, кроме того, удовлетворяющие условиям: $P_1(t) + \ldots + P_n(t) = I$, $P_j(t) P_k(t) = 0$ ($j \neq k$), где I — единичный оператор. Тогда оператор $U(\tau, t) = \sum_{k=1}^{n} U(P_k, \tau, t)$ обладает свойствами: $U(\tau, t) = U(\tau, s) U(s, t)$, $U(t, t) = I$,

$$P_k(\tau) U(\tau, t) = U(\tau, t) P_k(t)$$

$$(k = 1, \ldots, n, \ a \leqslant t, \tau \leqslant b).$$

Если операторы $P_k(t)$ непрерывно дифференцируемы в смысле нормы, то

$$\frac{dU(\tau, t)}{d\tau} = \sum_{k=1}^{n} P_k'(\tau) P_k(\tau) U(\tau, t).$$

Показано, как эти результаты применяются в теории возмущений. А. В. Штраус

4844. О субнормальных операторах. Уэрмер (Report on subnormal operators. Wermer J.), Publ. Nat. Acad. Sci. Nat. Res. Council, 1955, № 387, 1—3 (англ.)

Пусть A — ограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$, инвариантное относительно A. Сужение B оператора A на $\mathfrak{H}$ называется субнормальным оператором.

Теорема. Если спектр $\sigma(A)$ оператора A имеет плоскую лебегову меру нуль, то у любого сужения B оператора A на $\mathfrak{H}$ есть в $\mathfrak{H}$ нетривиальное инвариантное подпространство.

Субнормальные операторы обладают рядом свойств, общих для более широкого класса операторов, исследованного автором ранее (РЖМат, 1956, 3138). Пусть τ — ограниченный обратимый оператор в банаховом пространстве B, C — замкнутое инвариантное относительно τ подпространство, а T — сужение τ на C.

Теорема. Пусть в C существует единственный порождающий вектор x относительно T, т. е. линейная оболочка векторов $T^n x$ ($n \geqslant 0$) плотна в C. Тогда C гомоморфно пространству аналитических функций, определенных на части λ-плоскости, а T реализуется там в виде оператора умножения на λ. Ядро этого гомоморфизма есть

$$C^\infty = \{y \in C \mid \tau^{-n} y \in C, \ n = 1, 2, \ldots\}.$$

В случае, когда τ — нормальный оператор в гильбертовом пространстве, $\sigma(\tau)$ имеет плоскую меру нуль, а резольвентное множество $\rho(\tau)$ состоит из двух компонент, из которых $\mathfrak{D}$ — ограниченная, имеет место теорема: $C = C^\infty \oplus C^0$. C^∞ и C^0 инвариантны относительно T, причем на C^∞ оператор T нормален, а C^0 изоморфно гильбертову пространству $\mathfrak{F}$ аналитических функций на $\mathfrak{D}$, в котором T реализуется умножением на λ.

Указывается, что А. Н. Колмогоровым (Бюл. МГУ, Математика, 1941, 2) был изучен случай, когда τ — унитарный оператор, и даны необходимые и достаточные условия того, чтобы $C = C^0$.

И. С. Иохвидов

4845. К теории возмущения спектрального разложения. Шефке (Zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Schäfke Friedrich Wilhelm), Math. Ann., 1957, 133, № 3, 219—234 (нем.)

Изучается возмущение простого изолированного собственного значения самосопряженного (но не обязательно ограниченного) оператора $F = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$ в гильбертовом пространстве. Возмущающий оператор $G(\mu)$ аналитически зависит от возмущающего параметра μ: $G(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n G_n$, где G_n — линейные операторы с общей областью определения $\mathfrak{D}_{G_n} = \mathfrak{D}_F$. Предполагается, что имеют место оценки

$$\| G_n u \| \leqslant \gamma_n(\| u \|, \| Fu \|),$$

где $\gamma_n(\xi, \eta)$ — непрерывные при $0 \leqslant \xi < \infty$, $0 \leqslant \eta < \infty$, неубывающие по обоим переменным положительные однородные функции первой степени. Такого рода оценки были введены Шрёдером (РЖМат, 1954, 3005, там же см. подробные указания на другие оценки в работах Реллиха и С.-Надя), который, однако, ограничился изучением линейного относительно μ возмущения (см. также РЖМат, 1956, 6142).

В реферируемой работе методы автора, развитые им ранее для частных случаев (см., например, РЖМат, 1954, 4846), переносятся на общую теорию.

Работа состоит из четырех разделов, в первом из которых вводятся необходимые для дальнейшего предположения, а именно: λ_0 — изолированное простое собственное значение F, y_0 — соответствующее собственное решение, $\| y_0 \| = 1$. Интервал $\lambda_0 - d < \lambda < \lambda_0 + d$ свободен от точек спектра F. Обозначим $\delta = |\lambda_0| + d$, $\gamma_n(1, \delta) = \gamma_n$. Предполагается, что существует максимальное ρ ($0 < \rho < \infty$), для которого

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \gamma_n \leqslant d/2.$$

Во втором разделе «возмущенная» задача о собственных значениях: $Fy - \lambda y - G(\mu) y = 0$ (λ, μ — комплексные) решается в окрестности заданной пары собственных значений $(\lambda_0, 0)$: $Fy_0 - \lambda_0 y_0 = 0$.

Теорема 1. Существуют степенные ряды

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \ldots, \ y(\mu) = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \ldots,$$

сходящиеся, по меньшей мере, в круге $|\mu| < \rho$, и такие, что

$$y(\mu) \in \mathfrak{D}_F, \ y_n \in \mathfrak{D}_F \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$Fy(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n F y_n,$$

$$G(\mu)\,y(\mu)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^n\Big(\sum_{m+l=n}G_m y_l\Big)\ (|\mu|<\rho),$$

$$(y(\mu),\ y_0)=1,\ Fy(\mu)-\lambda(\mu)\,y(\mu)-G(\mu)\,y(\mu)=0,$$

$$|\lambda(\mu)-\lambda_0|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\mu|^n\gamma_n,\ \|y(\mu)-y_0\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\mu|^n\gamma_n\Big(d-2\sum_{n=1}^{\infty}|\mu|^n\gamma_n\Big)^{-1},$$

$$\lambda_1=-(G_1y_0,\ y_0).$$

Если (λ, μ) — любая пара собственных значений с $|\mu|<\rho$, $|\lambda-\lambda_0|<d/2$, а y — соответствующее собственное решение, то $\lambda=\lambda(\mu)$, а y с точностью до скалярного множителя совпадает с $y(\mu)$.

Третий раздел посвящен замечаниям к теореме 1 и сравнению оценок автора для круга сходимости $|\mu|<\rho$ с упомянутыми выше оценками Реллиха и С.-Надя, а также с оценками Шрёдера для случая линейного возмущения.

Этому случаю целиком посвящен четвертый раздел работы. Теперь в обозначениях G_1, $\gamma_1(\xi, \eta)$, γ_1, индекс «1» можно опустить. Вводятся обозначения:

$$\alpha=\|Gy_0\|,\ \beta=|(Gy_0,\ y_0)|,\ \sigma=(\alpha^2-\beta^2)^{1/2}.$$

Теорема 2. Степенные ряды теоремы 1 ($G_n=0$, $n=2, 3, \ldots$) $\lambda(\mu)=\lambda_0+\mu\lambda_1+\mu^2\lambda_2+\ldots$, $y(\mu)=y_0+\mu y_1+\mu^2y_2+\ldots$ наверное сходятся при $|\mu|<d(\gamma+2\sqrt{\gamma\sigma}+\beta)^{-1}$, а в случае эрмитова оператора G при $|\mu|<d(\gamma+2\sigma+\beta)^{-1}$.

При этом

$$|\lambda(\mu)-\lambda_0-\mu\lambda_1|\leqslant\psi(|\mu|),$$

$$\|y(\mu)-y_0\|\leqslant\psi(|\mu|)(|\mu|\gamma)^{-1},$$

а в случае эрмитова оператора G

$$\|y(\mu)-y_0\|\leqslant\psi(|\mu|)(|\mu|\sigma)^{-1},$$

где

$$\psi(|\mu|)=\frac{1}{2}\{[d-|\mu|(\beta+\gamma)]-$$

$$-\sqrt{[d-|\mu|(\beta+\gamma)]^2-4|\mu|^2\gamma\sigma}\}$$

или соответственно

$$\psi(|\mu|)=\frac{1}{2}\{[d-|\mu|(\beta+\gamma)]-$$

$$-\sqrt{[d-|\mu|(\beta+\gamma)]^2-4|\mu|^2\sigma^2}\}.$$

И. С. Иохвидов

4846. **О нормальных значениях аналитической операторфункции. Батлер** (On the normality of an analytic operator. Butler John), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 733—740 (англ.)

Пусть $T(z)$ — функция комплексного переменного z в круге $|z|<\gamma$, значения которой являются замкнутыми операторами в гильбертовом пространстве H. Предполагая, что: 1) все операторы $T(z)$ и $T^*(z)$ имеют общую область определения D, 2) функции $T(z)f$ и $T^*(z)f$ ($f\in D$) аналитичны в круге $|z|<\gamma$, 3) $T(0)$ — нормальный оператор, — автор доказывает следующую теорему:

Существует такая окрестность U точки $z=0$, что часть U, состоящая из точек, в которых оператор $T(z)$ нормален, представляет собой либо точку $z=0$, либо всю окрестность U, либо совокупность конечного числа аналитических кривых, проходящих через точку $z=0$.

В качестве приложения этой теоремы доказывается следующий результат об аналитических возмущениях нормального оператора.

Пусть функция $T(z)$ удовлетворяет указанным выше условиям 1), 2), 3), причем оператор $T(0)$ имеет вполне непрерывный обратный и существует стремящаяся к нулю последовательность $x_1, x_2, \ldots$ положительных чисел, для которой операторы $T(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ нормальны. Тогда существует такое множество аналитических функций $\{\mu_i(x)\}$ на некотором промежутке $0\leqslant x<\delta$, что спектр оператора $T(x)$ $(0\leqslant x<\delta)$ совпадает с множеством чисел $\{\mu_i(x)\}$. М. С. Бродский

4847. **Вырождение при переходе от дискретного спектра к непрерывному и переход из квантовой механики в классическую. Маслов В. П.**, Докл. АН СССР, 1957, 114, № 5, 957—960

Пусть $\{e_i^k\}$ — система $(k=1, 2, \ldots)$ ортонормированных базисов в некотором гильбертовом пространстве H; $\{n_k\}$ — некоторая зависящая от k последовательность целых чисел, $\lim n_k=\infty$.

Элементом пространства $M_{n_k}[e_i^k]$ называется класс эквивалентных последовательностей $\{x_k\}$, где

$$x_k=\sum_{i=-n_k}^{\infty}a_ie_{i+n_k}^k+\sum_{i=1}^{\infty}o_{ik}e_i^k\quad\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i^2<\infty\right),$$

а o_{ik} удовлетворяют условию

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}o_{ik}^2=0.$$

Скалярное произведение в $M_{n_k}[e_i^k]$ определяется как $\lim_{k\to\infty}(x_k, \tilde{x}_k)$, $x_k, \tilde{x}_k\in M_{n_k}[e_i^k]$. Устанавливаются некоторые общие свойства пространств $M_{n_k}[e_i^k]$.

Пусть $\{A_k\}$ — последовательность самосопряженных положительно определенных операторов с дискретным спектром, собственными функциями $\{x_i^k\}$ и собственными значениями $\{\lambda_i^k\}$, сходящаяся сильно к самосопряженному оператору A с непрерывным спектром.

Пусть λ — точка спектра оператора A; n_k определяет номер ближайшего сверху к λ собственного значения оператора A.

Рассматривается пространство $M_\lambda\{A_k\}=M_{n_k}[x_i^k]$. Устанавливается, что замыкание оператора $\{A_k\}$ в $M_\lambda\{A_k\}$ есть оператор умножения на число λ. При некоторых дополнительных условиях из последовательности $\{B_k\}$ операторов, действующих в H, выделяется подпоследовательность $\{B_m\}$, определенная в пространстве $M_\lambda\{A_m\}$ на всюду плотном множестве. Полученные результаты применяются к оператору Гамильтона

$$H_k=-\frac{h_k^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+u(x)\quad(u(x)\geqslant 0).$$

В одномерном случае (при $h_k\to 0$) получается следующая картина. В пространстве

$$M\{H_k\}=\int_0^{\infty}\oplus M_\lambda\{A_k\}\,d\lambda$$

определены операторы H, p и оператор умножения на x. Они коммутируют между собой и связаны соотношением $H=\frac{p^2}{2\mu}+u(x)$. Чтобы полностью определить систему, нужно, кроме энергии, задать еще одну переменную (x или p). М. С. Лившиц

4848. О некоторых задачах общей теории коммутативных нормированных колец. Шилов Г. Е., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 246—249

Формулируются задачи из теории нормированных колец, решенные до настоящего времени лишь частично.

1-я задача. Пусть $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — аналитическая функция, определенная в окрестности совместного спектра элементов $x_1, \ldots, x_n$ нормированного кольца R. Установить без дополнительных предположений, существует ли в R такой элемент f, что для любого максимального идеала $f(M) = f(x_1(M), \ldots, x_n(M))$.

2-я задача. Указывается конструкция, сопоставляющая кольцу с равномерной сходимостью систему антисимметричных колец. Ставится вопрос о возможности восстановления исходного кольца из этих антисимметричных колец.

3-я задача. Изучение однородных колец типа C функций на торе.

Примечание редакции. В связи с задачей 1 автор указал на ошибку в статье Аренса и Кальдерона (РЖМат, 1956, 8149; 1958, 493), однако в письме в редакцию журнала «Успехи матем. наук» (1957, 12, № 5, 270) он сообщает, что впоследствии он убедился в правильности построений этих авторов, так что 1-я задача решена ими полностью. М. И. Граев

4849. Гиперкомплексные системы с континуальным базисом. Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 147—152

Резюме доклада на Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям (январь 1956 г.)

Авторы обобщают понятие коммутативной гиперкомплексной системы на случай, когда базисом служит локально компактное метрическое пространство. Построенная ими гиперкомплексная система является коммутативным нормированным кольцом. С помощью некоторых условий симметрии выделяются нормальные гиперкомплексные системы, на которые переносятся основные факты гармонического анализа на локально компактной коммутативной группе. Рассмотрены примеры нормальных гиперкомплексных систем. Приведен список из 10 ранее опубликованных работ авторов доклада, в которых содержатся построения и результаты, изложенные в докладе.

З. С. Агранович

4850. Область значений показательной функции. Лумер (The range of the exponential function. Lumer G.), Publs Inst. mat. y estadist. Fac. ingr. y agrimens., 1957, 3, № 2, 53—55 (англ.)

Пусть K — ядро банаховой алгебры (нормированного кольца) B, т. е. связная, содержащая единицу компонента множества G обратимых элементов $x \in B$, R — область значений показательной функции $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$. В случае коммутативной алгебры $R = K$ (Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы. М., 1951). В случае некоммутативной алгебры $R \subset K$. Доказывается, что если B — алгебра ограниченных линейных операторов бесконечномерного гильбертова пространства H, то множество $K \setminus R$ имеет внутренние точки. Если гильбертово пространство H конечномерно, то $R = K$. В. Э. Лянце

4851. Коммутаторы в банаховых алгебрах. Лумер (Conmutadores en álgebras de Banach. Lumer G.), Publs Inst. mat. y estadist. Fac. ingr. y agrimens., 1957, 3, № 2, 57—63 (исп.; рез. англ.)

Пусть B — банахова алгебра над полем комплексных чисел (нормированное кольцо) с единицей. Доказывается, что если $U \subset B$ и элементы U перестановочны между собой, то существует коммутативная подалгебра B' с единицей, $U \subset B' \subset B$, такая, что спектр элемента $u \in U$ (как элемента B) совпадает со спектром u, рассматриваемого как элемент B'. Пусть $a, b \in B$, $c = ab - ba$. Пусть Γ — наименьшее выпуклое множество, содержащее спектр c. Доказывается: если ab перестановочно с c, то $0 \in \Gamma$, $r(c - e) \geqslant 1$, $\| c - e \| \geqslant 1$, где $r(\ )$ — спектральный радиус. Также $0 \in \Gamma$, если a^2 перестановочно с b и b^2 перестановочно с a. Кроме того, $0 \in \Gamma$, если a^2 перестановочно с b и обратимо. Наконец, $0 \in \Gamma$, если $a^2 = e$. Пусть $j^2 = j \neq 0$, $aj = ja$ и $jabj$ перестановочно с $jbaj$. Тогда $\| c - e \| \geqslant \| j \|^{-2}$. Если B содержит коммутативную инвариантную подалгебру B' с единицей, то $r(c - e) \geqslant 1$ для любых $a, b \in B$.

Пусть B — алгебра линейных ограниченных операторов гильбертова пространства. Если a — предел операторов, приводимых собственными подпространствами, а b — произвольный оператор, то $\| c - e \| \geqslant 1$. В. Э. Лянце

4852. Замечания о регулярных элементах в расширении банаховой алгебры без единицы. Становевич (Примедба о регуларним елементима у проширењу Banach-ове алгебре без јединичног елемента. Становјевић Часлав В.), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 3—4, 183—190 (сербо-хорв.; рез. англ.)

Элементы a и b нормированного коммутативного кольца называются взаимно дополнительными, если они удовлетворяют соотношению $a + b = ab$. Это определение равносильно равенству $(e - a)(e - b) = e$ в кольце с присоединенной единицей. Для $|a| < 1$ присоединенный элемент всегда существует и равен $-\sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Автор выводит различные более или менее очевидные формулы, связывающие дисольвенту данного элемента (т. е. дополнительный элемент к $\lambda^{-1}a$) и его резольвенту (обратный элемент к $\lambda e - a$).

Г. Е. Шилов

4853. Об одном нормированном кольце функций со свертыванием. Коренблюм Б. И., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 2, 226—229

Продолжение предыдущей работы автора (РЖМат, 1957, 7964). Дается полное описание замкнутых идеалов кольца $R = L_\alpha + \lambda e$ $(\alpha > 0)$, которые содержатся лишь в максимальном идеале M_∞ и в конечном числе максимальных идеалов, отвечающих внутренним точкам полосы $|\operatorname{Im} s| \leqslant \alpha$. Каждый такой идеал есть пересечение примарных идеалов. Примарные идеалы, содержащиеся в M_∞, были описаны в предыдущей работе. Примарный идеал, соответствующий внутренней точке s_0, состоит из всех функций кольца R, которые при $s = s_0$ обращаются в нуль вместе с некоторым фиксированным числом производных.

Г. Е. Шилов

4854. К приближенному решению операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Альтман (On the approximate solutions of operator equations in Hilbert space. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 6, 605—609 (англ.; рез. русск.)

Метод, предложенный в предыдущих работах автора (РЖМат, 1958, 3084, 3085), применяется к приближенному решению нелинейных и линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве H. Пусть $P(x)$ — нелинейный оператор, действующий из шара $S(\| x - x_0 \| \leqslant r) \subset H$ в H и дифференцируемый по Фреше в S. Предполагается, что производная Фреше $P'(x)$ удовлетворяет условию: $\| P'(x)\, y \| \geqslant B^{-1} \| y \|$ для всех $x \in S$ и любого $y \in H$, где $B > 0$. Пусть далее оператор $Q(x) = (P'(x))^* P(x)$ имеет производную Фреше $Q'(x)$, причем $\| Q'(x) \| \leqslant K = \text{const}$ для всех

$x \in S$. Рассматривается итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \| P(x_n) \|^2 \| Q(x_n) \|^{-2} Q(x_n), \quad (1)$$

$$n = 0, 1, \ldots$$

Теорема 1. Если

$$B^2 K < 4, \quad \frac{1}{2} \| P(x_0) \|^2 \| Q(x_0) \|^{-1} < \eta,$$

$$r = 2\eta (2 - B\sqrt{K})^{-1},$$

то уравнение $P(x) = 0$ имеет решение $x^* \in S$, последовательность (1) сходится к x^*, причем

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \eta \alpha^n (1 - \alpha)^{-1}, \text{ где } \alpha = \frac{1}{2} B\sqrt{K}.$$

Теорема 2. Пусть для $x \in S$ выполняются условия: $\| P(x) \| \leqslant D$, $\| P'(x) \| \leqslant A$, $\| P''(x) \| \leqslant R$, где $B^2(A^2 + RD) < 4$. Пусть далее

$$\frac{1}{2} \| P(x_0) \|^2 \| Q(x_0) \|^{-1} < \eta,$$

$$r = 2\eta (2 - B\sqrt{A^2 + RD})^{-1} < \eta.$$

Тогда имеет место утверждение предыдущей теоремы при $\alpha = \frac{1}{2} B\sqrt{A^2 + RD}$.

Процесс (1) также применяется к нахождению приближенного решения линейного уравнения $Tx = y$ и дается оценка погрешности. М. М. Вайнберг

4855. **О порядке приближения тождественного оператора при помощи полугрупп линейных операторов с приложениями к теории сингулярных интегралов.** Бутцер (Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. Butzer P. L.), Math. Ann., 1957, 133, № 5, 410—425 (нем.)

Рассматривается полугруппа линейных операторов $T(\xi)$ ($\xi \geqslant 0$), заданных в пространстве E типа B со значениями в E, причем

$$\lim_{\xi \to 0} T(\xi) x = x.$$

Через $\mathfrak{D}(A)$ обозначается совокупность $x \in E$, для которых существует

$$T'(0) x = \lim_{\xi \to 0} \frac{T(\xi) x - x}{\xi}.$$

Теорема. Если $x \in \mathfrak{D}(A)$, то $\| T(\xi) x - x \| = O(\xi)$. Если E сепарабельно, то верно и обратное утверждение.

Эта теорема применяется для оценки приближения функции при помощи некоторых сингулярных интегралов.

Например, если $x(t) \in L_p([-\pi, \pi])$ ($p > 1$), а $\sigma(r, t)$ — интеграл Абеля—Пуассона этой функции, то соотношение

$$\| \sigma(r, t) - x(t) \|_p = O(|\ln r|)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы у сопряженной функции

$$\tilde{x}(t) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^\pi [x(t+u) - x(t-u)] \operatorname{ctg} \frac{u}{2} \, du$$

почти везде существовала производная $\tilde{x}'(t)$, входящая в L_p.

Примечание референта. Доказательство леммы 1 (стр. 415) опирается на неверное предложение: если точки x_n ($n = 1, 2, \ldots$) пространства типа B лежат вне некоторой сферы с центром x^*, то существует линейный функционал $f(x)$, удовлетворяющий соотношениям $f(x_n) = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), $f(x^*) = 1$. Поэтому результаты необоснованы. И. П. Натансон

4856. **Интеграл для распределений.** Беркилл (An integral for distributions. Burkill J. C.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 4, 821—824 (англ.)

Указывается, что интеграл Хана—Хеллингера $\int_0^1 f \frac{d^n g}{dx^{n-1}}$ может быть использован для построения теории распределений Шварца (—Соболева. *Реф.*). Как приложение доказывается теорема Шварца о разложении периодических распределений в ряд Фурье. Г. Е. Шилов

4857. **Об умножении причинных функций в квантовой теории поля.** Боголюбов, Парасюк (Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder. Bogoliubow N. N., Parasiuk O. S.), Acta math., 1957, 97, № 3—4, 227—266 (нем.)

Причинными функциями называются выражения вида

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} P(k) \lim_{\varepsilon \to 0} (m^2 - k^2 - i\varepsilon)^{-1} \, dk,$$

где $x(x^0, x^1, x^2, x^3)$ и $k(k^0, k^1, k^2, k^3)$ — 4-векторы, $P(k)$ — полином (Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., Гостехиздат, 1957). В § 1 реферируемой статьи даётся строгое определение причинных функций, основанное на теории обобщенных функций С. Л. Соболева и Л. Шварца. В качестве пространств основных функций взяты классы $C(q, r, n)$ q раз непрерывно дифференцируемых функций $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых все произведения

$$x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_s}^{\alpha_s} \frac{\partial^p F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{j_1}^{\beta_1} \partial x_{j_2}^{\beta_2} \ldots \partial x_{j_p}^{\beta_p}}$$

($s = 0, 1, \ldots, r$; $p = 0, 1, \ldots, q$; $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) ограничены. Обобщенные функции понимаются как линейные функционалы в $C(q, r, n)$. С этой точки зрения выясняется смысл построенной Паули и Вилларсом последовательности регулярных функций $\operatorname{reg} \Delta_M^c(x)$, стремящихся при $M \to \infty$ слабо к $\Delta^c(x)$.

В квантовой теории поля при построении матрицы рассеяния с помощью метода малых возмущений приходится находить произведение причинных функций. Для устранения возникающих при этом расходимостей Швингер, Фейнман, Дайсон и Салам разработали вычитательную технику. В их работах, однако, отсутствует строгое определение вычитательной операции и нет доказательства того, что эта операция всегда приводит к конечным результатам. Основная цель реферируемой статьи заключается в том, чтобы выработать математически ясное определение операции умножения причинных функций, которое было бы плодотворным в указанных выше вопросах квантовой теории поля. В § 2 рассматривается фигура (диаграмма), образованная точками $x_1, x_2, \ldots, x_n$ четырехмерного пространства, которые соединены направленными линиями. Каждой линии l, соединяющей вершину x_r с вершиной x_s, поставлена в соответствие причинная функция $\Delta_l^c(x_r - x_s)$ и формально образовано произведение

$$\prod \Delta_l^c(x_r - x_s) \quad (l = 1, 2, \ldots, L).$$

Пусть $D(q, r, n)$ обозначает класс всех функций $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C(q, r, n)$, обращающихся в нуль при совпадении любых двух аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказывается, что последовательность

$$\int\int \ldots \int \prod_l \operatorname{reg} \Delta_l^c (x_r - x_s) \times$$

$$\times F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

стремится к определенному пределу при $M \to \infty$, какова бы ни была функция $F \in D(q, r, n)$ (q, r — достаточно большие числа).

В §§ 3, 4 решается основная проблема о продолжении полученного функционала на все пространство $C(q, r, n)$. Это продолжение осуществляется с помощью введенной в § 3 R-операции. В работе имеется дополнение, в котором выясняется физический смысл рассматриваемой теории. Устанавливается, что S-матрица, построенная на основе вычитательной R-операции, удовлетворяет условиям унитарности, лоренцовой инвариантности и причинности. Более того, способ построения и вид R-операции, введенной в § 3, может быть получен из этих общих физических требований и принципа соответствия классической теории без использования уравнения Шрёдингера.

Вопросы сходимости ряда последовательных приближений при определении S-матрицы в работе не рассматриваются. М. С. Лившиц

См. также: 4548, 4637, 4642, 4667, 4724, 4768, 4815, 4823, 4824, 4885

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

4858. **О новой аксиоматике теории вероятностей. Реньи** (A valószínüségszámítás új axiomatikus felépítése. Rényi Alfréd), Magyar tud. akad. mat. es. fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 3, 369—427; hozzászlás 427—428 (венг.)

Первая публикация новой аксиоматической теории автора. Так как тем временем вышел английский перевод статьи (реф. 4859), то референт будет рассматривать только основной замысел теории и различие между двумя статьями.

В практическом применении теории вероятностей возникало много задач, которые не могли быть решены в рамках теории Колмогорова. Главная трудность в этих задачах была та, что в теории Колмогорова нормируется мера вероятности; это делает невозможным, например, определение равномерного распределения во всем пространстве, которое играет важную роль в статистической механике. Автор обобщает теорию Колмогорова, рассматривая условные вероятности как фундаментальные понятия.

Вводится понятие пространства условной вероятности, состоящее из σ-алгебры множеств $\mathfrak{A}(A, B, \ldots)$ (Halmos P., Measure theory, New-York, van Nostrand, 1951, p. 28), класса множеств $\mathfrak{B}$ и неотрицательной функции множества двух переменных $P(A, B)$, $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Для каждого $B \in \mathfrak{B}$ имеем $P(B \mid B) = 1$ и $P(A \mid B)$ является обычной мерой, соответствующей первой переменной. Если $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$, $C \in \mathfrak{B}$ и $BC \in \mathfrak{B}$, имеем $P(A \mid BC)\, P(B \mid C) = P(AB \mid C)$.

Если $\mathfrak{B}$ состоит из единственного множества S, которое представляется как подмножества элементов $\mathfrak{A}$, тогда получаем хорошо известное пространство вероятностей Колмогорова (Kolmogoroff A. N., Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, Springer, 1933). Случайные величины являются измеримыми (точечными) функциями относительно $\mathfrak{A}$. Условные распределения, ожидания и другие понятия определяются обычным образом. Большая часть статьи посвящается исследованию условных законов больших чисел и условных предельных теорем; последние теоремы не содержатся в английском переводе. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называется $\mathfrak{B}$-независимой, если они являются независимыми для любого фиксированного $B \in \mathfrak{B}$. Обычные центральные предельные теоремы обобщаются на случай, когда случайные величины являются $\mathfrak{B}$-независимыми. Другая интересная теорема доказывается для совершенных пространств условных вероятностей, т. е. для случая, когда $P(A \mid B)$ есть совершенная мера (см. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., Гостехиздат, 1949) для любого $B \in \mathfrak{B}$. Если для фиксированного $C \in \mathfrak{B}$ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются независимыми случайными величинами с конечными дисперсиями, и нормированные величины их частных сумм стремятся к нормальному распределению, тогда то же самое выполняется для любого $B \in \mathfrak{B}$. В других теоремах независимость заменяется почти независимостью. Рассматривается пример, взятый из теории восстановления, и доказывается теорема, упомянутая также без доказательства в английском переводе. Как приложение статья содержит некоторые результаты Часара, касающиеся представления функции условной вероятности $P(A \mid B)$ в виде отношений. A. Prékopa

4859. **О новой аксиоматике теории вероятностей. Реньи** (On a new axiomatic theory of probability. Rényi Alfréd), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 3—4, 285—335 (англ.; рез. русск.)

Английский перевод (реф. 4858).

4860. **Комбинаторная лемма и ее применение в теории вероятностей. Спицер** (A combinatorial lemma and its application to probability theory. Spitzer Frank), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 323—339 (англ.)

Рассматривается симметричная группа подстановок σ порядка n и ее разложение на независимые циклы $\alpha_i(\sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, n(\sigma)$, $\sigma = (\alpha_1(\sigma))(\alpha_2(\sigma)) \ldots (\alpha_{n(\sigma)}(\sigma))$. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор пространства E_n, $\sigma x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \end{pmatrix} x = (x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n})$ — преобразование E_n на себя, $S(\sigma x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{k} x_{\sigma_i} \right)^+$, $T(\sigma x) = \sum_{i=1}^{n(\sigma)} \left(\sum_{k \in \alpha_i(\sigma)} x_k \right)^+$, где для любого вещественного числа a полагается $a^+ = \max(0, a)$.

Фундаментальный комбинаторный результат статьи состоит в утверждении, что для произвольного фиксированного вектора $x \in E_n$ множества значений $S(\sigma x)$ и $T(\sigma x)$, где σ пробегает все $n!$ постановок симметричной группы подстановок порядка n, являются идентичными (теорема 2.2). Из этого результата следует, что, если $f(x)$ — комплексно-значная функция, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — симметрично-зависимый n-мерный слу-

чайный вектор (РЖМат, 1955, 2317), то

$$Ef[\max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_1+x_2+\ldots+x_k)^+]=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma}Ef[S(\sigma x)]=$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma}Ef[T(\sigma x)].$$

Положив в этом равенстве $f(x)=\exp(i\lambda x)$, $\mathrm{Im}(\lambda)\geqslant 0$, автор получает для одинаково распределенных независимых случайных величин следующее равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(\lambda)t^n=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(\lambda)}{n}t^n\right],\ |t|<1, \qquad (1)$$

которое устанавливает связь между характеристическими функциями $\Phi_n(\lambda)$ величин $\max[0, S_1, S_2, \ldots, S_n]$ и характеристическими функциями $\psi_n(\lambda)$ величин $\max[0, S_n]$, где $S_k=x_1+x_2+\ldots+x_k$, $k=1, 2, \ldots, n$ (теорема 3.1), и является обобщением известных результатов Е. С. Андерсена (РЖМат, 1956, 8965, 8966).

В дальнейшем (§§ 6, 7) из (1) выводятся равенства, устанавливающие связь между характеристическими функциями величин S_n и $\max[0, S_1, S_2, \ldots, S_n]$, что позволяет вскрыть предельное поведение случайных величин $\max[0, S_1, S_2, \ldots, S_n]$ и N_n — числа положительных S_k, $k=1, 2, \ldots, n$.

А. А. Бобров, Д. З. Аров

4861. Об одном тождестве для суммы мультиномиальных коэффициентов. Гао, Сеттерберг (An identity for the sum of multinomial coefficients. Kao R. C., Zetterberg L. H.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 2, 96—100 (англ.)

Дается два доказательства тождества: для натуральных чисел r и n, $r>n$,

$$\sum_{\sigma_{nr}\in\Sigma_{nr}}\frac{r!}{\prod_{i=1}^{n}k_i!}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^r,$$

где суммирование в левой части распространено на множество Σ_{nr} собственных представлений σ_{nr} числа r в виде суммы $\sum_{i=1}^{n}k_i$, $k_i\geqslant 1$. Н. В. Смирнов

4862. Замечание о форме неравенства Чебышева для двух или более переменных. Лал (A note on a form of Tchebycheff's inequality for two or more variables. Lal D. N.), Санкия, Indian J. Statist., 1955, 15, № 3, 317—320 (англ.)

Полученные результаты являются обобщениями неравенства Чебышева для двух и более величин. Полученный нижний предел вероятности является наилучшим в том смысле, что нельзя сказать, что вероятность отклонений будет больше определенной величины, если неизвестны моменты порядков выше второго. Резюме автора

4863. Об асимптотическом поведении сопровождающих законов. Студнев Ю. П., Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-т. Сер. физ.-матем. и хим., 1957, № 1, 6

4864. Обобщенная теорема С. Н. Бернштейна о нормальной корреляции. Сарманов И. О., Тр. Ленингр. лесотехн. акад., 1957, вып. 78, 49—50

4865. Обобщенное условие Ляпунова. Сарманов И. О., Тр. Ленингр. лесотехн. акад., 1957, вып. 78, 47—48

4866. Адэкватность и состоятельность: второй ответ д-ру Бар-Хиллелю. Поппер (Adequacy and consistency: a second reply to Dr Bar-Hillel. Popper K. R.), Brit. J. Philos. Sci., 1956, 7, № 27, 249—256 (англ.)

4867. Невозвратное случайное блуждание. Чжун, Дерман (Noh-recurrent random walks. Chung K. L., Derman C.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 3, 441—447 (англ.)

Рассматривается случайное блуждание по целочисленным точкам прямой с дискретным временем, причем величины скачков $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы, одинаково распределены и $M|X_k|<\infty$. Пусть наибольший общий делитель тех x, для которых $P(X_k=x)>0$, есть 1. Положение системы после n-го скачка есть $S_n=\sum_1^n X_k$. Задача состоит в отыскании класса тех множеств, в которых система побывает бесконечно много раз с вероятностью 1.

Чжун и Фукс доказали (Chung K. L., Fuchs W. H. J., Mem. Amer. Math. Soc., 1951), что если $MX_k=0$, то любая система побывает бесконечно много раз в каждом состоянии, и наоборот, если $MX_k\neq 0$, то ни одно конечное множество не обладает этим свойством. Доказывается, что в случае $MX_k>0$ таким свойством обладает любое множество A, содержащее бесконечно много положительных целых чисел. Если $MX_k=+\infty$, то существует множество, содержащее бесконечно много положительных целых чисел, в котором система побывает только конечное число раз с вероятностью 1. Аналогичное утверждение доказывается для случая, когда скачки X_k имеют непрерывное распределение, множество A есть множество, измеримое по Лебегу, такое, что его пересечение с положительной полуосью имеет бесконечную лебеговскую меру. В этом случае утверждение доказывается в предположении некоторой регулярности распределения X. Например, утверждение верно, если распределение X имеет плотность $f(x)$ со свойствами: $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$, $f(x)\in L_{1+\delta}$ при некотором $\delta>0$ и $f(x)=0$ при $x<0$. В. А. Волконский

4868. Асимптотические разложения для распределения максимальных уклонений в схеме Бернулли. Королюк В. С., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 183—186

Для последовательности серий случайных величин ξ_{nk} ($k=1, 2, \ldots, n$; $n=1, 2, \ldots$), одинаково распределенных в каждой серии, принимающих два значения и удовлетворяющих условиям $M\xi_{nk}=0$, $D\xi_{nk}=1/n$, находится член порядка $1/\sqrt{n}$ в асимптотическом выражении для вероятности событий:

$$\max_{0\leqslant k\leqslant n}\sqrt{n}S_n<z,\quad \max_{0\leqslant k\leqslant n}\sqrt{n}|S_{nk}|<z,$$

где $S_{nk}=\sum_{r=1}^{k}\xi_{nr}$.

В частности, автор утверждает, что во втором случае этот член асимптотического разложения равен 0. Аналогичные результаты приведены для величины $\sqrt{\lambda}(t-\lambda^{-1}\zeta_\lambda(t))$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, где $\zeta_\lambda(t)$ — процесс Пуассона с параметром λ (опечатка: в работе нормирующие множители $\sqrt{n}$ и $\sqrt{\lambda}$ в соответствующих случаях опущены).

Доказательства отсутствуют. Имеются ссылки на существенное использование результатов работы автора (Изв. АН СССР, 1955, 19, 103—104), которая, по-видимому, является ошибочной (Чжан Ли Цянь, Acta Math. Sinica, 1956, 6, № 1, 55—81). И. И. Гихман

4869. Об удлиняющихся сериях успехов в схеме Бернулли. Маневич Д. В., Докл. АН УзССР, 1957, № 5, 5—8 (рез. узб.)

Автор находит условия, которым должна удовлетворять последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, чтобы число серий $S_k^{(n_k)}$ в k испытаниях схемы Бернулли, имеющих длину n_k, распределялось асимпто-

тически нормально при $k \to \infty$; это условие сводится к выполнению неравенств $n_k \leqslant \mu |\lg \alpha|^{-1} \lg k$, где α — вероятность успеха в отдельном испытании, а $\mu < 1/3$; условие, очевидно, выполняется при $n_k = \text{const}$.

Н. В. Смирнов

4870. Статистика Больцмана и нормальный закон распределения. Горак (Boltzmannova statistika a normální zákon četnosti. Horák Zdeněk), Mat.-fys. casop., 1957, 7, № 1, 67—73 (чешск.)

Задача статьи — показать, как можно принципы классической физической статистики Больцмана применить и для обычной статистической совокупности, например для совокупности ошибок измерений. При последовательном применении этих принципов можно в результате прийти к заключению, что нормальный закон Лапласа—Гаусса определяет наиболее вероятное распределение в совокупности при одном лишь предположении, что средняя квадратическая ошибка для всех произвольно выбранных частей совокупности будет одинаковой. По разюме автора

4871. Предельные распределения мультиномиального распределения. Фиш (Die Grenzverteilungen der Multinomialverteilung. Fisz Marek), Ber. Tagung. Wahrscheinlichkeitsrechnung und math. Statistik, Berlin, 1954. Berlin, 1956, 51—53 (нем.)

Со ссылкой на предыдущие работы автора приводится обзор доказательства теоремы:

Пусть вектор $(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nr})$ имеет мультиномиальное распределение

$$p_n(x_{n1} = k_1, \quad x_{n2} = k_2, \quad \ldots, \quad x_{nr} = k_r) =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}\, p_{n1}^{k_1} p_{n2}^{k_2} \cdots p_{nr}^{k_r},$$

$$\sum_{m=1}^{r} k_m = n \quad (k_m \geqslant 0, \text{ целые}),$$

$$\sum_{m=1}^{n} p_{nm} = 1 \quad (0 < p_{nm} < 1).$$

Тогда, если вектор $(A_{n1}x_{n1} + B_{n1}, \ A_{n2}x_{n2} + B_{n2}, \ \ldots, \ A_{nr}x_{nr} + B_{nr})$ имеет при $n \to \infty$ предельное невырожденное $(r-1)$-мерное распределение, то оно непременно должно быть вида (ξ, η), где ξ — j-мерная $(0 \leqslant j \leqslant r-1)$ нормальная случайная величина, а η — независимая от нее $(r-1-j)$-мерная случайная величина, распределенная по закону Пуассона. С. С. Кислицын

4872. О характеризации гамма-распределения. Сил (On a characterization of gamma distributions. Seal K. C.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, 7, № 26, 60—72 (англ.)

В работе рассматриваются некоторые свойства гамма-распределения и доказывается ряд теорем, это распределение характеризующих. Примером могут служить следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ $(k > 2)$ — взаимно независимые положительные случайные величины с конечными вторыми моментами и $\sum_1^k X_i$ стохастически независима от $\sum_1^k a_{ki} X_i \Big/ \sum_1^k X_i$, тогда все случайные величины имеют гамма-распределение с одними и теми же параметрами, если только $(a_{k1}, \ldots, a_{kk}) \neq (\lambda, \ldots, \lambda)$.

Теорема 4. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — взаимно независимые случайные величины, а $\sum_1^k X_i$ и $\sum_1^k a_{ki} X_i \Big/ \sum_1^k X_i$ стохастически независимы при $k = 2, 3 \ldots, n$, то все X_i имеют гамма-распределение с одними и теми же параметрами.

Кроме того, в работе показывается, что случайная величина, имеющая гамма-распределение, может быть представлена в виде суммы двух независимых положительных безгранично делимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии и распределения, отличные от гамма-распределения. Все результаты получены для случайных величин, имеющих распределения, отличные от несобственного. В. П. Скитович

4873. Замечание о вероятностных распределениях класса L. Ибрагимов И. А., Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 1, 121—124 (рез. англ.)

Доказывается существование среди распределений класса L неодновершинных распределений. Определяя законы распределения $F_\lambda(x)$ с помощью функций $M(u) \equiv 0$, $N(u) = \lambda \ln u$ для $u \leqslant 1$ и $N(u) = 0$ для $u > 1$, $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 3/2$, входящих в формулу Леви для представления логарифма характеристической функции распределения класса L (Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, 1949, М.—Л., 158—161), автор показывает, что допущение об одновершинности всех этих распределений ведет к противоречию. А. А. Бобров

4874. Временные средние и функции распределения. Патман (Temporal means and distribution functions. Putnam C. R.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, 3, № 3, 137—141 (англ.)

Пусть $u(t)$ $(0 < t < \infty)$ — измеримая функция, тогда временные средние $M_T(u)$ и $M(u)$ на интервалах $(0, T)$ и $(0, \infty)$ равны

$$M_T(u) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, dt, \tag{1}$$

$$M(u) = \lim_{T\to\infty} M_T(u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, dt.$$

Обозначим через $E_T(\lambda)$ множество значений t, для которых $0 \leqslant t \leqslant T$ и $u(t) \leqslant \lambda$, и пусть $\sigma_T(\lambda) = T^{-1} \operatorname{mes} E_T(\lambda)$. Тогда легко видеть, что $\sigma_T(\lambda)$ как функция λ есть функция распределения и $M_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\sigma_T(\lambda)$,

$$M_T(f(u)) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u(t))\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\sigma_T(\lambda). \tag{2}$$

В работе изучается задача, когда $\sigma_T(\lambda)$ слабо сходится к некоторой функции распределения $\sigma(\lambda)$ и

$$\sigma_T(\lambda) \to \sigma(\lambda) \tag{3}$$

$$\lim_{T\to\infty} M_T(f(u)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\sigma(\lambda), \tag{4}$$

в частности

$$M(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\sigma(\lambda).$$

Как известно, если $|u(t)| < C$, то из существования $\sigma(\lambda)$ следует выполнение (4), причем для существования $\sigma(\lambda)$ необходимо и достаточно существование

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u^k(t)\, dt < \infty \quad \text{при любом } k.$$

Приводятся примеры, показывающие, что из (1) еще не следует (3). Если же и $u(t)$ будет неограничено, то, как показывается на примерах, может быть определено $M(u)$ и $\sigma(\lambda)$ и в то же время представление (2) не имеет места.

Для почти периодических функций (по Бору) и для

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\lambda t)\,d\rho(\lambda);\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|d\rho(\lambda)|<\infty,$$

$\sigma(\lambda)$ существует. М. С. Пинскер

4875. **Замечание об одной теореме Колмогорова. Станоевич** (Note sur un théorème de M. Kolmogorov. Stanojevic Caslav), Ann. Univ. Lyon, 1955, A, № 18, 21—26 (франц.)

Дается развернутое изложение результатов, опубликованных ранее (РЖМат, 1955, 5171). А. А. Бобров

4876. **Характеристическая функция величины $|X|$ и условные законы. Жиро** (Fonction caractéristique de $|X|$ et de lois conditionnelles. Girault Maurice), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 4, 445—446 (франц.)

При помощи теории обобщенных распределений автора (РЖМат, 1955, 2775) выводится выражение характеристической функции величины $|X|$ через вещественную часть характеристической функции величины X и выражение характеристической функции условного распределения Y при данном $X=x$ — через характеристическую функцию двумерной величины (X, Y). Автор не указывает, что те же результаты без труда получаются, если оставаться в рамках классических распределений вероятностей и их характеристических функций. Н. А. Сапогов

4877. **Предельные теоремы в случае переходных вероятностей, стремящихся к нулю. Глава III. Кангиссер** (Grenzwertsätze für verschwindende Übergangswahrscheinlichkeiten. III. Kapitel. Kanngiesser W.), Mitteilungsbl. math. Statist., 1956, 8, № 3, 177—191 (нем.)

Начало см. РЖМат, 1957, 4998.

Рассмотрения, соответствующие методу Колмогорова — Деблина, приводят к выражениям для производящих функций $w_m(x, \mathfrak{B})$ и $\hat{w}_m(x, \mathfrak{B}^*)$ (РЖМат, 1957, 5767), являющихся в рассматриваемом случае композицией производящих функций геометрических распределений. С помощью производящих функций и теоремы единственности находятся предельные распределения для указанных выше распределений при двух вариантах стремления к нулю переходных вероятностей. В первом варианте предельным распределением оказывается распределение Пуассона, во втором варианте нет явного выражения для предельного распределения. Указывается связь между распределениями $w_n(x)$ и $w_m(x, \mathfrak{B}^*)$. В заключение приводятся численные примеры. Б. С. Флейшман

4878. **О распределении первой положительной суммы для последовательности независимых случайных величин. Синай Я. Г.**, Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 1, 126—135 (рез. англ.)

Рассматривается следующая проблема. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией

$$\varphi(t)-Me^{i\xi t}=e^{-c|t|^{\alpha}}\left(1+i\beta\frac{1}{|t|}\omega(t,\alpha)\right),$$

где $c>0$, $0<\alpha<2$, $-1<\beta<1$ и

$$\omega(t,\alpha)=\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha, & \alpha\neq 1\\ \ln|t|, & \alpha=1.\end{cases}$$

Пусть $S_n=x_1+\ldots+x_n$ и ν есть первый индекс, для которого $S_n>0$.

Доказывается, что функция распределения случайной переменной S_ν принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметрами $\alpha'=\alpha(1-F(0))$, $\beta=-1$, где $F(0)=P\{x_i<0\}$. Резюме автора

4879. **О переходной вероятности процесса восстановления. Хида** (On the transition probability of a renewal process. Hida Takeyuki), Nagoya Math. J., 1957, 11, 41—51 (англ.)

Пусть $X_0, X_2, X_3, \ldots$ — последовательность взаимно независимых неотрицательных случайных величин с одинаковой плотностью и конечной дисперсией, $n(t)$ — число сумм $X_1, X_1+X_2, \ldots$, меньших, чем t. При некотором специальном выборе случайной величины X_1 процесс

$$x(t)=\begin{cases}t-(X_1+\ldots+X_{n(t)}) & \text{при } n(t)>0\\ t+X_0 & \text{при } n(t)=0\end{cases}$$

есть стационарный марковский процесс (Doob J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 63, 422—438). Автор получает два уравнения в частных производных, которым удовлетворяет переходная вероятность процесса $x(t)$. Полученные уравнения полностью определяют переходную вероятность этого процесса. В. В. Петров

4880. **Замечание об аддитивных процессах. Атанабэ**, Сугаку, 1957, 8, № 4, 215—216 (японск.)

4881. **Случайные процессы, реализации которых являются обобщенными функциями. Урбаник К.**, Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 1, 146—149 (рез. англ.)

Методом, аналогичным методу конструирования обобщенных случайных функций по Микусинскому, в настоящей заметке конструируются обобщенные случайные процессы. Определяются и изучаются обобщенные случайные процессы с независимыми значениями, с независимыми приращениями, стационарные в широком смысле. Выписываются формулы спектрального представления стационарных процессов. Рассматриваемая теория не тождественна рассмотренным ранее теориям обобщенных процессов (Гельфанд И. М. (РЖМат, 1957, 8795), Ito K. (Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, A28, № 3, 209—223)), ибо здесь используются другие понятия сходимости. М. С. Пинскер

4882. **Новый метод в теории рекуррентных стохастических процессов. Такач** (Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál. Takács Lajos), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 135—151 (венг.; рез. русск. англ.)

Рассматриваются рекуррентные стохастические процессы следующих типов:

I. В интервале $0\leqslant t<\infty$ происходят события в точках $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$. Предполагается, что разности t_n-t_{n-1} $(n=1, 2, \ldots; t_0\equiv 0)$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины, функция распределения которых $F(x)$.

II. В некотором стохастическом процессе изменяются состояния A и B $(0\leqslant t<\infty)$. Предполагается, что в точке времени $t=0$ стохастический процесс находится в состоянии A, далее, что периоды пребывания в состояниях A и B — независимые случайные величины с функцией распределения $G(x)=1-e^{-p\alpha}$ $(x\geqslant 0, p>0)$ и $H(x)$ соответственно. В этом случае переходы $A\to B$ будем рассматривать, как рекуррентное событие. Промежуток между последующими точками времени переходов $A\to B$ является случайной величиной с функцией распределения

$$F(x)=\int_0^x G(x-y)\,dH(y).$$

Если функция $F(x)$ известна, то вопросы, связанные с упомянутыми процессами, обычно сводятся к действиям, которые осуществляются над функцией распределения $F(x)$. Наибольший интерес представляет собой тот случай, когда функция $F(x)$ неизвестна, но каким-либо образом можно определить функцию среднего значения $m(t)$, т. е. ожидаемое число повторений рекуррентного события в интервале $(0, t)$. В большинстве случаев это легко провести. С помощью этой функции можно определить функцию $F(x)$.

J. Mogyoródi

4883. **Использование комплексных вероятностей в теории стохастических процессов. Кокс** (A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes. Cox D. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 2, 313—319 (англ.)

Известно, что показательное распределение играет важную роль в теории стохастических процессов с дискретным множеством состояний и непрерывным временем. Эрланг предложил метод, позволяющий расширить область приложения способов вычисления, которые применимы были лишь при наличии показательного закона. Развивая его идею, можно включить в рассмотрение все законы, имеющие рациональную лапласовскую трансформацию. Этот прием сводится к формальному использованию комплексных вероятностей перехода. Рассмотрены свойства такого метода.

Резюме автора

4884. **Гармонический анализ стохастического процесса. Икэбэ** (Harmonic analysis of stochastic process. Ikebe Jun), Дзидо сэйгё, Automatic Control, 1957, 4, № 2, 112—121 (японск.)

4885. **Случайные функции как случайные элементы в пространстве Банаха. Форте** (Les fonctions aléatoires comme éléments aléatoires dans un espace de Banach. Fortet Robert), Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954. Vol. 3. Groningen — Amsterdam, 1956, 356—359 (франц.)

Случайная функция рассматривается на отрезке как элемент x в пространстве Банаха $\mathfrak{X}$. Формулируется следующий аналог центральной предельной теоремы.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные элементы в $\mathfrak{X}$ с одинаковым распределением и с $E\|X_j\|^2 < \infty$, $EX_j = \theta$, где θ — нулевой элемент пространства $\mathfrak{X}$. Тогда случайный элемент

$$Z_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} X_j$$

в некотором смысле сходится при $n \to \infty$ к случайной гауссовской функции Y с $E\|Y\|^2 < \infty$ и $EY = \theta$.

Именно, пусть $\mathfrak{X}^*$ — пространство, сопряженное к $\mathfrak{X}$, с элементами x^*, и $\langle x^*, x\rangle$ — значение функционала x^* на элементе x. Характеристическая функция $\varphi_{Z_n}(x^*)$ величины $\langle x^*, Z_n\rangle$ при всяком $x^* \in \mathfrak{X}^*$ и $n \to \infty$ сходится к пределу $\varphi(x^*)$, который при некоторых условиях является для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ характеристической функцией величины $\langle x^*, y\rangle$. Достаточные условия для этого таковы: $\mathfrak{X}$ должно быть сепарабельным, рефлексивным и должно существовать отображение G пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^*$, обладающее следующими свойствами:

$$\alpha)\ \|G(x)\| = \|x\|;\quad \langle G(x), x\rangle = \|x\|^2,$$

$$\beta)\ \|G(x) - G(y)\| \leqslant A\|x - y\|$$

для некоторого фиксированного A и любых x и $y \in \mathfrak{X}$. В частности, пространства L_α для $\alpha \geqslant 2$ обладают этим свойством.

Если $f(x)$ — любой функционал на $\mathfrak{X}$, равномерно непрерывный на каждом шаре конечного радиуса, то из описанной сходимости характеристических функций вытекает сходимость функции распределения $f(Z_n)$ к функции распределения $f(Y)$.

Указывается, что с помощью этих результатов могут быть решены задачи, возникающие в статистике при применении метода Монте-Карло. Например, задача о нахождении предельного распределения функционалов от эмпирических функций распределения. Или следующая задача: как на практике осуществить случайную функцию $X(t)$ такую, чтобы распределение функционала $\int_{t_1}^{t_2} V[X(t)]\,dt$ было близко к распределению функционала $\int_{t_1}^{t_2} V[Y(t)]\,dt$, где $Y(t)$ — заданная гауссовская случайная функция.

Доказательства не приводятся. Статья с подробными доказательствами будет напечатана в Studia Mathematica.

В. А. Волконский

4886. **О функционалах некоторых случайных функций. Форте, Мурье** (Sur les fonctionnelles de certaines fonctions aléatoires. Fortet Robert, Mourier Edith), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 15, 1557—1559 (франц.)

4887. **Предельная центральная теорема для случайных величин в пространстве Банаха. Досс** (Sur le théorème limite central pour des variables aléatoires dans un espace de Banach. Doss Shafik), Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1954, 3, 143—148 (англ.)

Доказывается центральная предельная теорема для величин со значениями из пространства Банаха. Рассматриваются величины, независимые и подчиненные условию, аналогичному условию Линдеберга. Более слабый результат был доказан Форте и Мурье (реф. 4886).

J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 7, 724.

4888. **Пример счетного однородного марковского процесса, все состояния которого являются мгновенными. Добрушин Р. Л.,** Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 4, 481—485 (рез. англ.)

Строится пример однородного во времени стохастически непрерывного марковского процесса со счетным числом состояний, у которого для всех состояний

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - p_i^i(t)}{t} = \infty.$$

Построение ведется прямым вероятностным методом, путем предельного перехода от процесса с конечным числом состояний. Пример процесса, обладающего этим свойством, одновременно построен другим методом в недавней работе Феллера и Мак-Кина (РЖМат, 1957, 3311).

А. А. Юшкевич

4889. **Эргодические свойства неоднородных конечных марковских цепей. Хайнал** (The ergodic properties of non-homogeneous finite Markov chains. Hajnal J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 1, 67—77 (англ.)

Пусть $\{P_i\}$ — последовательность конечных стохастических матриц, задающих вероятности перехода за один шаг в неоднородной цепи Маркова. Пусть

$$H^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} P_i$$

— матрицы переходов за n шагов с элементами $\{h_{ij}^{(n)}\}$. Автор называет цепь сильно эргодической, если существуют не зависящие от i пределы

$$\lim_{n \to \infty} h_{ij}^{(n)} = h_j,$$

и слабо эргодической, если для всех пар индексов k и l

$$\lim_{n\to\infty}\sum_j \left|h_{kj}^{(n)} - h_{lj}^{(n)}\right| = 0.$$

Автору остались, по-видимому, неизвестными работы Бернштейна, Колмогорова, Деблина, Сираждинова, Сарымсакова, посвященные вопросу об условиях слабой эргодичности (ссылки можно найти в работе референта, РЖМат, 1958, 2205). В частности давно получена основная часть результатов автора по этому поводу. В работе даются некоторые критерии сильной эргодичности. Особо обсуждается случай, когда матрицы P_i коммутируют друг с другом. Р. Л. Добрушин

4890. **Некоторые патологические марковские процессы со счетным числом состояний и соответствующие полугруппы операторов на l.** **Кендалл, Рёйтер** (Some pathological Markov processes with a denumerable infinity of states and the associates semi groups of operators on l. Kendall D. G., Reuter G. E. H.), Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954. Vol. 3. Groningen—Amsterdam, 1956, 377—415 (англ.)

В свое время А. Н. Колмогоров (Уч. зап. МГУ, 1951, 4, 53—59) построил примеры однородных по времени стохастически непрерывных процессов со счетным числом состояний, в одном из которых имеется одно «мгновенное» состояние (состояние с бесконечной плотностью вероятности выхода), в другом x — состояние с положительной плотностью вероятности выхода, но из которого невозможен непосредственный переход ни в какое другое состояние. Авторы для этих двух примеров вычисляют инфинитезимальные операторы соответствующих полугрупп операторов на l и сопряженных им полугрупп, а также их области определения. Для обоих примеров находится корректная форма прямых и обратных дифференциальных уравнений и дается описание выборочных функций.

А. А. Юшкевич

4891. **Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.** **Яглом А. М.**, Тр. Моск. матем. о-ва, 1955, 4, 333—374

Решается задача линейной экстраполяции и фильтрации стационарных процессов $\xi(t)$ с рациональной спектральной плотностью, как с известным, так и с неизвестным $M\xi(t)$, по значениям этого процесса на конечном интервале.

Дается оценка $M\xi(t)$ по значениям процесса в течение конечного промежутка времени. Для случая рациональных спектральных плотностей решается задача линейного интерполирования. М. С. Пинскер

4892. **Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.** **Яглом А. М.**, Шусюэ цзиньчжань, 1956, 2, № 2, 161—201 (кит).

Перевод с русского (реф. 4891).

4893. **О статистиках канала с кодом.** **Сато** (On the statistics of a code channel. Satō Hiroshi. Rept Univ. Electro-Commun., 1954, 6, 21—25) (японск.; рез. англ.)

Пропускная способность и вероятности символов вычисляются с помощью производящей функции. Асимптотическое выражение для числа различных возможных последовательностей символов за большое фиксированное время и для среднего числа появлений каждого символа вычисляется также с помощью производящих функций. Обсуждается распределение отклонений числа появлений символов.

T. Kitagawa

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 7, 725

4894. **Спектральный отклик на квадратичное преобразование негауссовского шума.** **Магнесс** (Spectral response of a quadratic device to non-Gaussian noise. Magness T. A.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 11, 1357—1365 (англ.)

Для того чтобы найти спектральную функцию квадратичного преобразования $w(t)$ случайного процесса $x(t)$ достаточно знать функцию P четвертых моментов $x(t)$. Здесь

$$w(t) = u(t)\,v(t) - Mu(t)\,v(t),$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\sigma)\,x(t-\sigma)\,d\sigma,$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\sigma)\,x(t-\sigma)\,d\sigma.$$

Процесс $x(t)$ — эргодический, стационарный в узком смысле и $Mx(t) = 0$. Поэтому $P = P(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = Mx(t)\,x(t-\tau_1)\,x(t+\tau_2)\,x(t+\tau_3)$ есть функция трех переменных. Рассматривается функция $P_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, определяемая из уравнения

$$P(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = R(\tau_1)\,R(\tau_2-\tau_3) +$$

$$+ R(\tau_2)\,R(\tau_3+\tau_1) + R(\tau_3)\,R(\tau_1+\tau_2) + P_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3),$$

$R(\tau)$ — корреляционная функция процесса $x(t)$. Если процесс $x(t)$ — гауссовский, то $P_1 \equiv 0$. Поэтому P_1 может рассматриваться как мера отклонения данного процесса от гауссовского. $Q_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — преобразование Фурье $P(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Доказывается теорема, рассматриваемая как аналог теоремы Винера—Хинчина для $Q_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Вводится функция $E(\omega_1, \omega_2) = Q_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, характеризующая ряд свойств огибающей процесса $x(t)$. Знание функции $E(\omega_1, \omega_2)$ достаточно для нахождения спектральной плотности $S(\omega)$ процесса $w(t)$ в точке $\omega = 0$. Все функции P_1, Q_1 и E предполагаются непрерывными.

В заключение рассматриваются три примера негауссовских процессов: квадрата гауссовского процесса, случайный телеграфный сигнал, дробовой эффект, вычисляются соответствующие им функции P_1, Q_1 и E.

М. С. Пинскер

4895. **Фильтры с переменными параметрами для нестационарных сигналов, заданных на конечном интервале.** **Кошман** (Time-varying filters for nonstationary signals on a finite interval. Koschmann Arnold H.), IRE Convent. Rec., 1955, 3, № 4, 102—105 (англ.)

Изучается задача линейной фильтрации нестационарного входного сигнала $x(t)$, определенного на конечном интервале времени $(0, T)$. $x(t)$ представляется в виде $x(t) = s(t) + \eta(t)$, где $s(t)$ — входное сообщение, а $\eta(t)$ — независимый от $s(t)$ шум.

Значение дисперсий у $s(t)$, $\eta(t)$ и $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, конечны.

Рассматривается случай, когда $x(t)$ представляется в виде ряда $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(t)$, сходящегося в среднем квадратичном. $f_i(t)$ — ортогональная на $(0, T)$ система функций.

Задача линейной фильтрации формулируется как задача нахождения h_i, при которых $P = M\left[s(T) - \sum h_i x_i\right]^2$ принимает наименьшее значение. Выписываются уравнения, связывающие h_i. Эффективных решений этих уравнений в данной работе не получено

Найденные решения сравниваются с решениями, полученными в результате минимизации функционала

$$M\left[s(T)-\int_0^T h(\tau,\ T)x(T-\tau)\,d\tau\right]^2.$$

Строгость проведенных выводов соответствует принятой в технической литературе. М. С. Пинскер

4896. Некоторые результаты об анализе случайных сигналов при помощи процесса подсчета средних. Миллер, Фрёйнд (Some results on the analysis of random signals by means of a cutcounting process. Miller Irwin, Freund John E.), J. Appl. Phys., 1956, 27, № 11, 1290—1293 (англ.)

Рассматривается гауссовский стационарный процесс $\xi(t)$. Пусть $N_x(T)$ — число значений $t\in[0,\ T]$ таких, что $\xi(t)=x$. Авторы находят коэффициент корреляции между случайными величинами $N_a(T)$ и $N_b(T)$. Ранее были найдены математическое ожидание $N_a(T)$ (Rice S. O., Bell. System Tech, 1945, 23, 60) и дисперсия $N_a(T)$ (РЖФиз, 1956, № 2, 475). Вывод основан на формуле

$$N_a(T)=\int_0^T \delta(\xi(t)-a)\,|\,\xi'(t)\,|\,dt,$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Доказательство не является формально строгим, однако, по-видимому, может быть обосновано. Подчеркивается важность не решенной проблемы о вычислении распределения случайной величины $N_a(T)$. Р. Л. Добрушин

4897. Об информации, содержащейся в графах: составные символы; различные состояния для каждой точки. Трукко (On the information content of graphs: compound symbols; different states for each point. Trucco Ernesto), Bull. Math. Biophys., 1956, 18, № 3, 237—253 (англ.)

Две точки графа (конечного одномерного комплекса) топологически эквивалентны, если существует взаимно однозначное отображение графа на себя, переводящее одну из этих точек в другую. Все n точек графа распадаются на m классов топологически эквивалентных точек, содержащих соответственно $n_1, \ldots, n_m$ элементов. Пусть $w_i=n_i/n$, $v_i=1-w_i$ $(i=1, \ldots, m)$. Вводится величина I', равная энтропии вероятностной схемы из m независимых опытов с двумя исходами каждый, имеющими вероятности w_i и v_i. Доказывается, что $I'\leqslant 2I$, где I — энтропия опыта с m исходами, имеющими вероятности $w_1, \ldots, w_m$, и что

$$I'_{\max}=I_{\max}+\lg e+o\left(\frac{1}{m}\right),$$

где максимум берется по всем графам с фиксированным m. Другой рассматриваемый случай — когда каждая точка графа может быть в одном из нескольких возможных состояний. А. А. Юшкевич

4898. Влияние теории информации на современную связь. (Часть I). Мерц (Information theory impact on modern communications. Part 1. Mertz Pierre), Electr. Engng, 1957, 76, № 8, 659—664 (англ.)

Работа носит обзорный характер. В начале подробно излагается предыстория теории информации, которую автор связывает с именами Найквиста, Хартли и Винера. Далее после беглой трактовки концепции Шеннона автор упоминает некоторые новые работы в этой области. Б. С. Флейшман

4899 К. Анализ кратных временных рядов. Кенуй (The analysis of multiple time-series. Quenouille Maurice Henry. London, Griffin, 1957, 105 pp., ill., 24 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 398, 8 (англ.)

4900 К. Курс теории вероятностей. (Для ун-тов). Гнеденко Б. В. Изд. 2-е, переработ. М., Гостехиздат, 1954, 412 стр. с черт., 9 р. 50 к.

4901 К. Элементарное введение в теорию вероятностей. Изд. 4-е. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. М., Гостехиздат, 1957, 144 стр., илл., 2 р. 20 к.

4902 К. Теория вероятностей и ее приложения. Ониеску, Михок, Ионеску-Тулча (Calculul probabilităţilor şi aplicaţii. Onicescu O., Mihoc G., Ionescu Tulcea C. T. Bucureşti, Ed. Acad. RPR, 1956, 787 p., 26, 30 lei) (рум.)

Руководство по теории вероятностей, содержащее теоретико-множественное изложение основ дисциплины, достаточно подробное представление о некоторых современных ее результатах и идеях (предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, цепи Маркова, вероятностные процессы, главным образом процессы Маркова, эргодические теоремы). Изложение, особенно в первых главах, сильно формализовано, и авторы избегают на примерах пояснять понятия случайного события, вероятности, и пр. Теория вероятностей строится как глава теории функций. В книге выдержаны современные теоретико-множественные и логические обозначения.

Книга разбита на три части. Первая часть содержит, помимо основных понятий и теорем, также теорию случайных величин, закон больших чисел, в том числе усиленный закон больших чисел, достаточно подробное изложение теории характеристических функций, центральную предельную теорему, некоторые сведения о безгранично-делимых распределениях и законах класса L, эргодические теоремы и представление о проблеме моментов. Этот материал разбит на 13 глав.

Вторая часть посвящена исключительно теории цепей Маркова и случайных процессов. Процессы без последействия изложены достаточно подробно; стационарным процессам уделено очень мало внимания. Во второй части имеется 7 глав.

Третья часть содержит изложение следующих применений теории вероятностей: элементы статистической механики (2 главы); математическую статистику (3 главы); теорию страхования (4 главы); описание задач звездной статистики.

В конце книги приложены таблицы такие же, как в книге Б. В. Гнеденко (реф. 4900); библ. 221 назв. и алфавитный указатель.

Изложение строгое и в то же время доступное. Помимо материала, уже установившегося в науке, авторы привели большое количество результатов последних лет и тем самым приблизили читателя к современному развитию теории вероятностей, математической статистики, статистической механики и математической теории страхования. Б. В. Гнеденко

4903 К. Теория вероятностей. Учебник для вузов. Реньи (Valószínüségszámítás. Egyetemi tankönyv. Rényi Alfréd, Budapest. Tankönyvkiadó, 1954 (1955), 746 l., ill., 107—112Ft) (венг.)

Книга очень содержательна, удачно построена с педагогической точки зрения, использует последние достижения современной теорией вероятностей. Она пригодна и как учебник и как справочник для математиков, интересующихся теорией вероятностей, и будет полезна для других специалистов. Предполагается только, что читатель владеет знаниями основ алгебры и теории функций; все остальные вспомогательные средства излагаются либо в тексте, либо в приложении. Методы изложения общи и точны. Теория строится на понятиях, введенных Колмогоровым (Kolmogoroff, Grundbegriffe, Berlin, 1933). Однако понятия событий и вероятности определяются

по Гливенко (Курс теории вероятностей, ГОНТИ, 1939), где события есть элементы булевой алгебры, а вероятность — их аддитивная функция. Читателю предлагается большое количество упражнений (свыше 500). Приводятся таблицы значений многих важнейших функций. Часто приводятся собственные результаты автора.

В одном из приложений автор дает свою собственную систему аксиом, из которой вытекает понятие условной вероятности. Эта теория содержит колмогоровскую теорию как частный случай и имеет то преимущество, что дает возможность рассматривать равномерно распределенные во всем пространстве случайные величины.

Гл. I и II содержат основные положения теории вероятностей. Автор обстоятельно рассматривает философские вопросы теории вероятностей и дает критику теории Мизеса.

В гл. III книги содержатся понятия условной вероятности и независимости, далее рассматриваются классические дискретные распределения вероятностей.

Гл. IV посвящена распределению Пуассона. Показывается, что временной процесс при определенных условиях является пуассоновским процессом, что наблюдается, например, при радиоактивном излучении, пространственном распределении звезд и броуновском движении.

В гл. V рассматривается аппроксимация биномиального распределения гауссовым распределением. Доказывается теорема Муавра—Лапласа о предельном переходе и дается хорошая оценка остаточного члена.

В гл. VI вводится понятие случайной величины и функции распределения. Случайная величина определяется как измеримая функция, определенная в пространстве элементарных событий. Далее рассматриваются свойства независимых случайных величин и многомерное условное распределение. Приводятся соответствующие примеры.

В гл. VII определяется распределение суммы, произведения, частного и других функций от независимых случайных величин.

В гл. VIII вводится математическое ожидание как абстрактный интеграл Лебега от случайной величины. Однако теория интеграла Лебега рассматривается не полностью, а только то, что требуется для дальнейшего изложения.

В гл. IX рассматривается рассеяние одномерных многомерных распределений и коэффициенты корреляции.

В гл. X изложены элементы математической статистики.

Рассматриваются методы, опирающиеся на обратные теоремы, вопросы проверки гипотез и исследования отклонений; рассматриваются колмогоровские методы обоснования способа наименьших квадратов и теория регрессии.

В гл. XI изложены сильные и слабые законы больших чисел. Даны теоремы Бернулли и их обобщения Марковым, Хинчиным и Бернштейном, а также неравенства Чебышева и его обобщения (Бернштейн, Колмогоров). Доказаны две теоремы Колмогорова, относящиеся к сильному закону больших чисел. В конце главы рассмотрена теорема Гливенко о сходимости эмпирической функции распределения к теоретической и теорема Хинчина о повторном логарифме.

В гл. XII рассматривается теория характеристических функций в случае одно- и многомерного распределений, а также производящие функции. Доказана известная формула Леви и теорема о сходимости. В качестве применения выводятся некоторые характеристические свойства нормального распределения. Как применение производящих функций рассматривается теория цепных реакций.

Гл. XIII содержит доказательства центральных предельных теорем при условиях Ляпунова и Линдеберга и далее обобщения этих теорем на многомерные величины. В качестве применения изучается распределение критерия χ^2.

В гл. XIV рассматриваются цепи Маркова, в частности конечные и бесконечные цепи Маркова с эргодическими свойствами. В связи с бесконечными цепями Маркова доказана одна теорема, известная как теорема Эрдеша, Феллера и Полларда. Даются некоторые применения.

Темой гл. XV является теория упорядоченной выборки. Многие теоремы доказаны собственными методами автора, основанными на том, что члены вариационного ряда образуют цепь Маркова. Рассмотрены некоторые теоремы Колмогорова, Смирнова, Гнеденко, а также ряд собственных результатов.

В гл. XVI рассматриваются отдельные примеры теории стохастических процессов. Излагаются пуассоновские процессы, вторичные процессы, дается доказательство формулы Эрланга и вывод уравнений Колмогорова для непрерывных стохастических процессов. В конце главы даны многие приложения в виде большого количества задач.

В дополнении 1 дается доказательство теоремы Стона, утверждающей, что каждая алгебра событий изоморфна некоторому телу множеств. В дополнении 2 рассматривается вопрос о продолжении меры и приводится теорема Колмогорова о совместной системе функций распределения. В дополнении 3 рассматривается упомянутая выше система аксиом автора. В дополнении 4 дается краткий обзор истории теории вероятностей.

Книга переведена на немецкий язык. С появлением этого перевода международная литература по теории вероятностей обогатится очень ценной, удовлетворяющей разнообразным требованиям книгой. А. Prékopa

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4904. Об «определяющих» статистиках; одно обобщение проблемы моментов. Линник Ю. В., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 5, 974—976

Пусть X — одномерная случайная величина с законом распределения $F(x)$, а $\xi(x_1, \ldots, x_n)$ — соответствующая повторная выборка. Пусть $Q(\xi)$ — некоторая непрерывная статистика. В работе рассматривается вопрос, в каких случаях точное знание закона распределения статистики $Q(\xi)$ позволяет однозначно восстановить закон $F(x)$.

Приводится несколько теорем, дающих ответ на этот вопрос для некоторого класса функций распределения.

В. П. Скитович

4905. Статистики и подполя. Бахадур (Statistics and subfields. Bahadur R. R.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 3, 490—497 (англ.)

Пусть (X, S, μ) — пространство с вероятностной мерой. Статистикой называется функция, определенная на X. Класс S_f всех S-измеримых подмножеств X вида $f^{-1}(B)$, где B — подмножество области значений f, называется подполем, индуцированным f.

Предполагается, что X — m-мерное эвклидово пространство, S — поле борелевских множеств, f (или g) — вещественная функция, S с любым индексом обозначает борелевское поле.

Пусть: 1) $S_1 \subseteq S_2$ [S, μ], если по каждой S_1-измеримой функции $f_1(x)$ найдется S_2-измеримая функция $f_2(x)$ такая, что $f_1(x) = f_2(x)$ [μ],

2) $S_1 = S_2\,[S, \mu]$, если $S_1 \subseteq S_2\,[S, \mu]$ и $S_2 \subseteq S_1\,[S, \mu]$,
3) $f \subseteq g\,[S, \mu]$, если существует функция h, для которой $f(x) = h(g(x))$ везде, кроме S-измеримого множества μ-меры 0.

Доказаны следующие теоремы:

Для того чтобы каждое подполе S_1 поля S было индуцировано некоторой статистикой, необходимо и достаточно, чтобы X было не более чем счетным.

По каждому подполю S_0 найдется S-измеримая функция f такая, что $S_f = S_0\,[S, \mu]$.

Если f и g — S-измеримые функции, то $S_f \subseteq S_g\,[S, \mu]$ эквивалентно $f \subseteq g\,[S, \mu]$.

Теоремы применяются к изучению необходимых и достаточных статистик и подполей.

Указано, на какие пространства X можно распространить теоремы. И. В. Романовский

4906. Одно неравенство, связанное с гамма-функцией. Герленд (An inequality satisfied by the gamma function. Gurland John), Skand. aktuarietidskr., 1956, № 3—4, 171—172 (англ.)

Для всех действительных значений α и λ, удовлетворяющих условию $\alpha + \lambda > 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $\lambda > 0$, справедливо следующее неравенство, включающее гамма-функцию:

$$\frac{\Gamma^2(\lambda + \alpha)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda + 2\alpha)} < \frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda}.$$

Это следует из общего неравенства для дисперсии регулярных несмещенных оценок, данного Крамером (Cramér H., Skand. aktuarietidskr., 1946).

Резюме автора

4907. Общие элементы. Бранднер (Common elements. Brandner Fred A.), Proc. Iowa Acad. Sci., 1956, **63**, 528—533 (англ.)

4908. Заметка о построении ортогональных латинских квадратов. Бхаттачария (A note on the construction of orthogonal latin squares. Bhattacharya Nikhilesh), Санкия, Indian J. Statist., 1957, **17**, № 4, 351—352 (англ.)

Ман (1949) дал метод построения последовательности $\min_i\left(p_i^{e_i} - 1\right)$ взаимно ортогональных s-сторонних латинских квадратов, когда $s = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$, причем p_i — различные простые числа. Метод Мана использует свойства полей Галуа. Статья иллюстрирует очень общий альтернативный метод построения.

Резюме автора

4909. Разность между последовательными членами упорядоченного ряда случайных величин. Дарвин (The difference between consecutive members of a series of random variables arranged in order of size. Darwin J. H.), Biometrika, 1957, 44, № 1—2, 211—218 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — расположенные в порядке убывания результаты наблюдения над случайной величиной с функцией распределения $F(x)$. Рассматривается вероятность неравенства $x_m - x_{m+1} > u$, выражающаяся интегралом

$$P_1(u) = \frac{N!}{m!\,(N-m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(x+u)]^m \times [F(x)]^{N-m-1} dF(x).$$

Для случая, когда N велико, а $m = Np$, где p близко к 1/2, находится приближенное значение интеграла.

В работе имеется ряд применений полученных формул; для случая нормального и некоторых других распределений построены таблицы. Б. Н. Гартштейн

4910. Нормализация функции плотности. Бос (Normalisation of frequency function. Bose P. K.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 282—284 (англ.)

Пусть известно выборочное распределение нормированной статистики ξ с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$; $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ — соответственно функция распределения и плотность нормального закона. Для наиболее важных выборочных распределений

$$r(x) = f(x) - \varphi(x) \quad \text{и} \quad R(x) = F(x) - \Phi(x)$$

стремятся к нулю с ростом объема выборки n.

Рассматривается случай, когда с точностью до малых более высокого порядка

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{\sqrt{\beta_1}}{6}\varphi'''(x) + \frac{\beta_2 - 3}{24}\varphi^{IV}(x) + \frac{\beta_1}{72}\varphi^{VI}(x),$$

и указывается на возможность определения в этом случае максимума $R(x)$ при заданном n.

А. А. Петров

4911. Аналитические исследования постоянно возобновляемого страхования. II. Вайда (Analytical studies in stop-loss reinsurance. II. Vajda S.), Skand. aktuarietidskr., 1955, № 3-4, 180—191 (англ.)

Ч. I см. Skand. aktuarietidskr., 1951, № 3, 158—175.

Решается задача отыскания несмещенной оценки для функции $P(c, \tau)$ (РЖМат, 1958, 3118). Такой оценкой является, например, $\bar{P} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n$, где $y_i = \max(0, x_i - c)$. Отмечается, что эта оценка часто обращается в нуль и имеет значительную дисперсию. Оба эти обстоятельства затрудняют практическое использование $\bar{P}$ для вычисления размера страховой премии. Пользуясь известными свойствами несмещенных оценок и отправляясь от $\bar{P}$, автор для случая, когда x подчинена нормальному распределению, строит новую несмещенную оценку в виде условного математического ожидания $M(\bar{P} \mid \bar{x}, s^2)$, где $\bar{x}$ и s^2 — обычные достаточные статистики выборки из нормальной совокупности. Рассматривается также оценка $M(\bar{P} \mid \bar{x})$ для случая, когда дисперсия нормального распределения известна. Прилагаются таблицы этих оценок с двумя десятичными знаками для $n = 4$, $\bar{x} = -3\,(0,5)\,0$ и $s = 0,\ 5\,(0,\ 5)\,3$. Л. Н. Большев

4912. Последовательное исследование вида функционального распределения случайной величины. Павловский (Sekwencyjne badanie postaci funkcyjnej rozkładu zmiennej losowej. Pawłowski Zbigniew), Przegl. statyst., 1957, 4, № 1-2, 107—121 (польск.; рез. русск., англ.)

В работе обсуждается метод последовательной проверки гипотезы H относительно функционального вида закона распределения случайной переменной X при известной альтернативе H_1.

Проверка гипотезы основана на исследовании числа наблюдений, появившихся в отдельных интервалах $I_1, I_2, \ldots, I_k$, на которые разделен весь интервал изменения X и на сопоставлении — согласно последовательной теории Вальда — вероятности получить тот или иной результат в предположении верности альтернативной гипотезы с вероятностью, исчисленной при верности гипотезы H_0.

Даются формулы оперативной характеристики предлагаемого последовательного теста и формула среднего числа наблюдений для испытания гипотезы.

Автор вводит понятие «более эффективного» теста, а именно, он указывает, что значения $E(n)$ возможно уменьшить (при верности гипотезы H_1) таким построением интервалов, чтобы вероятности попадания в них при гипотезе H_1 были равны.

Рассуждения проведены для двух случаев: а) при известности параметров X, б) при неизвестности параметров.

В последнем случае можно пользоваться оценкой параметров, полученных при помощи метода максимального правдоподобия, причем оценка эта систематически исправляется в ходе проведения последовательной процедуры.

Дается верхняя граница средней величины допущенной ошибки и одновременно указывается, что при этой процедуре число интервалов I_i не должно быть большим. По резюме автора

4913. Оценка среднего цензурированного нормального распределения при помощи порядковых статистик. Мур (The estimation of the mean of a censored normal distribution by ordered variables. Moore P. G.), Biometrika, 1956, **43**, № 3-4, 482—485 (англ.)

Рассмотрена задача оценки среднего нормальной совокупности по выборке, в которой доступны не все значения, а лишь значения, не превосходящие некоторого предела, или значения, не меньшие данного предела, или, наконец, значения, расположенные внутри данных пределов. Относительно опущенных наблюдений известно лишь их общее число. Для построения требуемой оценки использованы линейные формы от членов вариационного ряда. Эффективность полученных оценок сопоставляется с эффективностью оценок максимального правдоподобия, которые были получены ранее Хальдом и Гуптой. А. А. Зингер

4914. О точном распределении статистики А. Н. Колмогорова и ее асимптотическом разложении. Чжан Ли-цянь, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1955, 6, № 1, 55—81 (кит.; рез. русск.)

Получено точное распределение статистики $D_n = \sup_{-\infty<x<\infty} |F(x) - F_n(x)|$ в более простой форме, чем в работе В. С. Королюка (Изв. АН СССР, 1955, **19**, 81—96). Точное распределение использовано для получения асимптотического разложения по степеням:

$$P\{\sqrt{n}\,D_n < z\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2}\left\{1 - \frac{2k^2z}{3\sqrt{n}} - \right.$$

$$- \frac{1}{18n}[f_1 - 4(f_1+3)k^2z^2 + 8k^4z^4] +$$

$$+ \frac{k^2z}{27\sqrt{n^3}}\left[\frac{f_2}{5} - \frac{4(f_2+45)k^2z^2}{15} + \right.$$

$$\left.\left. + 8k^4z^4\right] + O\left(\frac{z^{13}}{n^2}\right)\right\},$$

где $f_1 = k^2 - (1-(-1)^k)/2$, $f_2 = 5k^2 + 22 - 15(1-(-1)^k)/2$. Успех обусловлен удачными тождественными преобразованиями. Приведенный результат указывает на ошибку в работе В. С. Королюка (РЖМат, 1954, 5190). Б. В. Гнеденко

4915. О точном распределении статистики Н. В. Смирнова и ее асимптотическом разложении. Чжан Ли-цянь, Шусюэ цзиньчжань, 1955, **1**, № 4, 775—790 (кит.; рез. русск.)

$F(x)$ — непрерывная функция распределения; $F_n(x)$ — эмпирическое распределение для n независимых наблюдений. Прямым методом из точной формулы для распределения статистики $D_n^+ = \sup_{-\infty<x<\infty}[F_n(x) - F(x)]$ получено асимптотическое разложение

$$P\{\sqrt{n}\,D_n^+ < z\} = 1 - e^{-2z^2}\left\{1 - \frac{2z}{3\sqrt{n}} + \frac{2z^2}{3n}\left(1 - \frac{2z^2}{3}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4z}{9\sqrt{n^3}}\left(\frac{1}{5} - \frac{19z^2}{15} + \frac{2z^4}{3}\right) + O\left(\frac{z^{12}}{n^2}\right)\right\}$$

$$\left(0 \leqslant \varepsilon \leqslant z = O\left(\sqrt[6]{n}\right)\right).$$

Точная формула и первый член разложения были получены Н. В. Смирновым (Успехи матем. наук, 1944, **10**, 179—206); следующий член разложения найден Н. И. Карплевской (1950, Львовск. ун-т, не напечатано) и В. С. Королюком (Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, № 2, 81—96). Б. В. Гнеденко

4916. Логарифмически нормальная аппроксимация произведений и частных. Бродбент (Lognormal approximation to products and quotients. Broadbent S. R.), Biometrika, 1956, **43**, № 3-4, 404—417 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n независимых случайных величин, имеющих нормальное или прямоугольное распределение с малыми коэффициентами вариации. Величина $q = x_1x_2 \ldots x_j x_{j+1} \ldots x_n$ аппроксимируется посредством величины z, имеющей логарифмически нормальное распределение, параметры которого выбираются по методу моментов; этот метод дает достаточно хорошие практически результаты. В заключение рассмотрен вопрос о теоретическом обосновании целесообразности использования метода моментов.

А. А. Зингер

4917. О правилах наилучшего разбиения на интервалы при нормальном распределении. Циндлер (Über Faustregeln zur optimalen Schichtung bei Normalverteilung. Zindler Hans-Joachim), Allgem. statist. Arch., 1956, **40**, № 2, 168—173 (нем.)

Рассматривается большая совокупность N объектов, распределение которых по некоторому признаку приближенно можно считать заданным плотностью $f(x)$; из этой совокупности взята выборка объема n. Область изменения признака разбита на k интервалов.

Обозначения: n_i — число элементов в выборке из i-го интервала ($i = 1, 2, \ldots, k$), N_i — общее число элементов в i-м интервале,

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i, \quad N = \sum_{i=1}^{k} N_i,$$

$$\frac{N_i}{N} = p_i = \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — плотность аппроксимирующего распределения, а y_{i-1} и y_i — границы i-го интервала.

Вначале рассматривается случай пропорциональной выборки, когда $n_i/n = N_i/N$.

Ставится задача, как следует производить разбиение на интервалы, чтобы

$$S_p^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} p_i\sigma_i^2$$

была минимальной.

Задача решается для случая, когда $f(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$, $k = 3$ и интервалами являются $(-\infty, y)$, $(-y, y)$, $(y, +\infty)$. При этом оказывается, что $y = +0{,}61$.

Рассматривается также другой частный случай, когда $k = 4$ и интервалами являются $(-\infty, -y)$,

$(-y, 0)$, $(0, y)$ и (y, ∞). При этом получается, что $y = 0{,}98$.

Аналогичная задача ставится для случая, когда

$$\frac{n_i}{n} = \frac{p_i\sigma_i}{\sum_1^k p_i\sigma_i} \text{ и } S_N^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^k p_i\sigma_i\right)^2$$

В рассматриваемом примере, когда $f(x)$ — нормальная плотность, $k = 3$, а разбиение производится на интервалы $(-\infty, -y)$, $(-y, y)$, $(y, +\infty)$, оказывается, что $y = 0{,}55$. С. Х. Туманян

4918. **Оценка результирующего распределения. III. Усечение и выживание. Сампфорд** (The estimation of response-time distribution. III. Truncation and survival. Sampford M. R.), Biometrics, 1954, 10, № 4, 531—561 (англ.)

Третья часть обзорной статьи (первые 2 части см. Biometrics, 1952, 8, 13, 307). Рассматривается задача оценки параметров нормального распределения методами, аналогичными методам probit-анализа. Особо рассматривается случай усеченной выборки, когда известны лишь те выборочные значения, которые заключены в некотором заданном интервале. Обсуждается процедура оценки, изложенная Хальдом (реф. 5055). Имеется ряд примеров статистической обработки результатов некоторых биологических экспериментов, и, в частности, рассматривается методика построения кривых выживания и смертности. Библ. 17 назв. Л. Н. Большев

4919. **Некоторые приложения преобразований Меллина к теории двумерных статистических распределений. Фокс** (Some applications of Mellin transforms to the theory of bivariate statistical distributions. Fox Charles), Proc. Cambridge Philos. Soc. 1957, 53, № 3, 620—628 (англ.)

Описывается метод для нахождения плотности двумерных случайных переменных, являющихся произведениями или отношениями других двумерных случайных переменных. Если (ξ, η) — пара двумерных случайных переменных с совместной плотностью $f(x, y)$, то метод зависит от того факта, каким образом математическое ожидание $|\xi|^{r-1}|\eta|^{s-1}$ связано с преобразованием Меллина $f(x, y)$ в пространстве двух измерений. Зная это математическое ожидание, можно найти функцию плотности посредством обратного преобразования Меллина. Для иллюстрации теории дано несколько примеров. Резюме автора

4920. **Заметка о вычислении моментов двумерного гипергеометрического распределения. Рам** (A note on the calculation of moments of two dimensional hypergeometric distribution. Ram Siya), Ganita, 1954, 5, № 2, 97—101 (англ.)

Романовский (Romanovsky V., Biometrika, 1925, 17, 57) дал метод вычисления моментов одномерного гипергеометрического распределения, который имеет решительное преимущество над рекуррентным отношением для моментов, данным Пирсоном (Pearson K., Biometrika, 1924, 16, 157), в том смысле, что возможно найти моменты нужного порядка независимо от вычисления моментов низших порядков. В этой статье автор распространяет этот результат на случай двумерного гипергеометрического распределения и отмечает, что результаты могут быть обобщены на многомерный случай. Резюме автора

4921. **Случайные ортогональные преобразования и их применение в некоторых классических проблемах распределения в многомерном анализе. Вейсман** (Random orthogonal transformations and their use in some classical distribution problems in multivariate analysis. Wijsman Robert A.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 2, 415—423 (англ.)

Ортогональные матрицы, имеющие элементы, зависящие от некоторых случайных векторов, являются обычным рабочим инструментом в различных проблемах распределения в многомерном анализе. Этот метод применяется к получению распределений Хотеллинга T^2 и обобщенной дисперсии Уилкса, разложению Бартлетта и распределению Уишарта. Резюме автора

4922. **Теория решающих процедур для распределений с монотонными отношениями правдоподобия. Карлин, Рубин** (The theory of decision procedures for distributions with monotone likelihood ratio. Karlin Samuel, Rubin Herman), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 272—299 (англ.)

Доказывается ряд теорем о решающих процедурах в случае действий статистика, основанных на наблюдении случайной величины X, обладающей плотностью вероятности $p(x \mid \omega)$ такой, что

$$\frac{p(x_1 \mid \omega_1)}{p(x_1 \mid \omega_2)} \geqslant \frac{p(x_2 \mid \omega_1)}{p(x_2 \mid \omega_2)} \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x_1 > x_2, \\ \omega_1 > \omega_2 \end{matrix}$$

(монотонность отношения правдоподобия — м. о. п.). Такого рода распределениями являются, например, экспоненциальное, нормальное, биномиальное, Пуассона и др.

Действия статистика (стратегии) определяются как набор $\Phi = \{\Phi_i(x)\}$ распределений по i, где $\Phi_i(x)$ означает вероятность i-го действия, когда наблюдается значение $X = x$.

Стратегия Φ называется монотонной, если существует неубывающая последовательность чисел x_i, такая, что

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i < x \leqslant x_{i+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказывается полнота класса всех монотонных стратегий в случае м. о. п. и случае конечного или счетного числа действий.

В случае двух действий, когда $\Phi = \{\Phi(x), 1 - \Phi(x)\}$ и функция потерь $L_i(\omega)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяет некоторым естественным условиям, рассматривается игра G, в которой пространство стратегий статистика — все монотонные стратегии Φ, а пространство стратегий природы — все априорные распределения F параметра ω на интервале $a < \omega < b$ (не исключается случай — $\infty < \omega < \infty$). Тогда, если

$$\lim_{\omega \to a} L_2(\omega) \int (1 - \Phi(t))\, p(t \mid \omega)\, dt = 0$$

и $\lim_{\omega \to b} L_1(\omega) \int \Phi(t)\, p(t \mid \omega)\, dt = 0$, то игра G определена, т. е. $\min_\Phi \max_F \rho(\Phi, F) = \max_F \min_\Phi \rho(\Phi, F)$, где $\rho(\Phi, F)$ — бейессовский риск.

Результаты обобщаются на случай континуального множества действий. Б. С. Флейшман

4923. **Замечание о корнях уравнения максимального правдоподобия. Крафт, Ле-Кам** (A remark on the roots of the maximum likelihood equation. Kraft C., LeCam L.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 4, 1174—1177 (англ.)

Построены примеры, показывающие, что оценки максимального правдоподобия могут не существовать или быть несостоятельными в обычных условиях регулярности. В связи с этим авторы отмечают предпочтительность прямого доказательства состоятельности оценок максимального правдоподобия по сравнению с доказательством существования и состоятельности корней уравнения правдоподобия, которое чаще встречается в статистической литературе. В. В. Петров

4924. **Предельные распределения ранга вариационного ряда величин, связанных простой стационар-**

ной цепью Маркова. Гартштейн Б. Н., Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-та. Сер. физ.-матем. и хим., 1957, № 1, 9.

4925. **Допустимые критерии для среднего значения прямоугольного распределения.** Бернбаум (Admissible tests for the mean of a rectangular distribution. Birnbaum Allan), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 157—161 (англ.)

В явном виде указаны минимальный полный класс и минимальный существенно полный класс критериев простых гипотез, устанавливающих среднее значение прямоугольного распределения, длина основного промежутка (ранга) которого известна. Приведены примеры критериев, оптимальных при различных альтернативах. Резюме автора

4926. **Метод сопоставления, применяемый для оценки надежности теста.** Бос, Чаудхури (Method of matching used for the estimation of test reliability. Bose P. K., Chaudhuri S. B.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 17, № 4, 377—384 (англ.)

Метод сопоставления был предложен для оценки надежности теста. Два метода (именно метод сопоставления и метод Кудера—Ричардсона) дают очень близкие оценки для коэффициента надежности. Резюме автора

4927. **Критерий значимости для испытания гипотезы, что две переменные измеряют один и тот же признак при исключении ошибок измерения.** Лорд (A significance test for the hypothesis that two variables measure the same trait except for errors of measurement. Lord Frederic M.), Psychometrika, 1957, 22, № 3, 207—220 (англ.)

Приводится критерий значимости, построенный по отношению правдоподобия для гипотезы, что после исключения ошибок измерения (correcting for attenuation) две случайные величины имеют полную корреляцию в совокупности (с коэффициентом корреляции, равным единице), из которой извлечена выборка. Резюме автора

4928. **Некоторые критерии, основанные на операциях скользящих средних временных последовательностей.** Маттила (Some tests based on moving average operations on time series. Mattila Sakari. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1956, Sar. A—1, № 226, 12 pp.) (англ.)

Последовательность наблюдений $y_{\nu i}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, k$) разлагается на аддитивные компоненты

$$y_{\nu i} = \Gamma_{\nu i} + \eta_i + \varepsilon_{\nu i},$$

где $\Gamma_{\nu i}$, η_i $\varepsilon_{\nu i}$ — соответственно основная, периодическая и стохастическая компоненты.

Рассматриваются квадратические оценки s_3^2 и s_1^2, основанные на средних величинах временных последовательностей и представляющие соответственно оценки дисперсий основной и стохастической компонент.

Для случая $n \geqslant 3$, $k = 3$ приводятся значения дисперсий величин s_3^2 и s_1^2, их ковариации и коэффициента корреляции, а также значения дисперсий величин $s_3^2 - s_1^2$ и s_3^2/s_1^2. С. Х. Туманян

4929. **Распространение множественных разностных критериев на исправленные средние, коррелированные по группам.** Креймер (Extension of multiple range tests to group correlated adjusted means. Kramer Clyde Young), Biometrics, 1957, 13, № 1, 13—18 (англ.)

Критерий для суждения о существенности расхождений средних по группам (факторам) распространяется на случай, когда средние исправляются по соответствующим уравнениям прямых регрессий.

Даются методы составления критериев для исправленных средних с разно-изменчивыми дисперсиями и ковариациями в ковариационном анализе, в планах сбалансированных неполных блоков, в планах простой и тройной решеток и в частично сбалансированных опытах. М. К. Камалов

4930. **Последовательные критерии проверки гипотез относительно среднего времени между осуществлениями событий пуассоновского процесса с непрерывным временем.** Кифер, Вольфовиц (Sequential tests of hypotheses about the mean occurrence time of a continuous parameter Poisson process. Kiefer J., Wolfowitz J.), Naval Res. Logist. Quart., 1956, 3, № 3, 205—219 (англ.)

Приводятся таблицы, по которым можно определить оперативную характеристику и среднее выборочное время для последовательного критерия, указанного в заглавии. Эти таблицы полезны и в ряде других случаев. С. С. Кислицын

4931. **Критерий браковки, основанный на размахе.** Блисс, Кокран, Тьюки (A rejection criterion based upon the range. Bliss C. I., Cochran W. G., Tukey J. W.), Biometrika, 1956, 156, 43, № 3—4, 418—422 (англ.)

Пусть $w_1, w_2, \ldots, w_k$ — набор размахов в k повторных однородных выборках (объема n каждая) из нормальной совокупности. Рассматривается величина

$$T_k = w^*/W,$$

где $w^* = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} w_j$, а $W = \sum w_j$.

Эта величина применяется для построения критерия браковки крайних значений в выборке, дающей максимальное значение размаха. Приводятся приближенные формулы, а также некоторые таблицы. А. А. Зингер

4932. **Непараметрические тесты.** Морис (Quelques tests non paramétriques. Morice E.), Rev. statist. appliquée, 1956, 4, № 4, 75—107 (франц.)

Статья содержит изложение некоторых непараметрических тестов для проверки статистических гипотез.

Часть I. Тесты, основанные на сумме рангов. Критерий, предложенный Уилкоксоном, применяется к решению следующей задачи: принадлежат ли две выборки объемов $n = N/2$ к одной и той же генеральной совокупности или нет. Для этого наблюденные значения величин $X = x_1, \ldots, x_n$ и $Y = y_1, \ldots, y_n$ нумеруются в порядке их возрастания; затем две данные выборки заменяются данными из соответствующих номеров (рангов). Для этих последних вычисляют суммы рангов S, при этом

$$M(S) = \bar{S} = n(2n+1)/2, \quad \sigma_s = n\sqrt{(2n+1)/3}/2.$$

В случае малых n на основе таблиц Уилкоксона, приведенных в статье, можно найти интервал, симметричный относительно $\bar{S}$, который с коэффициентом доверия $P = 0{,}05$, $0{,}02$ и $0{,}01$ заключает S, что и позволяет решить вопрос о принадлежности обеих выборок к одной и той же генеральной совокупности.

Затем рассматривается случай k пар выборок объема n и приводятся соответствующие таблицы Уилкоксона. Рассматривается случай двух выборок разного объема и приводятся таблицы Колин-Уайта доверительных интервалов для соответствующих сумм.

Далее рассматривается тест Манна и Уитнея для двух выборок разного объема $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$. Пусть U_{yx} есть число случаев, когда какой-либо y предшествует какому-либо x; таблицы Манна и Уитнея дают для каждой пары m, n вероятность отклонения U_{yx} от нормы, равной $mn + m(m+1)/2 - S_y$, где S_y — сумма рангов, отвечающих второй выборке

В конце части I излагается тест Краскала и Валлиса для k выборок, являющийся обобщением тестов Уилкоксона и Колина-Уайта.

Часть II. Тесты, основанные на числе и на длине однородных последовательностей (серий). Если случайная последовательность содержит m элементов типа a и n элементов типа b, то при больших m, n общее число R серий в последовательности приближенно нормально со средним $2mn/(m+n)+1$ и дисперсией $2mn\,(2mn-m-n)/(m+n)^2\,(m+n-1)$ (см. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1953, гл. III, § 4). Для малых m, n распределение R дается таблицами IX, X Сведа и Эйзенхарта, приведенными в статье. В качестве применения рассматривается число серий, лежащих выше или ниже медианы для $m=n$. Далее излагается вопрос о числе серий R_{ak} элемента a длины $\geqslant k$ и его применение к оценке случайности данной последовательности.

Часть III. Тесты, основанные на знаках последовательных разностей. Пусть x имеет непрерывное распределение; x_i — случайная выборка, S — число отрицательных разностей из $x_2-x_1, \ldots, x_n-x_{n-1}$. Приводится таблица Моора и Валлиса, дающая для малых n $P(S\geqslant \tilde{S})$, $\tilde{S}=(n-1)/2$. Библ. 16 назв.

Г. П. Боев

4933. Два доверительных интервала для отношения двух вероятностей и некоторые меры эффективности. Нотер (Two confidence intervals for the ratio of two probabilities and some measures of effectiveness. Noether Gottfried E.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 277, 36—45 (англ.)

Пусть p_1 — вероятность успеха в испытании над некоторой совокупностью, p_2 — вероятность успеха в испытании над той же совокупностью после воздействия на нее определенного фактора. В качестве меры эффективности этого фактора предлагается отношение $P=(p_2-p_1)/(1-p_1)$, если $p_2>p_1$ и $P'=(p_1-p_2)/p_1$, если $p_1>p_2$. Вероятности p_1 и p_2 в общем случае предполагаются не известными.

Задаваясь величиной λ, соответствующей определенному процентному значению нормального отклонения, и предполагая распределение P и P' приближенно нормальным, автор выводит формулы граничных значений доверительного интервала данного уровня вероятности. Эта задача решается сначала для частного случая, когда p_1 известно, затем для более общего, когда p_1 и p_2 неизвестны.

Показано, что вообще длина доверительного интервала с увеличением числа испытаний при неизменных остальных факторах возрастает. А. М. Бендерский

4934. Последовательно определяемые доверительные интервалы. Джонсон (Sequentially determined confidence intervals. Johnson N. L.), Biometrika, 1957, 44, № 1-2, 279—281 (англ.)

Пусть последовательная процедура, приводящая к построению доверительного интервала для параметра θ, имеет свойства: 1) вероятность того, что она кончается после n шагов, равна P_n, 2) условная вероятность ω_n получения правильного доверительного интервала при условии, что процедура кончается после n шагов, не зависит от θ. Оптимальная процедура определяется так: (a) полный коэффициент доверия $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n P_n=\Omega$ и (b) при условии (a) $\sum_{n=1}^{\infty} nP_n$ минимальна.

В работе показано, что при очень общих условиях оптимальная процедура имеет не более двух ненулевых значений P_n и при некоторых дополнительных условиях ненулевыми являются значения P_m и P_{m+1}, где $\omega_m<\Omega<\omega_{m+1}$ — ближайшие к Ω значения ω, или, если $\omega_m=\Omega$, оптимальной является процедура с $P_m=1$.

Таким образом оптимальными в указанном смысле являются либо процедуры с фиксированным объемом выборки, либо очень близкие к ним. Б. Н. Гартштейн

4935. Некоторые новые результаты в дисперсионном анализе. Хартли (Some recent developments in analysis of variance. Hartley H. O.), Trans. Sympos. Appl. Math., 1954, 2. New York—London, 1955, 47—72 (англ.)

Перепечатано из Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 1, 47—72.

4936. Связь между информационным и дисперсионным анализами. Гарнер, Мак-Гилл (The relation between information and variance analyses. Garner W. R., McGill William J.), Psychometrika, 1956, **21**, № 3, 219—228 (англ.)

Обсуждается аналогия между разложением полной дисперсии признака на дисперсию, вызванную влиянием какого-то фактора, и остаточную дисперсию и разложением энтропии признака на информацию о признаке, содержащуюся в факторе, и условную энтропию признака относительно фактора. Рассматривается случай влияния двух факторов на признак.

А. А. Юшкевич

4937. Смесь нормальных распределений с различными дисперсиями. Тейкроу (The mixture of normal distributions with different variances. Teichroew D.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 2, 510—512 (англ.)

В некоторых практических задачах наблюдаемая переменная может иметь нормальное распределение, у которого дисперсия меняется от одного наблюдения к другому. Цель статьи — дать формулу для безусловного распределения, когда дисперсии предполагаются распределенными согласно гамма-распределению. Резюме автора

4938. Преобразование к главным осям квадратичной формы, представляющей дисперсию. Еккель (Hauptachsentransformation der quadratischen Form für die Streuung. Jaeckel K.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 9-10, 403—404 (нем.)

Обычными приемами линейной алгебры находится ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\quad (n\geqslant 2),\quad \bar{x}=n^{-1}\sum x_i$$

к сумме $(n-1)$ квадратов новых переменных.

Н. В. Смирнов

4939. О распределении многообразий $p\times p(-1)$, n раз латинизированных прямоугольных решеток и взвешенных средних дисперсий. Рой (On the distribution of varieties of $p\times(p-1)$, n-ple latinized rectangular lattices and weighted average variances. Roy Purnendu Mohan), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, 7, № 27, 101—114 (англ.)

4940. О характеристиках положения, дисперсии и испытаниях гипотез о генеральной совокупности Парето. Мунираззаман (On measures of location and dispersion and tests of hypotheses in a Pareto population. Muniruzzaman A. N. M.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, 7, № 27, 115—123 (англ.)

Хорошо известно, что в распределении Парето

$$(\nu-1)\,w^{\nu-1}x^{-\nu}dx,\ \nu>1,\ w>0,\ w\leqslant x\leqslant\infty,$$

ни арифметическое среднее, ни обычные меры дисперсии, асимметрии или эксцесса не могут быть определены для всех значений ν. Действительно, k-й момент от-

носительно начала может быть определен только для значений $\nu > k+1$. В частности, среднее арифметическое не может быть определено для $\nu \leqslant 2$, а дисперсия — для $\nu \leqslant 3$.

Цель статьи — предложить соответствующие меры среднего и дисперсии для генеральной совокупности Парето и методы испытания гипотез, связанных с параметром ν. Резюме автора

4941. **Заметки о преподавании некоторых элементарных понятий математической статистики в средней школе. Некоторые соображения относительно дисперсии и корреляции.** Гарсия-Эспанья (Notas para la enseñanza de algunos conceptos elementales de estadística en el bachillerato. Ideas sobre la dispersión y la correlación. Garcia España Eduardo), Trab. estadist., 1955, 6, № 1, 83—94 (исп.)

4942. **Регрессионный анализ соотношений между автокоррелированными временными последовательностями.** Уайз (Regression analysis of relationships between autocorrelated time series. Wise J.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, B18, № 2, 240—256 (англ.)

Работа посвящена главным образом исследованию линейной системы уравнений регрессии, в которой структурные переменные определены рекурсивно.

Основные результаты:

1. Для рекурсивной системы линейных уравнений вида

$$y_t = \alpha x_t + \varepsilon_t; \quad x_t = \beta y_{t-1} + \eta_t \tag{1}$$

$$E\varepsilon_t = E\eta_t = 0, \quad E\varepsilon_t^2 < \infty, \quad E\eta_t^2 < \infty$$

оценки α и β, полученные по методу наименьших квадратов, асимптотически состоятельны и несмещены при любых α и β, если только

$$E(\varepsilon_t \eta_{t-k}) = 0 \quad (|k| = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0 \quad (|k| = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

$$E(\eta_t \eta_{t-k}) = 0 \quad (|k| = 1, 2, \ldots).$$

2. Система уравнений (1) может быть обобщена; более общая система будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\varepsilon \\ \eta\end{bmatrix},$$

где матрицы $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ имеют такую структуру:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}\mathbf{y} \\ \mathbf{x}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathbf{x} & 0 \\ 0 & \mathbf{Wy}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix}010 & \ldots & 0 \\ 0010 & \ldots & 0 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 000 & \ldots & 01 \\ 100 & \ldots & 00\end{bmatrix}$$

Обозначим

$$\mathbf{V} = E\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \eta\end{bmatrix}[\varepsilon'\eta'].$$

Тогда оценки для α и β вида

$$\begin{bmatrix}\hat{\alpha} \\ \hat{\beta}\end{bmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}$$

(так называемые оценки типа Гаусса-Маркова) асимптотически несмещены и состоятельны при любых α и β, если по крайней мере выполняются условия типа (2) и (3).

Таким образом, асимптотическая несмещенность и состоятельность оценок типа Гаусса-Маркова обеспечены в случае некоррелированности остатков первого и второго уравнений системы (1) при любых α и β, а для асимптотической несмещенности и состоятельности оценки, полученной по методу наименьших квадратов, дополнительно требуется еще отсутствие автокорреляции между остатками одного и того же уравнения при различных t. Б. В. Финкельштейн

4943. **Повторная линейная регрессия и компоненты дисперсии генеральной совокупности с биномиальными частотами.** Ли (Repeated linear regression and variance components of a population with binomial frequencies. Li C. C.), Biometrics, 1957, 13, № 2, 225—233 (англ.)

4944. **Применение кронекеровского произведения матриц в множественной регрессии.** Корниш (An application of the Kronecker product of matrices in multiple regression. Cornish E. A.), Biometrics, 1957, 13, № 1, 19—27 (англ.)

Автор составляет нормальное уравнение в матричной форме, решает его путем введения прямого (кронекеровского) произведения двух матриц и показывает конкретное применение этого уравнения в климатологии. М. К. Камалов

4945. **Об одной теореме теории дифференциальных уравнений и «инвариантных в среднем» статистиках.** Зингер А. А., Линник Ю. В., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 4, 577—579

Дифференциальное уравнение

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \leqslant k;\ \alpha_i \geqslant 0} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} f^{(\alpha_1)}(t) \ldots f^{(\alpha_n)}(t) = Cf^{(n)}(t) \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ называется положительно определенным, если полином

$$P(x_1, \ldots x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{(j_1 \ldots j_n)}\ \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leqslant k} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_{j_1}^{\alpha_1} x_{j_2}^{\alpha_2} \ldots x_{j_n}^{\alpha_n}$$

неотрицателен. Авторами доказана теорема: Если положительно определенное уравнение (1) ($k \geqslant n$, равенство $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$ достигается) имеет в некоторой окрестности нуля положительно определенное решение $f(t)$, то это решение продолжимо на комплексную плотность и является целой функцией.

Статистика P называется инвариантной в среднем относительно статистики T, если $M\{P/T = a\}$ не зависит от значения принятого T и равно MP.

Пусть $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор с независимыми компонентами, распределенными по закону $F(x)$. Пусть далее статистики $P(\xi)$ являются неотрицательными полиномами степени $k \geqslant n$ и зависят только от разностей $x_t - x_j$ ($i, j = 1, \ldots, n$), а также неособенны (определение: Линник Ю. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 1, 35—48). Оказывается, что если статистика $P(\xi)$ инвариантна относительно $T = x_1 + \ldots + x_n$, то для всех действительных s существует Me^{sx_j}; если к тому же $P(\xi)$ неособенна и $Me^{sx_j} = O(\exp e^{|s|^A})$, то распределение $F(x)$ нормально. Б. В. Гнеденко

4946. **Об одном классе дифференциальных уравнений и его применении к некоторым вопросам теории регрессии.** Зингер А. А., Линник Ю. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, 121—130 (рез. англ.)

Доказываются и уточняются теоремы, сформулированные авторами ранее (реф. 4945). В. Г. Рихтер

4947. Влияние дополнительных переменных на канонические коэффициенты корреляции. Сиотани (Effect of the additional variates on the canonical correlation coefficients. Siotani Minoru), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math. 1957, 5, № 1, 52—57 (японск.; рез. англ.)

Обсуждается влияние на канонические коэффициенты корреляции добавления дополнительных величин к одному из двух первоначальных множеств величин. Необходимое и достаточное условие того, что этого эффекта добавления дополнительных переменных не существует, связывается с некоторой проблемой множественной регрессии. Резюме автора

4948. О коэффициенте корреляции векторов. Огава (On the Masuyama's correlation coefficient of vectors. Ogawa Junjiro), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1956, 4, №2, 53—60 (японск.; рез. англ.)

Мацуяма опубликовал в течение 1939—1941 гг. серию статей, в которых обсуждался вопрос об измерении корреляции между случайными векторами. Оказывается, что теория Мацуяма очень туманна, так как различие между параметрами генеральной совокупности и статистиками было проведено нечетко, и его теория покрывается теорией канонической корреляции, установленной Хоттеллингом в 1936 г. Однако нет никакой литературы, по крайней мере, насколько известно автору, которая бы освещала это положение правильно.

Цель этой статьи сделать ясным это соотношение и получить выборочное распределение коэффициента корреляции Мацуяма в некоторых специальных случаях на основе выборочного распределения канонических коэффициентов корреляции. Резюме автора

4949. Вычислительная процедура для τ-корреляции. Картрайт (A computational procedure for tau correlation. Cartwright Desmond S.), Psychometrika, 1957, 22, № 1, 97—104 (англ.)

4950. Статистические выводы в факторном анализе. Андерсон, Рубин (Statistical inference in factor analysis. Anderson T. W., Rubin Herman), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability, Vol. 5, Berkeley—Los Angeles, 1956, 111—150 (англ.)

Пусть $X = \Lambda f + U + \mu$, где X, U, μ — векторы размерности p; U — случайная величина, причем $EU = 0$, $EUU' = \Sigma$, Σ — диагональная матрица; $\Lambda = (p \times m)$-матрица ($m \leqslant p$); f — вектор размерности m, который или случаен (тогда $Ef = 0$, f и U независимы) или меняется от наблюдения к наблюдению. В таком случае $X_\alpha = \Lambda f_\alpha + U + \mu$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$, где α — номер наблюдения); $N^{-1}\sum_{\alpha=1}^{N} f_\alpha = 0$; U не зависит от α.

В обоих случаях $\mu = EX$. Подробно освещены основные вопросы, возникающие при изучении этой модели с точностью до вторых моментов. Получен ряд новых результатов относительно оценок Λ, Σ, μ по данным наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и их асимптотического поведения. С. С. Кислицын

4951. Анализ 3^3 факториального плана. Мерти (Analysis of a 3^3 factorial design. Murty V. N.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, 7, № 27, 124—126 (англ.)

4952. О статистической оценке оптимальной комбинации факторов в экспериментальном плане. Галантино (Sulla stima statistica delle combinazioni ottime dei fattori nei piani sperimentali. Galantino Fausto), Statistica, 1957, 17, № 2, 261—280 (итал.)

4953. Некоторые экспериментальные планы, полезные при переходе от одной последовательности факторов к другой. Ч. I. Фриман (Some experimental designs of use in changing from one set of treatments to another. Part 1. Freeman G. H.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, B19, № 1, 154—162 (англ.)

Дается описание различных планов, полезных при переходе от одной последовательности факторов к другой. Большинство из этих планов хорошо известно; среди них выделяется один, который включает новые факторы, частично сбалансированные относительно блоков и начальных факторов, и который ранее не был описан вообще. Для этого плана дается анализ дисперсии разности и доказывается одна лемма, полезная для вычисления дисперсии разности факторов. Приводится также анализ ковариации и показана законность рассматриваемого плана. В заключение автор приводит пример, иллюстрирующий вычисление параметров данного плана. М. К. Камалов

4954. Планирование и сравнение некоторых дихотомических экспериментов. Брадт, Карлин (On the design and comparison of certain dichotomous experiments. Bradt Russell N., Karlin Samuel), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 309—409 (англ.)

Планирование экспериментов определяется как способ составления случайной величины X по выборочным значениям, сопряженный, вообще говоря, с потерей некоторой информации относительно выборки

Дихотомия состоит в выборе между двумя гипотезами H_1 и H_2 относительно генеральной совокупности. Различные гипотезы приводят к различным распределениям X. При наличии двух экспериментов, приводящих к двум случайным величинам X и Y, параметры задачи удобно разместить по следующей схеме

		X	Y
ξ	H_1	f_1	g_1
$1-\xi$	H_2	f_2	g_2,

где ξ и $1-\xi$ — априорные вероятности гипотез, а f_1, f_2, g_1 и g_2 — плотности вероятности X и Y при различных гипотезах H_1 и H_2.

Эксперимент, приводящий к X, характеризуется бейессовским риском

$$R_X(\xi) = \xi \int_{f_2(x)/f_1(x) > \xi/(1-\xi)} f_1(x)\, d\psi(x) + (1-\xi) \int_{f_2(x)/f_1(x) \leqslant \xi/(1-\xi)} f_2(x)\, d\psi(x),$$

либо так называемым информационным числом Кульбаха-Лайблера (К-Л числом)

$$I_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\xi f_1(x) \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + (1-\xi) f_2(x) \log \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right] d\psi(x),$$

где $\psi(x)$ — некоторая мера.

Аналогично определяются $R_Y(\xi)$ и $I_Y(\xi)$ для Y. Если $R_X(\xi) \leqslant R_Y(\xi)$, чему, как показано в работе, соответствует $I_X(\xi) \geqslant I_Y(\xi)$ (для всех ξ), то предпочтение отдается эксперименту, основанному на X, перед экспериментом, основанном на Y. Формулируются условия, налагаемые непосредственно на распределения f_i и g_i ($i = 1, 2$), при которых выполняются неравенства, указанные выше.

В частности, для того чтобы $R_X(\xi) = R_Y(\xi)$, необходимо и достаточно, чтобы случайные величины $f_2(X)/f_1(X)$ и $g_2(Y)/g_1(Y)$ имели одни и те же рас-

пределения как в случае верности гипотезы H_1, так и в случае верности гипотезы H_2.

Отдельно рассматривается случай нормального и биномиального задания вероятностей f_i и g_i $(i=1, 2)$.

В последнем случае рассматривается последовательное планирование эксперимента и дается связь между К-Л информационными числами с средним числом наблюдений до окончательного принятия решения.

Б. С. Флейшман

4955. **Систематический метод нахождения определяющих контрастов. Холловей** (A systematic method of finding defining contrasts. Holloway Clark, Jr), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 277, 46—52 (англ.)

Рассматриваются факториальные планы эксперимента, в которых каждая из имеющихся n величин может иметь два уровня, так что требуется осуществить 2^n групп экспериментов со всеми комбинациями факторов. Если пренебречь информацией о взаимодействиях высокого порядка, то можно сократить объем эксперимента и говорить, например, о 2^{n-p} факториальном эксперименте. При этом происходит смешивание эффектов и взаимодействий факторов. Автор предлагает метод построения плана эксперимента, позволяющий добиться того, чтобы указанное смешивание ограничивалось только пренебрежимыми взаимодействиями и взаимодействиями высокого порядка. В. В. Петров

4956. **О решении уравнений оценок для усеченных и цензурированных выборок из нормальных совокупностей. Коэн** (On the solution of estimating equations for truncated and censored samples from normal populations. Cohen A. Clifford, Jr), Biometrika, 1957, 44, № 1-2, 255—235 (англ.)

Для вычисления оценок методом максимального правдоподобия для среднего и стандартного отклонения нормально распределенной совокупности по двусторонне усеченным или дважды цензурированным выборам необходимо решить одновременно пару довольно сложных нелинейных уравнений, определяющих оценки. Хотя решения и можно получить приближенно, посредством прямых итерационных процедур, вычисления часто становятся длинными и требующими много времени. Рассматривается вопрос об уменьшении вычислительного труда, требуемого для получения этих решений.

Из резюме автора

4957. **Применение сопутствующей переменной в выборе экспериментального плана. Кокс** (The use of a concomitant variable in selecting an experimental design. Cox D. R.), Biometrika, 1957, 44, № 1—2, 150—158 (англ.)

4958. **Быстрый анализ таблиц из 2×2 клеток. Бросс, Кастен** (Rapid analysis of 2×2 tables. Bross Irwin D. J., Kasten Ethel L.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 277, 18-28 (англ.)

Обычный способ анализа таблиц из 2×2 клеток при помощи критерия χ^2 заменяется применением номограмм. При условиях, в большинстве случаев, имеющих место на практике, построены номограммы критических значений для различных уровней вероятности, описан способ употребления этих номограмм и приведены примеры. А. К. Митропольский

4959. **Точные выражения для таблиц взаимной сопряженности, вычисляемые при помощи биномиальных коэффициентов. Сакода, Коэн** (Exact probabilities for contingency tables using binomial coefficients. Sakoda James M., Cohen Burton H.), Psychometrika, 1957, 22, № 1, 83—86 (англ.)

Рассматривается таблица из 2×2 клеток с частотами a, b, c, d. В предположении независимости точная вероятность p определенных значений a, b, c, d, дающих итоги $(a+b)$, $(c+d)$, $(a+c)$, $(b+d)$, может быть выражена или при помощи факториалов, или же при помощи биномиальных коэффициентов.

Аналогичная формула дана также для случая таблицы из $r\times 2$ клеток. Приложена таблица биномиальных коэффициентов C_n^r для n от 1 до 60.

А. К. Митропольский

4960. **Анализ неполных блоков. Зилен** (The (analysis of incomplete block designs. Zelen Marvin), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 278, 204—217 (англ.)

При обычных предположениях относительно получения внутриблочной информации может существовать два независимых критерия по отношению дисперсий для испытания каждой нулевой гипотезы, относящейся к способам обработки. Предлагается метод для комбинирования двух независимых критериев и дается пример, показывающий выигрыш в мощности при применении второго критерия. Даны точные доверительные пределы для отношения внутриблочной дисперсии к междублочной дисперсии. Резюме автора

4961. **Примеры внутриблочного анализа для факторов в планах делимых на группы, частично уравновешенных, неполных блоков. Креймер, Брэдли** (Examples of intra-block analysis for factorials in group divisible, partially balanced, incomplete block designs. Kramer Clyde Young, Bradley Ralph Allan), Biometrics, 1957, 13, № 2, 197—224 (англ.)

4962. **Планы экспериментов в неполных блоках и метод сравнений собранных наблюдений. Кузимано** (I piani di sperimentazione con blocchi incompleti ed il metodo dei confronti fra osservazioni accoppiate. Cusimano Giovanni), Statistica, 1957, 17, № 3, 443—481 (итал.)

4963. **Построение неполных частично уравновешенных блоков с $s+1$ ассоциированными классами. Лафон** (Construction de blocs incomplets partiellement équilibrés à $s+1$ classes associées. Lafon Monique), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 13, 1714—1717 (франц.)

4964. **Свойство расширения класса уравновешенных неполных блоков. Силлитто** (An extension property of a class of balanced incomplete block designs. Sillitto G. P.), Biometrika, 1957, 44, № 1-2, 278—279 (англ.)

4965. **Границы отношения размаха к стандартному отклонению. Томсон** (Bounds for the ratio of range to standard deviation. Thomson George W.), Biometrika, 1955, 42, № 1-2, 268—269 (англ.)

Делаются некоторые очевидные замечания относительно границ отношения размаха к стандартному отклонению. Приводятся таблицы этих границ для выборок различного объема из нормальной совокупности и процентных точек распределения указанной величины для выборок объема 3 из нормальной совокупности. А. А. Петров

4966. **Оценки по цензурированным двумерным выборкам. Бхаттачария** (Estimation from censored bivariate samples. Bhattacharyya M. N.), J. Indian Soc. Agric. Statist., 1954, 6, № 1, 83—92 (англ.)

Автор получает уравнения максимального правдоподобия для оценки средних и стандартных отклонений некоррелированного двумерного распределения, когда выборка имеет известные точки усечения с обеих сторон обеих переменных. (До сих пор был рассмотрен случай, когда только одна из переменных усечена. См. РЖМат, 1954, 5685). Для решения этих уравнений автор строит итеративный процесс, используя таблицы

ординат и площадей. Так же дана информационная матрица, из которой могут быть получены асимптотические дисперсии и ковариации. Результаты иллюстрируются частным примером. I. Vincze

4967. **О выборе с вероятностями, пропорциональными размеру.** Дес Радж (On sampling with probabilities proportionate to size. Des Raj), Ganita, 1954, 5, № 2, 175—182 (англ.)

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_N$ — конечная генеральная совокупность, элементы которой характеризуются двумя размерами x и y. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — наблюденные посредством простого случайного выбора значения размера y. Предполагая значения размера $x — X_1, X_2, \ldots, X_N$ — известными, автор сравнивает оценки среднего значения величины y $\hat{Y} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ и $\hat{Y}' = (Nn)^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i/p_i$, где $p_i = X_i/X$ и $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, по величине выборочной дисперсии и математическому ожиданию выборочной дисперсии и устанавливает условия, при которых $\hat{Y}'$ лучше, чем $\hat{Y}$.

Н. П. Слободенюк

4968. **Кумулянты выборочного среднего из конечной генеральной совокупности первых n целых чисел.** Беннетт (The cumulants of a sample mean from a finite population of first N. integers. Bennett B. M.), Trab. estadist., 1955, 6, № 1, 31—32 (англ.; рез. исп.)

4969. **План выборочного контроля по количественному признаку.** Либерман, Резников (Sampling plans for inspection by variables. Lieberman Gerald, Resnikoff George J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, 50, № 270, 457—516 (англ.)

Подробно излагается процедура контроля по количественному признаку, когда измеряемый параметр имеет нормальное распределение. Разбираются три случая: 1) дисперсия известна (используется статистика $\bar{x}$), 2) дисперсия неизвестна (используются статистики $\bar{x}$, S), 3) дисперсия неизвестна (используются $\bar{x}$ и средний размах по подвыборкам). В первых двух случаях строятся несмещенные оценки $\hat{p}$ для доли брака в партии изделий, зависящие от достаточных статистик $\bar{x}$ или $\bar{x}$, S в выборке. Если $\hat{p}$ не превышает некоторой границы, то партия принимается, а если превышает, то бракуется. В третьем случае используется аппроксимация распределения размаха χ-распределением с соответствующим числом степеней свободы. Даны практические рецепты составления плана контроля. Статья снабжена большим количеством таблиц и графиков оперативных характеристик. Основной теоретический результат статьи (вычисление несмещенной оценки $\hat{p}$) содержится в статье А. Н. Колмогорова (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1950, **14**, 303—326). Б. А. Севастьянов

4970. **Последовательные процедуры для отбора лучшей экспоненциальной совокупности.** Собел (Sequential procedures for selecting the best exponential population. Sobel Milton), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 5. Berkeley—Los Angeles, 1956, 99—110 (англ.)

Предполагается, что имеется k совокупностей Π_i $(i = 1, \ldots, k)$ таких, что продолжительность жизни объектов, взятых из каждой совокупности Π_i, распределяется согласно замедленной экспоненциальной вероятностной плотности

$$f(x;\ A_i,\ \mu_i) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i}\, e^{-(x-A_i)/\mu_i} & \text{для } x \geqslant A_i \\ 0 & \text{для } x < A_i \end{cases}$$

где параметр $A_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ обозначает темп замедления и шкала параметров μ_i неизвестна.

В работе при различных предположениях относительно A_i даются последовательные правила отбора совокупности Π_i с наибольшим математическим ожиданием продолжительности жизни. Р. Х. Дивеев

4971. **Среднее последовательных разностей в выборках для экспоненциальной популяции.** Мур (The mean successive difference in samples from an exponential population. Moore P. G.), Trab. estadist., 1955, 6, № 2, 133—141 (англ.; рез. исп.)

Автор изучает статистику

$$d = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$$

в случае экспоненциальной популяции, используя метод Камата, примененный им для случая нормального распределения (РЖМат, 1954, 1733). Так как невозможно найти функцию распределения статистики, применяются семиинварианты, с помощью которых доказывается, что для достаточно больших показателей распределение статистики d приближается к нормальному. Указываются достоинства и недостатки и перечисляются некоторые критерии, которые имеют здесь место. Резюме автора

4972 К. **Разрешающие процедуры: экспериментальный подход.** Дейвидсон, Сапс (Decision making: an experimental approach. Davidson Donald, Suppes Patrick. With collab. of Siegel Sidney. Stanford (Calif.), Stanford Univ. Press; London, Oxford Univ. Press, 1957, 9, 121 pp., ill., 26 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 403, 8 (англ.)

4973 К. **Таблица нецентрального t-распределения: функция плотности, интегральная функция распределения и процентные точки.** Резников, Либерман (Table of non-central t-distribution: density function, cumulative distribution function and percentage points. Resnikoff George J., Lieberman Gerald J. Stanford (Calif.), Univ. Press; London, Oxford Univ. Press, 1957, [9], 389 pp., ill., 5 £.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 404, 9 (англ.)

4974 К. **Статистическая теория: взаимоотношение между вероятностью, правдоподобием и ошибкой, и исследование современного кризиса в статистической теории с точки зрения теории поведения.** Хогбен (Statistical theory: the relationship of probability, credibility and error; and examination of the contemporary crisis in statistical theory from a behaviour viewpoint. Hogben Lancelot Thomas. London, Allen and Unwin, 1957, 511 pp., ill., 45 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 403, 8 (англ.)

4975 К. **Симпозиум по спектральному исследованию временных рядов** (Symposium on Spectral Approach to Time Series. Held bef. Res. Sec. Roy. Statist. Soc. Nov. 7th, 1956. J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 1, 1—63) (англ.)

4976 Д. **Использование теории информации в статистических приложениях.** Шютценбергер (Contrubution aux applications statistiques de la théorie de l'information. Schützenberger Marcel-Paul.—Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris, 1953, Paris Inst. statist. Univ., 1953, 116 p.) (франц.)

Тезисы охватывают три главы докторской диссертации. Первая глава носит вспомогательный алгебраический характер. Вторая глава посвящена собственно теории информации. Последняя сводится в диссертации к обобщенной трактовке понятия информации, охватывающего кроме шенноновского также и харак-

терное фишеровское выражение оценки параметров распределения. Третья глава посвящена приложениям в математической статистике (выбор между гипотезами, теория оценок, теория решающих функций) и более конкретным приложениям в теории выборочного контроля, генетики и пр. Б. С. Флейшман

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

4977. **Игры на компактном множестве. Пек, Далмидж** (Games on a compact set. Peck J. E. L., Dulmage A. L.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 3, 450—458 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $\tilde{X}$ — выпуклое подмножество вещественного линейного пространства, Y — произвольное подмножество вещественного линейного пространства, $\tilde{Y}$ — выпуклая оболочка Y, а f — вещественная функция, определенная на $\tilde{X} \times \tilde{Y}$, выпуклая по $x \in \tilde{X}$ и вогнутая по $y \in \tilde{Y}$; тогда, если $\tilde{X}$ компактно в топологии, в которой при каждом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ является полунепрерывной сверху по x, то

$$\sup_{x \in \tilde{X}} \inf_{y \in Y} f(x, y) \geqslant \inf_{y \in \tilde{Y}} \sup_{x \in \tilde{X}} f(x, y).$$

Эта теорема обобщает результаты Кнезера (Knezer H., C. r. Acad. sci., 1952, 234, 2418—2420) и Никайдо (РЖМат, 1954, 4487). Н. Н. Воробьев

4978. **Возможная мотивировка для формализованного понятия обороны. Уолш** (Possible motivation for a stated concept of defense. Walsh John E.), Operat. Res., 1957, 5, № 3, 442—445 (англ.)

Доказывается теорема о том, что при некоторых предположениях (скорее политического, чем математического характера) величина $P(ud)$ — вероятность того, что стратегическая атака некоторого противника нанесет США недопустимый ущерб, — будет минимальный, если использовать такую систему обороны, которая максимизирует величину $E(ud)$ — средний ущерб, наносимый противнику ответным ударом США.

И. А. Ибрагимов

4979. **Условия существования для конечных и бесконечных систем линейных неравенств. Фань-Цюй** (Consistency conditions for finite and infinite systems of linear inequalities. Fan Ky), Proc. 2nd Sympos. Linear Programm. Washington, 1955, Vol. 2. s. a., 603—606 (англ.)

Приводятся без доказательства четыре теоремы существования решений линейных неравенств для случаев одномерного, нормированного линейного, n-мерного евклидова, или гильбертова, и линейного топологического пространств. О. Г. Фаянс

4980. **Дополнительная библиография по линейному программированию. Уагнер** (A supplementary bibliography on linear programming. Wagner Harvey M.), Operat. Res., 1957, 5, № 4, 555—563 (англ.)

Библиография, дополняющая список Виргинии Род (РЖМат, 1957, 8109), содержит 193 названия. В библиографию включены статьи не только по линейному программированию, но и по родственным вопросам (например 12 статей Р. Беллмана по динамическому программированию). Указаны источники библиографии по ряду смежных вопросов. Н. В. Романовский

4981. **Техника решения задачи о назначениях. Фридман, Яспан** (The assignment problem technique. Friedman Lawrence, Yaspan Arthur J.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, 4, № 3, 193—197 (англ.)

Излагаются без обоснования точный и приближенный методы решения задачи о нахождении

$$\min_{x_{ij}} \left(\sum_{i=1,\, j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,$$

где $c_{ij} (\geqslant 0)$ известны. С. С. Кислицын

4982. **Как решать задачи линейного программирования. Гофман** (How to solve a linear programming problem. Hoffman A. J.), Proc. 2nd Sympos. Linear Programm. Washington, 1955, Vol 2. s. a., 397—424 (англ.)

Рассматриваются и сравниваются различные методы решения задач линейного программирования с точки зрения применения современных электронных вычислительных машин.

При сравнении итеративного и симплекс-метода анализировались следующие особенности задач: 1) большое число связанных с задачей уравнений или неравенств; 2) малое число отличных от нуля элементов матрицы; 3) треугольно-блочная форма матрицы; 4) несущественный характер большей части ограничений, налагаемых на решения.

Рассматривались отдельные частные приемы (использование двойственного характера проблем, параметрическая минимизация и др.). О. Г. Фаянс

4983. **Применения линейного программирования в военном деле. Джейкобс** (Military applications of linear programming. Jacobs Walter), Proc. 2 Sympos. Linear Programm., 1955, 1, 1—27 (англ.)

Обзор тех военных проблем, которые могут быть исследованы с помощью техники линейного программирования. Рассматриваются следующие, имеющие военные приложения направления: теоретико-игровые модели (в частности, игры двух лиц); модели транспортного типа, «задачи с узким местом», задачи, связанные с расписанием. И. А. Ибрагимов

4984. **Линейное программирование и экономическая теория. Самюэлсон** (Linear programming and economic theory. Samuelson Paul A.), Proc. 2 Sympos. Linear Programm., 1955, 1, 251—272 (англ.)

Рекламируется взаимная связь между линейными программированием и экономическими задачами. Приводятся примеры необходимости и возможности сведения экономических задач к задачам линейного программирования. О. Г. Фаянс

4985. **Приобретение и размещение морского электронного оборудования. Судзуки** (Procurement and allocation of naval electronic equipments. Suzuki George), Naval Res. Logist. Quart., 1957, 4, № 1, 1—7 (англ.)

Рассматриваемый вопрос сводится к нахождению $x_{ij} \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = \max, \quad \sum_j x_{ij} \leqslant a_i + y_i,$$

$$\sum_i x_{ij} \leqslant b_j, \quad \sum_i p_i y_i \leqslant M,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Даются рекомендации по подбору искомых величин для некоторых частных случаев, основанные на интуитивных и качественных представлениях. О. Г. Фаянс

4986. **Заметки по контролируемым процессам — I. О минимуме максимального отклонения. Беллман** (Notes on control processes. I. On the minimum o

maximum deviation. Bellman Richard), Quart. Appl. Math., 1957, 14, № 4, 419—423 (англ.)

Техника функционального уравнения теории динамического программирования прилагается к задаче отыскания минимума максимального отклонения системы от предписанного состояния.

Математически это сводится в определенных случаях к нахождению подчиненного некоторым ограничениям вектора y так, чтобы минимизировать $J(y) = \mathrm{Max}_{0 \leqslant t \leqslant T} \| x - z \|$, где $dx/dt = \Phi(x, y)$, $x(0) = c$.

Резюме автора

4987. Рассмотрение задачи о поставщике с точки зрения динамического программирования. I. Беллман (On a dynamic programming approach to the caterer problem. — 1. Bellman Richard), Manag. Sci., 1957, 3, № 3, 270—273 (англ.)

Задача о поставщике (с заданным запасом салфеток) приводится к задаче отыскания максимума линейной формы

$$L_n(v) = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

при условиях

$$r_i \geqslant v_i \geqslant 0, \quad v_1 \leqslant b_1,$$

$$v_1 + v_2 \leqslant b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_k \leqslant b_k,$$

$$v_2 + v_3 + \ldots + v_{k+1} \leqslant b_{k+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_{n-k+1} + \ldots + v_n \leqslant b_n.$$

Эта последняя задача приводится к решению методом динамического программирования; строится вспомогательная задача, для решения которой даны рекуррентные формулы. Для случая $k = 2$ оптимальный образ действий в решении вспомогательных задач приведен в явном виде. И. В. Романовский

4988. Структура моделей динамического программирования. Карлин (The structure of dynamic programing models. Karlin Samuel), Naval Res. Logist. Quart., 1955, 2, № 4, 285—294 (англ.)

Рассматривается вопрос об основных составляющих элементах любой детерминистической или стохастической модели динамического программирования.

И. В. Романовский

4989. «Непрерывное» программирование. Бернстейн («Continuous» programming. Bernstein C. Econ. activity analysis. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1954, 383—390) (англ.)

4990. Количественное изучение поведения потребителей. Тейл (The measurement of consumers, behaviour. Theil H.), Rev. Inst. internat. statist., 1955, 23, № 1-3, 36—46 (англ.; рез. франц.)

Обзорная статья по книге Стоуна «Количественное изучение расходов и поведения потребителей в Соединенном Королевстве» (Stone R., The measurement of consumers' expenditure and behaviour in the United Kingdom, 1920—1938, I, London, Cambridge Univ. Press, 1954, XL+448 p.).

В книге рассмотрены следующие вопросы: оценка переменных факторов, экономическая теория спроса, статистические проблемы в эконометрике, эмпирические модели поведения потребителей. Автор оценивает рецензируемую книгу как существенный вклад в эконометрику. А. А. Корбут

4991. Оптимальный уровень средств производства при переменном использовании. Бурр (The optimal capacity of a means of production that is subject to variable employment. Burg A. R. van der), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 401—403 (англ.)

Определяется наиболее выгодный объем производства (например, электроэнергии) при условии, что известна функция распределения спроса, а стоимость любой единицы, произведенной дополнительно, увеличивается на одну и ту же величину по сравнению с нормальной. С. С. Кислицын

4992. Местное производство и потребление: задачи о местных различиях в цене и технологии. Дель-Пунта (Input-output regionale: i problemi delle differenze regionali nei prezzi e nelle tecniche di produzione. Del Punta Veniero), Riv. polit. econ., 1957, 47, № 1-2, 87—106 (итал.)

Страна подразделяется на ряд областей. Известны: матрица технологических коэффициентов для страны; количества и цены на продукцию, производящуюся в каждой области. Решается задача нахождения матриц технологических коэффициентов для областей в случае, когда между областями нет разницы в технологии, а только есть разница в ценах на продукцию. С. С. Кислицын

4993. Парадокс Жифена. Феррейра-Муртейра, Амару-ди-Матуш (On Giffen's paradox. Ferreira Murteira Bento Jose, Amaro De Matós Antonio. Trabalhos semin. econometria. Lisbon, Publ. Centro Estudos Econ., 1953, 167—185) (порт.)

4994. Исследование операций в действии. Применение математических методов в процессе производства (On-the-job operations research. The translation of mathematical methods into practical procedures), Manag. Operat. Res. Digest, 1956, 1, № 2, 16—17 (англ.)

Объявление о начале работы учебного семинара института исследования операций. Семинар будет изучать задачи исследования операций в производстве, математическую технику решения этих задач, как уже хорошо зарекомендовавшую себя (теория выборок, статистический анализ, линейное программирование и др.), так и новую технику, которая подает надежды на применение в близком будущем (теория игр, теория решений, методы Монте-Карло).

И. В. Романовский

4995. Теория игр, линейное программирование и анализ потребления производства. Тинтнер (Game theory, linear programming and input-output analysis. Tintnet Gerhard), Z. Nationalökon., 1957, 17, № 1, 1—38 (англ.)

Вегло разъясняется содержание задач теории матричных игр, линейного программирования и некоторых схем анализа потребления-производства, а также различных их приложений (например, транспортная проблема, стохастическое линейное программирование и особенно теория производства). Иногда упоминаются методы решения. Обращается внимание на экономические аспекты; все численные примеры касаются экономических вопросов. Библ. 100 назв.

О. В. Шалаевский

4996. Индекс цен и поверхности безразличия. Мальмквист (Index numbers and indifference surfaces. Malmquist Sten), Trabajos Estadistica, 1953, 4, 209—242 (англ.; рез. исп.)

Свободный обзор, пояснения и развитие теории индексов стоимости жизни, основы которой были положены Конюсом, Фришем, Руа, Штэле, Лернером и другими. В одном из разделов рассматриваются так называемые индексы Дивизиа и показывается, что только в очень специальном случае изменения цен и количеств товаров во времени индекс Дивизиа совпадает с «истинным» индексом стоимости жизни. Автор

опирается в значительной степени на понятие поверхностей без различия цен, введенное Хотелингом и развитое в дальнейшем Руа [Понятие поверхности безразличия, образованной отношениями цен, было рассмотрено впервые в 1926 г. в статье С. С. Бюшгенса и А. А. Конюса «К проблеме измерения покупательной силы денег» (Вопросы конъюнктуры, 1926, 11, стр. 157). *Ред.*]; они представляют собою геометрические места цен (относительных), при которых стремящийся к максимуму потребитель способен в точности достигнуть заданный уровень удовлетворения потребностей. Это приводит к простой характеристике индекса цен: пусть P_0 и P_1 будут сравниваемыми векторами цен. Пусть α будет таким скаляром, что αP_1 явится безразличным с P_0. Тогда индекс цен для периода 1 с базой в периоде 0, относящийся к реальному уровню дохода периода 0, будет $1/\alpha$. Аналогичные соображения приводят к неравенствам Штэле и другим, образующим границы индекса цен. Аналогичный индекс определяется в пространстве товаров, причем показывается, что частично свойство обратимости факторов удовлетворяется индексами цен и количеств. Далее автор рассматривает положение, когда потребление некоторых товаров эффективно нормируется. Одним из выводов является следующий: Если рационы одинаковы в 0 и 1 периодах и потребитель выкупает весь свой рацион, то неравенства Штэле все еще справедливы, несмотря даже на то, что потребленные количества не представляют максимального бюджета в обычном смысле. Доказываются также другие неравенства. Вывод теоремы 1 следует читать так: $I_{01}(\mu_0) = 0D/0C$. R. Solow
Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 638—639.

4997. **Сети связи и перевозка. Калаба, Хункоса** (Communication-transportation networks. Kalaba R. E., Juncosa M. L.), Naval Rec. Logist. Quart., 1957, 4, № 3, 221—222 (англ.)

Авторы подчеркивают сходство между задачами о коммуникационных и транспортных сетях. Работа посвящена технике решения этих задач, к которой относятся: 1) теория очередей, 2) применение быстродействующих счетных машин, 3) линейное программирование, 4) теория графов, 5) булевы алгебры, 6) динамическое программирование. И. В. Романовский

4998. **Ланчестеровские типы моделей сражения. Уэйсс** (Lanchester-type models of warfare. Weiss Herbert K.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 79—96 (англ.)

Распространение дифференциальных уравнений Ланчестера (Morse P. M., Kimball G. E., Methods of Operations Research, John Wiley and Sons, Inc., 1951, стр. 148) в следующих направлениях: 1) относительное перемещение сражающихся сторон; 2) бой между малыми боевыми группами в условиях применения оружия большой эффективности; 3) бой между силами неоднородного состава (например, одновременное участие в сражении пехоты, танков, авиации и т. д.). И. А. Ибрагимов

4999. **Задача оптимальной загрузки машин. Салвесон** (A problem in optimal machine loading. Salveson M. E.), Manag. Sci., 1956, 2, № 3, 232—260 (англ.)

Эффективно решается задача об оптимальном количестве и оптимальном ассортименте продуктов, которые можно произвести при заданном объеме оборудования, а также об оптимальном запасе на входной стадии производственного процесса. А. А. Корбут

5000. **Помещение в склады и распределение сезонной продукции. Джуэлл** (Warehousing and distribution of a seasonal product. Jewell Wn. S.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, 4, № 1, 29-34 (англ.)

В общем виде изложены постановка задачи и опыт использования электронного вычислителя применительно к проблеме планирования производства продукции, спрос на которую резко изменяется во времени. Приведены также характеристики электронного вычислителя. О. Г. Фаянс

5001. **Распределение сезонных запасов Гавайской ананасной компании. Игл** (Distribution of seasonal inventory of the Hawaiian Pineapple Company. Eagle Alan R.), Operat. Res., 1957, 5, № 3, 382—396 (англ.)

5002. **Замечание к работе Клейна «Прямое использование экстремальных принципов при решении некоторых задач с неравенствами». Данциг** (Note on Klein's «Direct use of extremal principles in solving certain problems involving inequalities». Dantzig George B.), Operat. Res., 1956, 4, № 2, 247—249 (англ.)

Показывается, что предлагаемое Клейном (Klein B., Operat. Res., 1955, 3, 168, 548) решение задач линейного программирования при помощи лагранжевых множителей не является новым и (за исключением простейших случаев) связано со значительно большим объемом вычислений, чем при применении других методов. Г. Ш. Рубинштейн

5003 К. **Эксперимент и большая шкала вычислений в экономике. Моргенстерн** (Experiment and large scale computation in economics. Morgenstern Oskar. Econ. activity analysis. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd., 1954, 483—549) (англ.)

5004 К. **Приложение в экономике работы Ботта и Мейберри «Матрицы и деревья». Уайтин** (An economic application of «Matrices and trees». Whitin T. M. Econ. activity analysis. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, 1954, Chapman and Hall, Ltd., 401—408 (англ.)

См. РЖМат, 1958, 1930 К.

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

5005. **О статистике и теории вероятностей. Хеберли** (Ueber Statistik und Wahrscheinlich-keitsrechnung. Häberli E.), Chem. Rundschau, 1957, 10, № 18, 393—395 (нем.)

Краткий обзор современных приложений исчисления вероятностей и математической статистики к проверке гипотез, планированию и анализу экспериментов, контролю производства и т. п. Многие формулировки автора (например, относительно доверительных пределов) неточны. Н. В. Смирнов

5006. **Новая формула индексов. Стьювел** (A new index number formula. Stuvel G.), Econometrica, 1957, 25, № 1, 123—131 (англ.)

5007. **Мощность R-диаграммы. Симада** (Power of R-chart. Shimada Shozo), Rept. Statist. Appl. Res. Union Jap. Sci. Eng., 1954, 3, 7074 (англ.)

5008. **О некоторых функционалах на случайных полях. Хусу А. П.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 37—45, 208 (рез. англ.)

Рассматривается вещественное нормальное случайное поле $u(x, y)$, заданное в квадрате со стороной T со средним нуль $Eu(x, y) = 0$ и непрерывной корреляционной функцией $B(\tau_1, \tau_2) = Eu(x, y)\, u(x+\tau_1, x+\tau_2)$. Разыскиваются соотношения, связывающие величины:

$$1)\ H_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T u^2(x, y)\, dxdy}\ ;$$

2) $H_{ca} = \sqrt{\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T |u(x, y)|\,dxdy}$;

3) Суммарную площадь $S(v)$ кусков, вырезаемых поверхностью $u(x, y)$ на горизонтальной плоскости, на высоте v от плоскости x, y;

4) Суммарный объем $Q(v)$ частей, ограниченных указанной плоскостью и поверхностью $u(x, y)$.

Для случая однородного изотропного поля выводятся выражения для $ES(v)$, $E(S^2)$, $EQ(v)$ и $D(Q)$ (дисперсия Q), в частности

$$ES(v) = \left[1 - \Phi\left(\frac{v}{\sqrt{B(0, 0)}}\right)\right] T^2,$$

$$EQ(v) = T^2 \int_v^\infty \left[1 - \Phi\left(\frac{v}{\sqrt{B(0)}}\right)\right] dv_1$$

и $E H_{ca} \approx 0{,}8\ H_{ск}$.

Доказано, что $Eu(x, y)$ однородных изотропных случайных полей можно вычислять осреднением не по площади, а по какому-либо сечению поля.

Обсуждаются некоторые обобщения полученных результатов на неизотропные поля. В. П. Швальб

5009. **О правиле дуализма относительно вероятностных пределов Байеса ошибки частоты. Шаркади** (A selejt arány Bayes-féle valòszínűségi határaira vonatkozó dualitási elvről. Sarkadi Károly), Magyar tud. akad. alkalm. mat. kőzl., 1953, 2, 275—286 (венгр.; рез. русс., англ.)

Относительно «правила дуализма» Одерфельда (Oderfeld J., Statystyczny odbiór towarow klasyfikowanych wedlug alternatywy, Warszawa, 1950) в приемочном контроле показывается, что в этом случае правило Бейеса дает почти такой же результат, как и метод доверительных пределов. Автор обобщает это «правило дуализма» на случаи гипергеометрического, полигипергеометрического, полиномиального и пуассоновского распределения. Ö. Éltetö

5010. **Ошибки ответов и выоорочный план. Хаяси** (Response errors and sampling design. Hayashi Chikio), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1957, 5, № 1, 11—26 (японск.; рез. англ.)

5011. **Оценка остаточных дисперсий испытательных отметок. Китс** (Estimation of error variances of test scores. Keats John A.), Psychometrika, 1957, 22, № 1, 29—41 (англ.)

Указывается, что представление совокупности экспериментальных отметок n-мерной точкой приводит к оценке остаточной дисперсии в частных уровнях отметок в случае эквивалентных последовательностей. Для случая неэквивалентных последовательностей даются различные приближения. Эти приближения сравниваются с заранее известными удовлетворительными результатами. (Все образцы с одними и теми же отметками считаются эквивалентными). М. К. Камалов

5012. **Теория анализа образцов для предсказания количественного признака. Льюбин, Осберн** (A theory of pattern analysis for the prediction of a quantitative criterion. Lubin Ardie, Osburn Hobart G.), Psychometrika, 1957, 22, № 1, 63—73 (англ.)

Авторы рассматривают метод анализа образцов для случая раздвоенных последовательностей количественного признака. Приводится способ составления «образной шкалы» в виде полиномиальной функции от последовательностей отметок и указывается анализ дисперсии для испытания существенности линейной и нелинейной связи между количественными признаками и последовательностью отметок. М. К. Камалов

5013. **Общая форма критерия сложения. Николсон** (The general form of the adding-up criterion. Nicholson J. L.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, A120, № 1, 84—85 (англ.)

Пусть $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = X$. Рассматриваются уравнения регрессии для x_r ($r = 1, 2, \ldots, n$) и X такого вида:

$$x'_r = a_r\varphi_1 + b_r\varphi_2 + \ldots + k_r\varphi_k \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

$$X' = A\varphi_1 + B\varphi_2 + \ldots + K\varphi_k.$$

Здесь $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — «независимые» переменные, a_r, b_r,... ..., k_r, A, B, ..., K — коэффициенты регрессии, x'_r и X' — приближенные значения x_r и X, найденные по уравнениям регрессии, построенном по методу наименьших квадратов.

Показано, что в этом случае значения соответствующих коэффициентов регрессии удовлетворяют соотношениям

$$\sum_r a_r = A; \quad \sum_r b_r = B; \quad \ldots; \quad \sum_r k_r = K,$$

так что всегда $\sum_r x'_r = X'$.

Автор указывает на некоторые применения этого свойства коэффициентов регрессии к вопросам промышленности. Б. Н. Гартштейн

5014. **Принципы планирования экспериментов. Браунли** (The principles of experimental design. Brownlee K. A.), Industr. Quality Control, 1957, 13, № 8, 12—20

Первая часть посвящена классификации экспериментов по характеру, цели и способам обработки. Вторая часть содержит принципы планирования экспериментов, в которых превалирует один фактор. На числовом примере обработки отливок рассматриваются различные способы обработки эксперимента — способ рандомизированных блоков, латинские квадраты и т. п. Приводится оценка и сравнение различных планов.

В следующей части рассматривается анализ дисперсий, получаемых при различных способах обработки эксперимента. Статья завершается характеристикой экспериментов, в которых одновременно оценивается влияние нескольких факторов.

Изложение вопросов планирования экспериментов весьма ясное, а приведенные числовые примеры делают его особенно наглядным.

На русском языке аналогичный материал содержится в книге Хальда (реф.) и частично в книге автора «Статистические исследования в производстве», Изд-во ин. лит., 1949. А. М. Бендерский

5015. **Планирование эксперимента. Весссро** (Les plans d'expérience. Vessereau A.), Rev. Inst. franç. pétrole, 1957, 12, № 1, 77—85 (франц.)

Рассматриваются основные положения современной теории планирования эксперимента с применением ее в производственной технике. А. К. Митропольский

5016. **Основные вопросы теории резервирования. Бебиашвили Ш. Л.**, Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1956, № 2, 69—75

5017. **О резервировании. Бебиашвили Ш. Л.**, Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1956, № 10, 116—117

Находится вероятность повреждения системы, состоящей из k_0 рабочих и k резервных цепей, предназначаемых для восстановления нормальной работы в случае аварии какой-либо из рабочих цепей. Эта вероятность выражается через вероятности повреждения каждой из составляющих цепей. Допускается одновременное повреждение двух или большего числа

рабочих пеней (см. предыдущую работу автора — реф. 5016). Н. В. Смирнов

5018. **Вычисление резервов методом t-групп.** Еклин (Reserveberechnung nach t-Gruppen. Jecklin H.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, 57, № 1, 21—35 (нем.)

5019. **Приложение закона больших чисел к горной промышленности.** Матоушек (Application de la loi du grand nombre dans l'industrie minière. Matoušchek F.), Rev. matér. constr. et trav. publics, 1957, № 506, 318—326 (франц.; рез. англ.)

5020. **Опыты по ломке камня и определение энергопотребления, проведенные в Ужайском каменном карьере.** Арато (Beszámoló az uzsai kőbányában végzett kőtörési és energiamérési kiserletekről. Arató Mátyás), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 223—228 (венг.; рез. русск., нем.)

В работе решается следующая задача: как выбирать открытие щек дробилки для дробления с целью минимального расхода энергии в процессе толчения, предполагая, что породу, раздробленную на куски крупнее 65 *мм*, нужно отвести обратно на дробилку и подвергнуть вторичному дроблению. Резюме автора

5021. **Дробное повторение в индустриальном исследовании.** Даниэл (Fractional replication in industrial research. Daniel Cuthbert), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 5. Berkeley — Los Angeles, 1956, 87—98 (англ.)

Указывается на возможность постановки промышленных экспериментов по аналогии с сельскохозяйственными и подробно разбираются планы дробных повторений с двухфакторными взаимодействиями.

М. К. Камалов

5022. **Теория очередей, примененная к проблеме индустриального производства.** Романи (La teoria de las colas aplicada a un problema de produccion industrial. Romani José), Trab. estadist., 1955, 6, № 3, 253—261 (исп.)

5023. **О стохастических процессах, связанных с точными регистрирующими физическими приборами.** Такач (Bizonyos fizikai regisztráló berendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról. Takács Lajos), Magyar tud. mat. es fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 4, 571—587 (венг.)

5024. **Планы выборочной инспекции для непрерывного производства.** Судзуки (Sampling inspection plans for continuous production. Suzuki Yukio). Токэй сури кэнкюсё ихо. Proc. Inst. Statist. Math. 1957, 5, № 1, 66—72 (японск.; рез. англ.)

Со времени выхода в 1943 г. первой работы Доджа о плане выборочной инспекции для непрерывного производства многими авторами по этому вопросу были опубликованы различные работы.

Цель настоящей статьи — дать обзор этих работ и обсудить некоторые пункты их. Автор надеется, что эта статья может быть полезна для тех, кто интересуется этим вопросом. Резюме автора

5025. **Ошибки перечисления в исследованиях.** Гхош (Enumerational errors in surveys. Ghosh Birendranath), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, 7, № 26, 50—59 (англ).

5026. **Применение исчисления вероятностей и математической статистики в народном хозяйстве.** Буркхардт (Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik in der Wirtschaft. Burkhardt Felix), Ber. Tagung. Wahrscheinlichkeitsrechnung und math. Statistik, Berlin, 1954. Berlin, 1956, 65—72 (нем.)

Статья состоит из трех разделов. В первом из них автор дает краткий очерк современного состояния теории приемочного контроля промышленной продукции на основании работ Блэквелла, Гиршика, Халмоша, Колмогорова и Вальда (последовательная процедура). Во втором и третьем рассматриваются некоторые модели экономического равновесия между производством и потреблением и циркуляции народнохозяйственных товаров. Н. В. Смирнов

5027. **Некоторые замечания о факторах логистического планирования.** Вильямс (Some thoughts on logistic planning factors. Williams Ralph E., Jr), Naval Res. Logist. Quart., 1954, 1, № 3, 173—181 (англ.)

5028. **О рациональном планировании некоторых обычных статистических проб.** Фернандиш-Кошта (Sobre o planeamento racional de certos ensaios estatisticos correntes. Fernandes Costa M. A.), Tecnica, 1957, 31, № 271, 457—470 (порт.; рез. англ.)

5029. **Новые методы статистического контроля качества.** Одерфельд (Przeglad nowych metod statystycznej kontroli jakości. Oderfeld Jan), Normalizacja, 1957, 25, № 7—8, 323—326 (польск.)

5030. **Что такое статистический контроль?** Манайра (Che cos'è il controllo statistico? Manaira Mario), Ufficio mod., 1957, 31, № 8, 1271—1273; № 9, 1419—1421 (итал.)

5031. **О предельных распределениях, связанных с партионным обслуживанием очередей.** Даунтон (On limiting distributions arising in bulk service queues. Downton F.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, B18, № 2, 265—274 (англ.)

Партионное или групповое обслуживание очереди с объемом партии s и основные встречающиеся обозначения были описаны в РЖМат, 1955, 3879.

В настоящей работе изучается случай, когда объем партии неограниченно возрастает. Рассмотрение ведется в ситуации статистического равновесия, обеспечиваемого условием $\rho < 1$ ($E(v) = \rho s$, $\lambda = 1$). Исходным моментом являются функции $\Pi_s(t) = \Pi(1 - t/s)$ — производящая функция моментов распределения отношения q/s (q — длина очереди) — и $\gamma_s(t) = \gamma(t/s)$ — преобразование Лапласа распределения отношения w/s (w — время ожидания). Употребляя выражения для $\Pi(z)$ и $\gamma(t)$, полученные Бейли (см. указанный реферат) и автором (J. Roy. Statist. Soc., 1955, B 17, 256—261), можно перейти к пределу при $s \to \infty$, когда интервалы обслуживания имеют χ^2-распределение с 2ρ степенями свободы вида $dB(v) = \Gamma^{-1}(\rho)(\rho/\rho s)^{\rho v \rho - 1} \times \exp(-\rho v/\rho s)\,dv$ или когда они имеют постоянную длительность равную ρs. В обоих случаях $\Pi_\infty(t)$ — преобразование Лапласа предельного распределения для q/s, $s \to \infty$. Обычным путем из $\Pi_\infty(t)$ и $\gamma_\infty(t)$ легко определить предельные величины моментов распределений q/s и w/s. Основную роль в работе играют корни уравнения $\xi^\rho e^{\mu(1-\xi)/\rho} = 1$ внутри круга $|\xi| = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Решение этого уравнения или простых его преобразований необходимо и при рассмотрении других, очередных задач. Нужные корни предлагается получать из таблиц корней $\xi(\mu, \tau_i)$ уравнения $\xi e^{\mu(1-\xi)} = e^{2\pi i \eta}$, $\mu > 1$ и η — нецелое. Обсуждаются аналогии с решениями других задач, возникающие вследствие формальной эквивалентности ряда уравнений. Табулируются некоторые функционалы. О. В. Шалаевский

5032. **Обнаружение и выделение сигналов в шуме с точки зрения теории статистических решений (часть I).** Мидлтон, Ван-Митер (Detection and extraction of signals in noise from the point of view of statistical decision theory. I. Middleton David, Van Meter David), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, 3, № 4, 192—253 (англ.)

Работа посвящена задачам теории связи, сводящимся к выбору между гипотезами (обнаружение) и оценке параметров (выделение). Работа носит полуобзорный характер и формулирует и решает эти задачи в плане теории статистических решений А. Вальда. Специфика теории связи состоит в интерпретации пространства выборок теории статистических решений, как пространства «смеси» сигнала с шумом.

Вначале задача обнаружения сигнал-шум, а также вид взаимодействия последних рассматриваются в самом общем виде. Изложение мало чем отличается от перечисления основных фактов теории статистических решений. Дальнейшие рассмотрения ограничиваются соответственно бинарным непоследовательным обнаружением, когерентным (с известным точно) и некогерентным (известным с точностью до момента возникновения) сигналом и нормально-флуктуационным шумом, аддитивно взаимодействующим с последним.

Кроме условного и среднего риска в форме А. Вальда, рассматриваются соответствующие потери информации определением цен C в виде $C=-\log P(S/\gamma)$, где $P(S/\gamma)$ — апостериорная вероятность сигнала S при решении γ. Оптимальные системы обнаружения соответствуют байессовскому (при известном априорном распределении сигнала) и минимаксному (в противном случае) правилам решения. Оптимальная обработка данных в случае бинарного обнаружения сводится к вычислению функции правдоподобия и сравнению его значения с порогом, зависящим от цен. Прежние чисто статистические решения задачи обнаружения (например методом Неймана-Пирсона) получаются из общих соотношений при специальном выборе цен. Вводится обобщенное определение минимально-обнаруживаемого сигнала как отношения сигнал/шум

$$a_0=(\bar{S}^2/\bar{N}^2)^{1/2}$$

($\bar{S}^2$ и $\bar{N}^2$ — средние квадраты сигнала и шума соответственно), приводящего к фиксированному относительно малому значению риска.

К оригинальной части работы относится разбор особо важного в приложениях случая слабого сигнала. Здесь для общего случая сигнала и аддитивного шума дается выражение оптимального преобразования смеси сигнала и шума на входе в выходную величину.

В когерентном случае последняя пропорциональна первой степени отношения сигнал/шум и величине вида взаимной корреляции, принятых данных и сигнала.

В некогерентном случае — второй степени отношения сигнал/шум и величине вида автокорреляции принятых данных. Последнее обстоятельство служит оправданием известному на практике эффекту «подавления модуляции», когда, из-за малости отношения сигнал/шум на входе a_0, отношение сигнал/шум на выходе, пропорциональное a_0^2, резко уменьшается.

В конце работы приводятся радиолокационные примеры использования полученных результатов. В приложениях, в частности, приводятся некоторые факты из статистики процессов, связанные с обработкой непрерывных данных (в отличие от стандартных в статистике дискретных выборочных значений). Библ. 87 назв.

Б. С. Флейшман

5033. Воздействие флюктуации сигнала на обнаружение импульсных сигналов в шуме. Шварц (Effects of signal fluctuation on the detection of pulse signals in noise. Schwartz Mischa), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 2, 66—71, 98 (англ.)

В радиолокационных системах используется следующая процедура обнаружения сигнала при наличии шума. Группа последовательных узкополосных импульсов детектируется квадратичным детектором, а затем суммируется интегрирующим устройством. Если полученная сумма превосходит заданный уровень b_s, фиксируется наличие сигнала.

Описанная процедура соответствует проверке статистической гипотезы о наличии сигнала в шуме с вероятностями ошибок P_{nb} и P_{sb}. Здесь P_{nb} — вероятность того, что шум (при отсутствии сигнала) превзойдет уровень b_s и ошибочно будет принят за сигнал; P_{sb} — вероятность того, что сигнал при наличии шума будет превосходить уровень b_s. Качество работы системы оценивается по среднему значению s отношения сигнала к шуму на входе детектора, обеспечивающему данное значение P_{sb} при заданной величине P_{nb}. Приводятся соотношения, связывающие величины P_{nb}, P_{sb}, s, b_s и количество K импульсов в группе при условии, что на вход детектора подаются гауссовские шум и сигнал с дисперсиями ψ_0 и $\sigma_s^2=s^2\psi_0$ соответственно.

В статье рассматриваются три случая: 1) флуктуации сигнала некоррелированы, 2) флуктуации сигнала полностью коррелированы и 3) флуктуации сигнала частично коррелированы.

В первом случае вероятности P_{nb} и P_{sb} выражаются через неполную гамма-функцию.

$$P_{nb}=I(K-1,\ q_s);\quad P_{sb}=I(K-1,\ q_n),$$

где

$$I(K-1,\ q)=\int_q^\infty \frac{x^{K-1}e^{-x}}{(K-1)!}\,dx,$$

$$q_s=\frac{b_s}{2a_s\sigma^2}=\frac{q_n}{1+s^2}\ , \qquad (1)$$

$$\sigma^2=\psi_0+\sigma_s^2,$$

и a_s — постоянная. Сравнение со случаем сигнала постоянной амплитуды дает основание утверждать, что флуктуации оказывают в среднем вредное влияние на работу системы лишь при малых K.

Для второго случая приводятся графики зависимости P_{sb} от s при заданных значениях P_{nb} и K. Анализ этой зависимости показывает, что полностью коррелированный сигнал приводит к существенно большим потерям, чем сигнал с некоррелированными флуктуациями.

В третьем случае рассматривается лишь частный вариант задачи $K=2$; $a_s=1$. Получено выражение

$$P_{sb_2}=e^{-q_s/(1-\rho'^2)}\left\{\operatorname{ch}\frac{q_s\rho'}{1-\rho'^2}+\frac{1}{\rho'}\operatorname{sh}\frac{q_s\rho'}{1-\rho'^2}\right\},$$

где $\rho'=s^2\rho/(1+s^2)$ и ρ — коэффициент корреляции между двумя последовательными импульсами. Соотношения между q_s, q_n и b_s по-прежнему выражаются формулой (1). Численные примеры иллюстрируют влияние корреляции на условия обнаружения сигнала в шуме. Отмечается чрезвычайная сложность вычислений в случае применения рассмотренного метода для $K>2$.

Н. П. Бусленко

5034. Применение цепи Маркова в телекоммуникационной технике для определения возможного количества сигналов, возникающих при определенных условиях. Мейнес (Toepassing van Markoffketens in de telecommunicatietechniek voor het berekenen van het aantal mogelijke signalen onder bepaalde condities. Meinesz M.), Electro-techn., 1957, 35, № 23, 541—547 (гол.)

5035. Теоретические основы импульсной передачи. I. Санд (Theoretical fundamentals of pulse transmission. I. Sunde E. D.), Bell. System Techn. J., 1954, 33, № 3, 721—788 (англ.)

Линейная система передачи, преобразующая линейным образом заданное напряжение (или ток) «на входе», системы в некоторое напряжение (или ток) «на выходе», характеризуется обычно или частотной характеристикой $T(i\omega) = A(\omega)\, e^{-i\psi(\omega)}$ (где $A(\omega)$ — амплитудная характеристика, а $\psi(\omega)$ — фазовая), равной отношению функции на выходе к функции на входе в случае функции на входе, пропорциональной $e^{i\omega t}$, или импульсной переходной функцией $P(t)$ — значением функции на выходе в момент t, если на вход в нулевой момент времени подается единичный импульс. Известно, что функции $T(i\omega)$ и $P(t)$ являются парой преобразований Фурье, так что по одной из них можно определить и другую; помимо того, в случае наиболее важных в технике систем «минимально фазового типа» (для которых $T(i\omega)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости, не имеющей там нулей) функцию $A(\omega)$ можно однозначно восстановить по $\psi(\omega)$ и обратно (см., например, Боде Г., Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, ГИИЛ, М., 1948).

Соотношения между $A(\omega)$ и $\psi(\omega)$ и, особенно, между $T(i\omega)$ и $P(t)$ рассматриваются очень подробно с большим числом конкретных примеров, представляющих интерес для технических приложений. Указываются некоторые методы приближенного перехода от функции $T(i\omega)$ к $P(t)$, являющиеся по существу методами приближенного осуществления преобразований Фурье. Разбирается вопрос о влиянии на $P(t)$ небольших искажений в значении частотной характеристики $T(i\omega)$. Приводится ряд примеров того, как изменяется импульсная переходная функция при некоторых преобразованиях частотной характеристики специального вида (например, при обрезании частотной характеристики в области низких частот).

А. М. Яглом

5036. Случайные процессы обслуживания фазового типа. Джэксон (Random queueing processes with phase-type service. Jackson R. R. P.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, B18, № 1, 129—132 (англ.)

Потребители проходят k стадий обслуживания, причем на i-й стадии имеется r_i одинаковых обслуживающих единиц. Время обслуживания между прибытием потребителей распределено по экспоненциальному закону с параметрами соответственно $\varkappa_i^{-1}$ и λ^{-1}. Найдено] предельное распределение числа потребителей на разных стадиях при $t \to \infty$ и решен ряд других вопросов.

С. С. Кислицын

5037. Теоретико-вероятностное исследование флюктуации анодного тока электронных ламп. Такач (Elektroncsövek anódáram-ingadozásának valószínüségszámítási tárgyalásáról. Takács Lajos), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1956, 6, № 1, 27—51

Работа опубликована также и на немецком языке (РЖФиз, 1958, № 3, 6369).

5038. Исчисление вероятностей, применяемое к резервам больших электрических сетей. Калвар (Le calcul des probabilités appliqué aux réserves des grands réseaux électriques. Calvaer A.), Bull. scient. A. I. M., 1957, 70, № 7-9, 587—616 (франц.)

5039. Введение в математическую теорию информации. Брукс (An introduction to the mathematical theory of information. Brookes B. C.), Math. Gaz., 1956, 40, № 333, 170—180 (англ.)

Популярное изложение основных идей теории информации, рассчитанное на широкие инженерные круги. Текст сопровождается подробными выкладками и числовыми примерами.

Б. С. Флейшман

5040. Теория информации и ее применения. Рулоф (Informationsteorin och dess tillämpningar. Rollof Yngve), Tidskr. sjöväsandet, 1955, 118, № 7-8, 492—525 (швед.)

5041. Библиография по теории информации, теория сообщений — кибернетика. (Второе дополнение). Стамперс (A bibliography of information theory. Communication theory — cybernetics (Second supplement). Stumpers F. Louis H. M.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 2, 150—166 (англ.)

См. РЖМат, 1957, 7211.

5042. Вероятность. Статистика. Испытания приемки. Некоторые работы, комментированные автором. Дюма (Probabilités. Statistiques. Épreuves de recette. Quelques travaux commentés par leur auteur. Dumas M.), Mém. artill. franç., 1957, 31, № 2, 477—527 (франц.)

5043. О распределении времени жизни биологического потомства. Кастольди (Sulla distribuzione dei tempi di estinzione nelle discendenze biologiche. Castoldi Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 2, 158—167 (итал.)

Изучается закон распределения номера поколения, на котором произошло вырождение потомства одной частицы в ветвящемся случайном процессе. В частности, показано, что этот закон распределения не имеет моментов, если $m \geqslant 1$, и имеет все моменты, если $m < 1$ (через m обозначается средний размер потомства одной частицы в следующем поколении). Все эти результаты являются простыми следствиями асимптотических формул для вероятности выживания, полученных А. Н. Колмогоровым (Изв. Н.-и. ин-та матем. и механ. Томск. ун-та, 1938, 2, 7—12).

Б. А. Севастьянов

5044. Законы смертности, для которых процент связанной ренты удовлетворяет некоторым свойствам при осреднении. Руфенер (Sterbegesetze, für welche der Barwert einer Verbindungsrente gewisse Mittelwerteigenschaften erfüllt. Rufener Ernst), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1956, 56, № 2, 321—335 (нем.)

5045. О пожизненной разделенной ренте. Гуэррьери (Sulla rendita vitalizia frazionata. Guerrieri Annibale), Archimede, 1957, 9, № 4-5, 186—191 (итал.)

5046. Попытка решения задачи для среднего дивиденда с помощью непрерывного метода. Цвингги (Ansätze für die Gewinnermittlung nach der kontinuierlichen Methode. Zwinggi Ernst), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, 57, № 1, 45—53 (нем.)

5047. Временной подбор. Карпмейл (Temporary selection. Carpmael C.), J. Inst. Actuaries, 1956, 82, № 1, 123—129 (англ.)

5048. Экспериментирование с организмами как с блоками. Пирс (Experimenting with organisms as blocks. Pearce S. C.), Biometrika, 1957, 44, № 1-2, 141—149 (англ.)

Рассматриваются статистические толкования обычных организмов как блоков. Даются рабочие примеры и обсуждается полезность метода.

Из резюме автора

5049. Одна достойная внимания статистическая модель некоторых временных рядов, встречающихся в природе. Херст (A suggested statistical model of some time series which occur in nature. Hurst H. E.), Nature, 1957, 180, № 4584, 494 (англ.)

5050. Распределение длины предложений у греческих авторов. Уэйк (Sentence-length distributions of Greek authors. Wake William C.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, A120, № 3, 331—346 (англ.)

На основании анализа рядов распределения числа слов в предложениях у греческих авторов (Аристотель, Платон, Ксенофонт) устанавливается критерий авторства литературных произведений. А. К. Митропольский

5051. Разорение игроков в случае ограниченного запаса денег. Фюрст (La rovina dei giocatori nel caso di riserva limitata. Fürst Dario), Giorn. Ist. ital. attuari, 1956, 19, 63—83 (итал.)

Исследуется задача разорения игрока в случае, когда по достижении некоторого предела N, дальнейшие возможные выигрыши будут израсходованы прежде, чем будут присоединены к капиталу.

Таким образом, строится схема функционирования страхового предприятия, которое стабилизировало бы полезное распределение, только в том случае, когда гарантийные фонды достигают некоторого предварительно установленного уровня.

Обзор ограничен простым случаем последовательности партий с возможным приращением ± 1 и с постоянной вероятностью выигрыша p (случай $p=1/2$ и общий случай $p \neq 1/2$). Резюме автора

5052. О законе Ципфа-Мандельбро. Девогт (Sur la loi de Zipf-Mandelbrot. Devooght J.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 4, 244—251 (франц.)

Слова лексики размера R распадаются на S классов, причем j-е слово класса k имеет вероятность $p_k = PM^{-B\sum_{i=0}^{\infty} U[\log_M(k+m+j-i)]}$, где m, M, B — постоянные; P находится из условия

$$\sum_{k=1}^{s} p_k = 1; \quad U(x) = 0 \quad \text{при } x < 0, \quad U(x) = 1$$

при $x > 0$. Рассматривается случай, когда число классов $T(N)$ в тексте длины N знаков есть просто число различных слов в нем. Получена асимптотическая формула, связывающая B и $\log T(N)/\log N$.

С. С. Кислицын

5053. Эквивалентность действий рационального учета. Касаль-Гранхей (Equivalencia de efectos con descuento racional. Casal Grangei Vicente), Gac. mat., 1957, 9, № 2-3, 60—62 (исп.)

5054 К. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. (Общая часть). Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. М., Гостехиздат, 1955, 556 стр. с черт., 25 р. 85 к.

5055 К. Математическая статистика с техническими приложениями. Хальд А. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1956, 664 стр., илл., 36 р. 75 к.

5056 К. Лекции по финансовой математике. Де-Финетти (Lezioni di matematica finanziaria. Anno accad. 1955—1956. (Univ. studi Roma). De Finetti Bruno. Roma, Ed. tip. Ricerche, 1956, 388 p.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 668, 834 (итал.)

5057 К. Введение в современную статистику с приложениями к бизнесу и экономике. Хёрш (Introduction to modern statistics, with applications to business and economics. New ed. Hirsch Werner Z. New York — London, Macmillian, 1957, xv, 429 pp., ill., 45 sh. 6 d), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 403, 8 (англ.)

5058 К. Сборник упражнений по страховой математике. Какаче (Raccolta di esercizi di matematica attuariale. Cacace Francesco. Genova, M. Bozzi, 1956, viii, 279 p.), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 671, 205 (итал.)

5059 Д. К математической теории распределения доходов в зависимости от возраста получающего и времени. Лёйенбергер (Zur mathematischen Theorie der Einkommensverteilung in Abhängigkeit von Alter und Zeit. Leuenberger Franz. — Dokt. Inaugural — Diss. Philos-naturwiss. Fak. Univ. Bern, 1954. Bern, Druck Stämpfli und Cie, 1955, 47 S., ill.) (нем.)

См. также: 4344, 4433, 4495

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев*

5060. XI-е совещание Международной комиссии по изучению и улучшению преподавания математики. Верваке (XI-e rencontre de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques. Vervaecke T.), Bull. Assoc. professeurs math., enseign. public, 1957, 37, № 187, 33—36 (франц.)

5061. Современное состояние, методы и проблемы дифференциальной геометрии. Видаль-Абаскаль (Estado actual, metodos y problemas de la geometria differential. Vidal Abascal Enrique), Rev. mat. hisp.-amer., 1957, 17, № 1, 38—58 (исп.)

Автор делит историю дифференциальной геометрии на три периода: 1) изучение кривых и поверхностей в обычном пространстве (Монж, Гаусс), 2) изучение римановых пространств и их обобщений, 3) изучение дифференциальной геометрии с помощью топологических методов (1935—1940). Дифференциальная геометрия 1-го периода называется классической, последних двух периодов — современной или новой (moderna). Реферируемая статья (она будет продолжена) посвящена классической дифференциальной геометрии. Рассмотрены основные уравнения теории поверхностей (и теорема об определении поверхности 1-й и 2-й дифференциальными формами), инварианты, геодезические, изгибание поверхностей, проблема Миндинга и проблема Бура, общая проблема изгибания поверхностей (по Картану), неевклидовы геометрии.

Упоминаются работы многих ученых. Работы русских дореволюционных и советских геометров не получили достаточного освещения. Д. З. Гордевский

5062 К. Основания геометрии. Трайнин Я. Л., Новосиб. гос. пед. ин-т. Новосибирск, 1957, 272 стр., илл. На правах рукописи

Курс оснований геометрии для педагогических институтов. После обзора развития геометрии до Лобачевского излагается геометрия Лобачевского, а затем после обзора развития геометрии от Лобачевского до Гильберта излагается аксиоматика Гильберта. Далее излагаются теория измерения геометрических величин как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лоба-

чевского и общие вопросы аксиоматики геометрии. Курс соответствует программе и содержит полезный дополнительный материал. При подробном изложении аксиоматического аспекта курса в книге почти полностью отсутствует теоретико-групповой аспект этого курса, необходимый для понимания сути взаимоотношений евклидовой и неевклидовых геометрий и проективной геометрии (известной студентам пединститутов, изучающим курс оснований геометрии). Автор ограничивается упоминанием эрлангенской программы Клейна в обзоре развития геометрии от Лобачевского до Гильберта. В книге совершенно отсутствует понятие группы движений, что не дает возможности автору рассматривать группы движений плоскостей Евклида и Лобачевского как подгруппы групп проективных преобразований проективной плоскости и дробно-линейных преобразований плоскости комплексного переменного, что представляет собой основу излагаемых в книге интерпретаций Бельтрами—Клейна плоскости Лобачевского и интерпретаций Пуанкаре плоскостей Евклида и Лобачевского. Имеются отдельные неудачные утверждения, например (стр. 180) для построения эллиптической геометрии следует отказаться, наряду с другими аксиомами геометрии Евклида, от его V постулата. Причина этого недоразумения — отсутствие понятия об эквивалентности двух аксиом в узком смысле слова (когда из выполнения одной аксиомы следует выполнение другой, и обратно). Особенно много недостатков исторического характера. Например, автор упустил, что аксиома непрерывности появилась впервые у Омара Хайяма в XI в., гипотеза острого угла в равнобедренном двупрямоугольнике рассматривалась у того же Хайяма, а вслед за ним его последователем Насирэддином ат-Туси, цитируемого Саккери. Неправильна дата смерти отца Лобачевского (1797 г.), он умер не ранее 1809 г.

Б. А. Розенфельд

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

5063. Уточнение построения формы и развертки буферной пружины. Балдина Е. М., Тр. Ленингр. воен.-механ. ин-та, 1957, № 6, 294—305

При проектировании буферных пружин принимается, что она находится на цилиндрической поверхности, проектирующей пружину на горизонтальную плоскость в спираль Архимеда. При развертывании цилиндрической поверхности на плоскость рассматривают развертку той кривой, которая является геометрическим местом центров прямоугольных сечений витков плоскостями, проходящими через ось пружины. Задавая эту развертку, находят вертикальную проекцию пружины.

Если взять вместо точной длины спирали Архимеда некоторую приближенную формулу (без вывода), то показывается, что в случае конической пружины с постоянным шагом разверткой будет квадратная парабола, а если взять развертку в виде прямой, то пружина оказывается навитой на параболоид вращения и имеет переменный шаг.

В. С. Люкшин

5064. Расчет и вычерчивание клотоиды. Липинский (Obliczenie i tyczenie klotoidy. Lipiński Mieczysław), Przegl. geod., 1956, 12, № 1, 20—26 (польск.)

Автор доказывает, что для переходного участка между прямолинейными или циркулярными сегментами пути, по которому движется тележка с большой скоростью, лучше пользоваться вместо дуг кубической параболы дугами клотоиды, т. е. кривой, радиус кривизны R которой обратно пропорционален длине ее дуги L, измеренной, начиная с некоторой фиксированной точки $R=\frac{a^2}{L}$. Статья содержит расчет наиболее важных элементов клотоиды, которые необходимы для вычерчивания ее, и таблицы для численных значений этих элементов.

W. Ślebodziński

5065. Исследование ядер некоторых типов сечений. Богданов В. С., Тр. Ленингр. воен.-механ. ин-та, 1957, № 6, 145—151

Если нейтральная ось $xx_p/i_y^2+yy_p/i_x^2+1=0$, где x_p, y_p — координаты точки приложения силы, касается некоторой кривой (контур сечения), то точка (x_p, y_p) лежит на контуре ядра сечения (ядерная кривая). Показывается, что если контуром сечения будет окружность, то ядерной кривой оказывается одна из кривых 2-го порядка. Исследуется вопрос о сопряжении в контуре ядра сечения, когда участок контура сечения состоит из дуги, переходящей в прямые.

В. С. Люкшин

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5066. Геометрические построения одним циркулем (с условием, что все окружности проходят через одну и ту же точку). Костовский А. Н., Доповіді та повідомлення. Львівськ. ун-т, 1957, вип. 7, ч. 3, 277—281

Показывается построение отрезка в 3^k ($k=1, 2, \ldots$) раз больше данного отрезка при помощи одного циркуля, причем все проводимые окружности проходят через одну и ту же точку.

Далее доказывается: 1) Каждую геометрическую задачу на построение 2-й степени всегда можно решить одним циркулем так, что все проводимые окружности, за исключением двух из них, будут проходить через одну и ту же произвольно выбранную точку плоскости. 2) Если в плоскости чертежа начерчена прямая линия, то все задачи на построение 2-й степени можно решить одним циркулем с условием, что все проводимые окружности, за исключением одной из них, будут проходить через одну и ту же наперед выбранную точку плоскости. 3) Если в плоскости чертежа имеется некоторая фигура, состоящая из прямых линий и отрезков, то все задачи на построение, решаемые методом Штейнера, используя эту фигуру в качестве вспомогательной, можно решить одним циркулем так, что все проводимые окружности, за исключением одной, будут проходить через одну и ту же произвольную точку плоскости.

Н. В. Наумович

5067. О некоторых замечательных точках и прямых треугольника. Крипякевич Р. И., Докл. Львовск. политехн. ин-та, 1957, 2, № 1, 13—18

Доказаны три теоремы: 1) Во всяком треугольнике лежат на одной прямой центр вписанной окружности I, центр описанной окружности O и центр окружности, проведенной через центры трех вневписанных окружностей — точка P, причем точка O делит отрезок IP пополам; 2) Во всяком треугольнике лежат на одной прямой центр вписанной окружности I, центр тяжести G и точка Нагеля N, причем $IN:IG=3$; 3) Во всяком треугольнике лежат на одной прямой центр вписанной окружности I, центр окружности, касательной к трем взаимно касательным окружностям с центрами в вершинах треугольника (точка O), и точка Жергона M. Последняя теорема доказана координатным методом.

Примечание референта. Первая теорема — следствие теоремы Мансиона (Зетель С. И., Новая геометрия треугольника, М., Учпедгиз, 1940, стр. 47), так как точки I, O, P треугольника ABC соответ

ственно совпадают с точками H, O_9, O треугольника $O_AO_BO_C$ и лежат на его прямой Эйлера. С. И. Зетель

5068. **Некоторые теоремы и соотношения в теории решения треугольников. Бакаляев** (Деякі теореми та співвідношення в теорії розв'язування трикутників. Бакаляєв О. С.), Наук. зап. Запорізьк. держ. пед. ін-т, 1956, 2, 83—95 (укр.)

Полагая, что литература по затрагиваемым им вопросам встречается редко, автор приводит целый ряд известных соотношений между элементами плоского треугольника и прилагает их к решению некоторых задач. Многие из этих соотношений объединены в так называемый магический ряд, уже встречавшийся ранее в нашей методической литературе (Торопов К., Магический ряд и его применение к решению задач, Оренбург, Киргиздат, 1922). Н. И. Кованцов

5069. **Об ортоцентроидальной окружности. Тебо** (Sur la circonférence orthocentroïdale. Thébault V.), Mathesis, 1957, 66, № 1-3, 77—78 (франц.)

Ортоцентроидальной называется окружность, построенная на отрезке GH как на диаметре (G — точка пересечения медиан треугольника, H — ортоцентр). Ортоцентроидальная окружность — геометрическое место общих полюсов основного треугольника $T \equiv ABC$, либо треугольника собственно подобного треугольнику T со сторонами $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, проходящими через вершины A, B, C, либо треугольника собственно подобного T с вершинами A', B'', C'', расположенными на сторонах BC, CA, AB. С. И. Зетель

5070. **Геометрия кубов. Глибовский, Слупецкий** (Geometria sześcianów. Glibowski E., Słupecki J.), Zesz. Nauk, 1956, 38—47 (польск.)

5071. **Вычисление поверхности и объема сферы и ее частей при помощи счетной линейки. Мергхейм** (Berechnung der Kugel und der Kugelteile mit dem Rechenstab. Mergheim J.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 5, 220—221 (нем.)

5072. **Аналагматические кривые третьего порядка, описанные около треугольника. Баррюкан** (Cubiques anallagmatiques circonscrites à un triangle. Barrucand P.), Mathesis, 1957, 66, № 1—3, 78—79 (франц.)

Многие свойства эллипса, касающиеся гипоциклоиды Штейнера, приведенные в заметке До (РЖМат, 1958, 3187), можно получить из рассмотрения аналагматической кривой третьего порядка, проходящей через изогональные точки треугольника. С. И. Зетель

5073. **Простейшие геометрические преобразования. Чурсина А.**, Сб. студ. научн. работ. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-та, 1957, вып. I (22), 141—163

Даны определения геометрических преобразований. Рассматриваются аффинные преобразования (сжатие к оси, сдвиг, родство фигур), полярное преобразование, взаимно полярное преобразование. Приведены примеры взаимных теорем (Менелая и Чевы), Паскаля и Брианшона. В заключение рассматривается инверсионное преобразование и приводится известное доказательство теоремы Птолемея при помощи инверсии. С. И. Зетель

5074. **Замечания о некоторых преобразованиях, о введении конических сечений и классических эквивалентностях. Вивьен** (Remarques sur certaines transformations. Sur l'introduction des coniques et sur les équivalences classiques. Vivien F.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1957, 36, № 185, 358—360 (франц.)

Излагается построение точек пересечения центрального конического сечения с прямой. Автор доказывает, что это построение приводится к проведению трех прямых. Л. Я. Березина

5075 К. **Дополнения к аналитической геометрии. Проективность и плоские кривые. Лекции, прочитанные в 1956/57 учебном году в университете в Палермо. Ло-Бой** (Complementi di geometria analitica. Proiettività e curve piane. Lezioni dettate nell'anno 1956—1957 nell' Università di Palermo. Lo Voi Antonino. Palermo, A. Renna, 1957, 149 p., 1200 L.), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 671, 206 (итал.)

5076 К. **Лекции по геометрии на плоскости. 2-я часть. Лаенс** (Leçons de géométrie plane. 2e part. Laenens Jos. Namur, A. Wesmael-Charlier, 1956, 68 p., ill., 28 Bfr.), Bibliogr. Belgique, 1957, 83, № 9, 172 (франц.)

5077 К. **Геометрия для колледжей. Миллер** (College geometry. Miller Leslie H. New York, Appleton-Century-Crofts, 1957, 211 pp., ill., 4.50 doll.), Publishers' Weekly, 1957, 171, № 18, 85 (англ.)

5078 К. **Лекции об объемах, площадях и изопериметрии. Хадвигер** (Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Hadwiger H. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1957, XIII, 312 S., ill., 49.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 32, 2232 (нем.)

5079 К. **Математический анализ и координатная геометрия. Болт** (Calculus and co-ordinate geometry. Bolt Ronald Leonard. London, Dent, 1957, viii, 195 pp., ill., 10 sh. 6 d), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 390, 10 (англ.)

5080 К. **Трисекция угла при помощи циркуля и линейки. Фихтер** (Die Drei-Teilung des Winkels mit Zirkel und Lineal. Fiechter A. R. Basel, Helbing und Lichtenhahn, 1957, 56 S., ill., 6. — Sfr.), Schweiz. Buch, 1957, A 57, № 21, 525 (нем.)

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5081. **Отображение окружности, лежащей на сфере, на эту сферу. Гофман** (Streuwurf eines Kugelkreises auf seine Kugel. Hofmann O.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 5, 218—219 (нем.)

Каждая лежащая на сфере окружность с помощью центрального проектирования может быть отображена в любую другую окружность, расположенную на той же сфере. С. Г. Кислицын

5082. **Тетраэдральные комплексы прямых Рейе одного, двух, трех и четырех главных тетраэдров. Ниче** (Die Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe eines, zweier, dreier und vierer Haupttetraeder. Nitče V.), Bull. scient. Conseil acad. RPFY, 1956, 3, № 2, 51 (нем.)

Прямые трехмерного точечного пространства, высекающие в гранях данного тетраэдра (называемого главным) такие четыре точки, сложное отношение которых в упорядоченном соответствии имеет постоянное значение δ — характеристический инвариант — образуют квадратичный комплекс Рейе (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III_2, H. 8, 1903—1915, стр. 1150). При переменном δ получается пучок квадратичных комплексов.

Проективное соответствие между комплексами Рейе двух пучков задается по принципу равенства характеристических инвариантов. Автор в коротком резюме доклада, сделанного на IV конгрессе математиков Австрии (Вена, 1956 г.), сообщает, что из проективного соответствия между пучками двух, трех и четырех тетраэдров получается много интересных предложений. К. И. Гринкевичюс

5083. **Транзитивность в проективных плоскостях. Остром** (Transitivities in projective planes.

Ostrom T. G.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 3, 389—399 (англ.)

Дополняя свои прежние исследования (РЖМат, 1958, 709), автор доказывает, что дважды транзитивная проективная (аффинная) плоскость, содержащая 2^{2m+1} точек на каждой прямой (включая несобственную), дезаргова (веблен-веддербарнова). Кроме того, показывается, что в конечной плоскости, транзитивной относительно четырехвершинников, любая четверка точек, находящаяся в общем положении, порождает дезаргову подплоскость и что всякая конечная плоскость содержит конфигурацию Дезарга. По ходу дела уточняются и дополняются исследования Андре (РЖМат, 1956, 6832). Л. А. Скорняков

5084. **Регулярные группы коллинеаций.** Хьюз (Regular collineation groups. Hughes D. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 165—168 (англ.)

Если (v, k, λ)-система П (РЖМат, 1956, 4070) допускает группу коллинеаций $\mathfrak{G}$ порядка m такую, что никакая нетождественная коллинеация из $\mathfrak{G}$ не оставляет на месте ни одну из точек и ни одну из прямых, то П называется регулярной степени m. Показывается, что если $t = v/m$ нечетно, то уравнение $x^2 = (k-\lambda)y^2 + (-1)^{(t-1)/2}\lambda m z^2$ имеет нетривиальное целочисленное решение. Из этого результата выводится несуществование некоторых конечных проективных плоскостей. Л. А. Скорняков

5085. **Неевклидова циклография и плоская инверсионная геометрия. (Геометрия Лагерра, Ли и Мёбиуса). II.** Фладт (Die nichteuklidische Zyklographie und ebene Inversionsgeometrie (Geometrie von Laguerre, Lie und Möbius). II. Fladt Kuno), Arch. Math., 1957, 7, № 6, 399—405 (нем.)

Настоящая статья Фладта является продолжением его предыдущей статьи (РЖМат, 1957, 8885), в которой автор, опираясь на исследования Фидлера (Fidler W., Zyklographie, 1882) и Мюллера (Müller E., Vorlesungen über Darstellende Geometrie, II Band, 1929), обобщил их на неевклидову геометрию. В первой части своей работы Фладт показал, что плоская неевклидова геометрия Ли может быть образована линейным преобразованием, которое оставляет инвариантным уравнение

$$x_0^2 + k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_4^2 = 0. \qquad (1)$$

Геометрия Лагерра имеет место, когда последнее уравнение не содержит члена с индексом 4. Отсутствие члена с индексом 3 приводит к геометрии Мёбиуса.

В случае гиперболической геометрии цикл

$$(a/x) - a_4 x_4 = 0$$

является инвариантным циклом инверсии Мёбиуса.

Автор предлагает простое изображение инверсии Лагерра в неевклидовой геометрии. В конце своего исследования он рассматривает ряд частных случаев и дает им простые геометрические истолкования.

М. П. Черняев

5086. **Координаты в геометрии.** Фордер (Coordinates in geometry. Forder H. G. Auckland Univ. Coll. Bull., 1953, № 41, 32 pp., ill.) (англ.)

Эта монография содержит три части. В первой содержится элегантное изложение следствий малой теоремы Дезарга и ее эквивалентности возможности введения координат из альтернативного тела. Это естественно приводит к полной теореме Дезарга и координатам из ассоциативного тела. Во второй части без использования аксиом порядка вводится конгруэнтность углов и линейных сегментов (точечных пар) в папповой геометрии. Третья часть использует свойства выпуклых функций для развития тригонометрии в гиперболической плоскости. M. Hall

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, 644.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5087. **О практическом решении геометрических задач на развертывающихся линейчатых поверхностях.** Тенка (Sulla risoluzione pratica di problemi geometrici sulle superfici rigate sviluppabili. Tenca Luigi), Archimede, 1957, 9, № 2, 62—66 (итал.)

Берется прозрачный лист бумаги. С помощью различных складываний и изгибаний этот лист можно наложить на данную развертывающуюся поверхность (так, что сам лист будет представлять часть этой поверхности), тогда линии сгиба взятого листа бумаги будут геодезическими линиями на данной поверхности.

Если на данном плоском прозрачном листе бумаги имеются какие-нибудь фигуры, то после совмещения этого листа с частью линейчатой развертывающейся поверхности взятые фигуры изменятся, превратятся в новые. Последние будем называть производными от данных плоских фигур. С помощью этого листа и операций «складывания» и «изгибания» решаются некоторые геометрические задачи на развертывающихся поверхностях.

Например: 1. Через данную точку провести геодезическую линию, перпендикулярную к данной геодезической линии. 2. Построить касательную к производной параболе, заданной производными директрисой и фокусом. В. А. Маневич

5088. **Обобщение основной теоремы центральной аксонометрии на пространство n измерений.** Первикова В. Н. В сб.: Методы начертательной геометрии и ее приложения. М., Гостехиздат, 1955, 141—155

Синтетическим методом доказывается теорема: Если в n-мерном (евклидовом, расширенном несобственными элементами) пространстве ($n > 3$) дана произвольная n-мерная полиэдрическая конфигурация точек и прямых типа

$$(C^2_{n+2})_n (C^3_{n+2})_3 K^n \equiv O\,(OAA', OBB', \ldots, OVV', OWW')$$

(т. е. конфигурация, образованная парой симплексов $AB\ldots VW$, $A'B'\ldots V'W'$, перспективно расположенных относительно O, иначе говоря, многомерная дезаргова конфигурация) и произвольная плоская полиэдрическая конфигурация того же символа

$$K^n_0 \equiv 0_0\,(O_0A_0A'_0,\ O_0B_0B'_0,\ \ldots,\ O_0V_0V'_0,\ O_0W_0W'_0),$$

то в этом n-мерном пространстве можно установить центральное проектирование (т. е. выбрать плоскость проекций и центральное (n—3)-мерное пространство), таким образом, что K^n-спроектируется в конфигурацию $K^n_1 \equiv O_1\,(O_1A_1A'_1, \ldots, O_1W_1W'_1)$, унимодулярно-аффинную K^n_0. При доказательстве существенным образом используется аналогичная теорема, доказанная при $n = 3$ Н. М. Бескиным (Докл. АН СССР, 1945, 50, 41—44; Матем сб. 1946, 19 (61), № 1, 57—72) и И. С. Джапаридзе (РЖМат, 1957, 796).

Д. З. Гордевский

5089. **Некоторые приемы построения линий пересечения кривых поверхностей.** Малунцев И. М. Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 1 (49), 176—183, илл.

Показываются приемы построения линий пересечения поверхностей, путем использования: 1) конгруэнции парабол-сечений параболоида плоскостями, параллельными его оси (эллиптический параболоид и конус вращения; оси взаимно перпендикулярны); 2) родства сечений плоскостями, проходящими через общую ось соосных эллиптических конуса и параболоида; 3) гомологического соответствия гипербол-сечений конуса вращения (кольцо и конус вращения; оси вращения взаимно перпендикулярны); 4) преобразования трехосного эллипсоида в эллипсоид вращения и аффинные гомологии параллельного переноса эллипсов-сечений цилиндра (трехосный эллипсоид и эллиптический цилиндр); 5) перспективной коллинеации сечений и гомологий на плоскости проекций (параболоиды—вращения и эллиптические с параллельными осями); 6) преобразования одной из поверхностей в параболоид вращения (эллиптические параболоиды, эллипсы сечений которых не подобны и не подобно расположены).

Указаны другие сочетания поверхностей, в которых применение рассмотренных зависимостей проективной геометрии ведет к некоторому упрощению построений. Л. Н. Лихачев

5090. Укрепить кафедры начертательной геометрии и черчения. Четверухин Н. Ф., Вестн. высш. школы, 1957, № 10, 54—58

5091 К. Неевклидовы геометрии и взаимоотношения между ними. Рёзер (Die nichteuklidischen Geometrien und ihre Beziehungen untereinander. Roeser Ernst. München, R. Oldenbourg, 1957, 233 S., ill.) (нем.)

Книга посвящена изучению отображений неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана друг на друга с помощью соответствия между плоскостью и сферой в пространстве Лобачевского, на которых реализуются эти геометрии, и т. д. Книга изобилует легкомысленными утверждениями, типичным образчиком которых является (стр. 30): «Параболоид — поверхность, получающаяся при вращении параболы около одной из ее осей. В зависимости от того, какую ось выбирают, получают эллиптический или гиперболический параболоид». Вначале приведены три постулата параллельности — постулат A_e евклидовой геометрии, постулат A_s геометрии Римана и постулат A_h геометрии Лобачевского (стр. 13 и 21), причем постулат A_e приведен в той же форме, что и у самого Евклида, и автор не замечает, что постулат A_e в этой форме выполняется не только в евклидовой геометрии, но и в неевклидовой геометрии Римана. Б. А. Розенфельд

5092 К. Графический метод приведения к простейшему виду пространственной системы сил. Вабищевич Н. С. (Ленингр. инж.-строит. ин-т, вып. 32). Л., 1957, 42 стр., илл., 2 р. 10 к.

Проекционный аппарат, положенный в основу метода, излагается на изображениях образов, необходимых для рассмотрения задач — точки, вектора, плоскости и многогранника, отображаемых двойным параллельным проектированием на картинную плоскость xOy: прямоугольным и косоугольным по направлению биссектрисы угла yOz. Координатная плоскость xOz совмещается с картинной вращением вокруг оси Ox до совпадения направлений осей Oy и Oz при правой системе координат. Точка изобразится в виде вектора, началом которого является «горизонталь» точки (прямоугольная ее проекция), концом — «картина» точки (косоугольная проекция); длина вектора равна аппликате точки. Пространственный вектор изображается двумя векторами — горизонталью и картиной (соответственно прямоугольной и косоугольной проекциями), по которым легко определяются модуль и положение вектора в пространстве.

Горизонталь и картина вектора пересекаются в точке пересечения линии действия самого вектора с картинной плоскостью.

На базе такого отображения пространства, графически, в общем виде, решаются задачи статики на сложение и разложение сил, на определение центра и момента сил относительно точки и оси плоской или пространственной системы сил; показан переход от креста сил к динаме и дано определение центральной оси сил, произвольно расположенных в пространстве. Рассмотрено решение восьми прикладных задач статики на определение центра тяжести, реакций в опорах, усилий в стержнях, задача А. Фенпля о крестах сил и т. п.

Способ отображения пространства на плоскость чертежа, положенный в основу графического метода решения задач механики, является частным случаем векториальных проекций Федорова (Федоров Е. С., Новая начертательная геометрия, Изв. Росс. АН. Петроград, 1917, 6 сер., 2). Л. Н. Лихачев

5093 К. Краткий курс начертательной геометрии. Димитров (Кратък курс по дескриптивна геометрия. Димитров Ст. Г. София, Наука и изкуство, 1957, VI, 236 стр., 8 . 35 лв.), Бълг. книгопис, 1957, 61, № 3, 8 (болг.)

5094 К. Учебник по черчению, содержащий основы теории проекции, перспективы и теней. Для общеобразовательных учебных заведений. Хенрикквес (Lärobok i geometrisk ritning. Innehållande grunderna av projektions-, skugg- och perspektivläran för de allmänna läroverken. Henriques Pontus H. 24 uppl. Omarb. och tillökad av Karl J. Ek. Stockholm; Seelig, 1956, 104 s., ill., 6 : 35 kr.), Svensk bokförteckn., 1957, Juli, 4 (шведск.)

5095 К. Учебник по черчению и теории проекций. 2. Для гимназий. 3-е изд. Лагерквист (Lärobok i geometrisk ritning och projektionslära. 2. För gymnasiet. 3. uppl. Lagerqvist Erik. Stockholm, Sv. bokförl. Bonnier., 1956, 61 s., ill.; 2 : 85 kr.), Svensk bokförteckn., 1957, Apr., 9 (шведск.)

5096 К. Начертательная геометрия. Теория и упражнения. Часть I. Машаду (Geometria descritiva; teoria e exercícios. 1 parte. Machado Ardevan. S. Paulo, Distr. Liv. Nobel, 1956, 21 p., il., 60,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1957, 5, № 4, 189 (порт.)

5097 К. Начертательная геометрия. 4.—7-е дополн. изд. Занден (Darstellende Geometrie. 4.—7. erw. Aufl. Sanden H. von. Stuttgart, Teubner, 1956, 155 S., 7.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 31, 2166 (нем.)

5098 К. 200 упражнений по начертательной геометрии с решениями. Алименти, Пенья (200 esercizi di geometria descrittiva completamente risolti. Alimenti Cesare. Nuova ed. riv. e ampl. Pegna Enrico. Torino, V. Giorgio, 1957, 235 p., 1200 L.), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 672, 256 (итал.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5099. О построении точек алгебраических кривых 3-го, 4-го, 5-го порядка в конфигурации Андреева. Пердиян А., Сб. студ. научн. работ. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 1 (22), 165—175

Рассматривается конфигурация К. А. Андреева, связанная с семиугольником, описанным около конического сечения. Соединяя прямыми по порядку каждую вершину семиугольника со следующей после двух пропущенных, будем иметь, что точки пересечения каждой прямой со следующей будут лежать на другом коническом сечении. Обобщая этот результат, автор

высказывает теорему: Если pq точек пересечения двух кривых порядка p лежат на кривой порядка q, то $p(p-q)$ остальных точек лежат на кривой порядка $p-q$. Используя пары распавшихся линий 5-го, 6-го и 7-го порядка, автор получает кривые соответственно 3-го, 4-го и 5-го порядка. П. Г. Колобов

5100. **О размерности алгебраической системы кривых с узлами на неособенной поверхности. Акидзуки, Мацумура** (On the dimension of algebraic system of curves with nodes on a non-singular surface. Akizuki Yasuo, Matsumura Hideyuki), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1957, A. Math., 30, № 2, 143—150 (англ.)

Доказывается, что если E — линейная система, высекаемая на неособенной поверхности F (заданной в проективном пространстве над алгебраически замкнутым полем k) гиперповерхностями порядка m, то совокупность тех кривых из E (и их специализаций над k), которые имеют не менее d узлов и не имеют особенностей другого характера, образует алгебраическую подсистему E; если она не пуста, то каждая из компонент ее имеет размерность не менее $\dim E - d$.

Доказательство опирается на лемму: пусть $\dim E = N$, $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ — линейно независимые на F формы степени m и $D(\lambda)$ — пересечение F с $\varphi_\lambda = \sum_0^N \lambda_i \varphi_i(x) = 0$; если Q — кратная точка $D(\lambda)$, для которой $x_0 \neq 0$ и f_i $(i = 1, \ldots, n-2)$ — формы степени m, причем $\partial(f_1, \ldots, f_{n-2})/\partial(x_3, \ldots, x_n) \neq 0$ в Q и если положить $\Delta_j(\varphi_\lambda) = \partial(\varphi_\lambda, f_1, \ldots, f_{n-2})/\partial(x_j x_3, \ldots, x_n)$ $(j = 1, 2)$, $\Delta(\varphi_\lambda) = \partial(\Delta_1(\varphi_\lambda), \Delta_2(\varphi_\lambda), f_1, \ldots, f_{n-2})/\partial(x_1 \ldots x_n)$, то Q будет узлом для $D(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\Delta'(\varphi_\lambda) \neq 0$ в Q. В. В. Морозов

5101. **Характеристики коник в пространстве. Северн** (Le caratteristiche delle coniche nello spazio. Severi Francesco), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 251—264 (итал.)

После некоторых общих замечаний о характеристиках алгебраического семейства $\sum$ кривых и трудностей, возникающих при их изучении (одна из которых — возможное отсутствие неособенной проективной модели, бирационально эквивалентной $\sum$ без исключений, или «внутренняя сингулярность» семейства, по терминологии автора), автор рассматривает систему $\sum$ неприводимых коник в S_3 и строит ее неособенную модель—многообразие Сегре $M = S_3 \times S_5$ (из этого представления следует неприводимость и рациональность этого семейства, однако же, хотя M несингулярна, но не является бирационально эквивалентной $\sum$ без исключений; автор полагает, что $\sum$ внутренно сингулярно). Отсюда и из знания базиса подмногообразий данной размерности для многообразия Сегре выводится, что простые характеристики семейства $\sum$ (т. е. соответствующие чистым гиперповерхностям в M) будут условиями μ (прохождения плоскости коники через данную точку) и ν (пересечение коники с данной прямой); условия размерности $d \leqslant 7$ символически даются характеристиками $\mu^i \nu^j$ $(i, j = 0, \ldots, d;\ i + j = d)$. Вычисляется числовое значение характеристики ν^8 (т. е. число коник, пересекающих 8 производящих прямых). В. В. Морозов

5102. **Вырожденные кривые алгебраической системы парабол наименьших квадратов. Фарки** (Le curve degeneri del sistema algebrico delle parabole dei minimi quadrati. Farchi Vittorio), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 3-4, 291—314 (итал.)

Если (xy) — двойное случайное переменное с плотностью вероятности распределения $p(x, y)$, то параболой наименьших квадратов x относительно y называется парабола $f(x, y) \equiv x - dy^2 - by - c = 0$, коэффициенты уравнения которой определяются из условий $M[f] = \min$, где $M[f] = \int\int f p dx dy$; условие это приводится к трем $M[f] = M[fy] = M[fy^2] = 0$, откуда d, b, c выражаются через моменты $m_{st} = M(x^s y^t)$. Постановка вопроса и подробности в книге Помпилия (Pompilj, Teoria dei campioni, Veschi, Roma, 1952), оставшейся для референта недоступной.

Полагая, что для (x, y) существуют моменты m_{st} до 4-го порядка включительно $(s + t \leqslant 4)$, автор, производя замену переменных $x' = x$, $y' = y - tx$, получает семейство парабол наименьших квадратов x' по y', общее уравнение которых алгебраично относительно t и может быть записано в виде $\alpha_3(y - tx)^2 + \beta_5 y + \beta_5' x + \gamma_5 = 0$, где коэффициенты — полиномы относительно t и моментов m_{st} $(s + t \leqslant 4)$ и индекс означает степень относительно t.

Это семейство представляет алгебраическую систему, общая кривая которой неприводима, однако существуют три вещественные направления (характеристические), для которых параболы распадаются в пару прямых, одна из которых — бесконечно удаленная. Возможен также случай вырождения, когда все параболы приводимы — необходимым и достаточным условием этого является обращение в нуль всех моментов третьего порядка относительно центра распределения переменного. Исследуются некоторые другие свойства указанного семейства. В. В. Морозов

5103. **Одновременное разрешение для алгебраических поверхностей. Абхьянкар** (Simultaneous resolution for algebraic surfaces. Abhyankar Shreeram), Amer. J. Math., 1956, 78, № 4, 761—790 (англ.)

Пусть K — поле алгебраических функций двух переменных над полем констант k характеристики p, K' — его конечное алгебраическое расширение, v' — нульмерная валюация k' и v — ее сужение на K. Известно, что если k совершенно, то K допускает несингулярную модель (теорема о разрешении особенностей); поставленный автором вопрос об одновременном разрешении есть вопрос о существовании несингулярной проективной модели K, K'-нормализация которой также несингулярна; в ослабленной форме это вопрос о существовании проективной модели K, K'-нормализация которой несингулярна.

Показывается, что если v' униформизируема, то она униформизируема и на K'-нормализации проективной нормальной модели K (локальная слабая одновременная разрешимость); если k алгебраически замкнуто $p = 0$ и v имеет рациональные значения, то существует несингулярная проективная модель v поля K такая, что центр v на ней и одновременно центр v на K' — нормализации V — простые точки (локальная одновременная разрешимость для рациональных валюаций): если, при тех же предположениях относительно k, K' — расширение Галуа, то существует проективная нормальная модель K, K'-нормализация которой несингулярна (глобальная слабая одновременная разрешимость). Если k совершенно и K'/K — циклическое степени 2 (причем $p \neq 2$) или 3 (причем $p \neq 3$ и k содержит примитивный кубичный корень из единицы), то существует несингулярная проективная модель поля K, K'-нормализация которой несингулярна (глобальная одновременная разрешимость). Однако на циклические расширения высших степеней этот результат не распространяется: если q — простое число, большее 3 и отличное от p и если k' содержит первообразный корень q-й степени из единицы, то существует множество q — циклических расширений поля K, таких что K и K' одновременно неразрешимы

т. е. для всякой несингулярной проективной модели K ее K'-нормализация непременно будет сингулярна. Даны обобщения некоторых результатов работы на многообразия высших размерностей. В. В. Морозов

5104. **О калоттах с коллинеарными центрами, принадлежащими алгебраической поверхности.** Газапина (Sulle calotte a centri allineati appartenenti a superficil algebriche. Gasapina Umberto), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat e natur., 1956, 21, № 5, 262—267 (итал.)

Из формулы $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i \sin^3 \tau_i}$, связывающей кривизны $\frac{1}{\rho_i}$ точек пересечения прямой с алгебраической кривой n-го порядка и углы между ними в этих точках, Бомпиани (Rend Accad. Italia, 1940, 1, ser. 7, 93—101) получил три соотношения $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2} = 0$ между прямоугольными координатами точек P_i пересечения оси z с алгебраической поверхностью $z = f(x, y)$ n-го порядка.

Автор дает новый вывод таких соотношений для алгебраической поверхности порядка n, пересекаемой прямой r в различных точках P_i $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\sum_{1}^{n} \frac{H_i}{\cos^2 \omega_i} \frac{(a_{1i} v)(a_{2i} v)}{(a_{1i} a_{2i})} = 0,$$

$$\sum_{1}^{n} \frac{H_i}{\cos^3 \omega_i} = \sum_{1}^{n} \frac{H_i}{\cos^3 \omega_i} \frac{(a_{1i} r)(a_{2i} r)}{(a_{1i} a_{2i})},$$

$$\frac{K_1}{\cos^4 \omega_1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{K_i}{\cos^4 \omega_i} +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{2}^{n} {}_{i \neq j} \frac{H_i H_j}{\cos^3 \omega_1 \cos^3 \omega_j (a_{1i} a_{2j})(a_{1j} a_{2i})} \times$$

$$\times \{(a_{1i} a_{2j} r)(a_{2i} a_{1j} r) + (a_{1i} a_{1j} r)(a_{2i} a_{2j} r)\},$$

здесь K_1, H_i — соответственно гауссова и средняя кривизны поверхности в точке P_i; ω_i — угол между прямой r и нормалью к поверхности в точке P_i; a_{1i}, a_{2i} — орты касательных к асимптотическим линиям в точках P_i; v — вектор поверхности, ортогональный лучу; r — орт луча. Калоттой (calotta) называется элемент 2-го порядка поверхности: касательная плоскость, точка касания (центр) и соприкасающаяся поверхность 2-го порядка. В. И. Шуликовский

5105. **О построении примеров алгебраических поверхностей, содержащих циклические инволюции.** Годо (Sur la construction d'exemples de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 8, 798—804 (франц.)

Указан способ построения алгебраической нерациональной поверхности F порядка $4n$ в шестимерном проективном пространстве S_6. Поверхность получена пересечением конуса Веронезе V_3^4 с указанной автором гиперповерхностью порядка n. Для изучения поверхности F последняя сначала бирационально отображается на некоторую поверхность F' пространства S_3, а анализ F' выполнен с помощью квадратичного кремонова преобразования

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_4 : y_2 y_4 : y_3 y_4 : y_2 y_3.$$

Аналогично в S_6 строится поверхность F порядка $4p$, на которой коллинеация H устанавливает циклическую инволюцию I периода p (p — простые, $I^p = E$). H является диагональной коллинеацией, собственные числа которой суть степени ε, где ε — первообразный корень степени p из единицы. Построены примеры циклических инволюций на F, для которых поверхность содержит p, $2p$ и ни одной единичной точки (x — единичная точка, если $Ix = x$). О. А. Котий

5106. **Многообразие v_5 пространства s_8, определенное коническими сечениями, соприкасающимися с плоской алгебраической кривой, продолженной в трипотенциальное поле.** Спампинато (La V_5 di S_8 determinata dalle coniche osculatrici una curva algebrica piana prolungata nel campo tripotenziale. Spampinato Nicolò), Ricerca, 1956, 7, 19—28 (итал.)

Настоящая статья является продолжением предыдущей (РЖМат, 1957, 7305).

Основной результат: квадратичный гиперконус V_4^2, порождающий многообразие V_5 пространства S_8 и отвечающий простой фиксированной точке A кривой c^n в S_2, можно построить в соответствии с соприкасающимся к c^n в точке A коническим сечением c^2, если, фиксируя на c^2 точку C и обозначая через b точку пересечения касательных к c^2 в точках A и C, рассмотреть в S_8 плоскость $AB'C''$, где B' и C'' гомологичны точкам B и C в плоскостях S_2' и S_2'' в проективитете $x_j = y_j$ и $x_j = z_j$. Точки плоскости $AB'C''$ с координатами $x_j = n_1 a_j$, $y_j = n_2 b_j$, $z_j = h c_j$, с тройками чисел (h_1, h_2, h), которые дают ∞^1 точек $D(h_1 a_j + h_2 b_j + h c_j)$ кривой c^2, как линейные комбинации точек A, B, C, описывают в плоскости $AB'C''$ коническое сечение γ^2, которое, спроектированное плоскостью $A''B''A'$, дает гиперконус V_4^2 пространства S_5, определяемого точками $AA'A''B'B''C''$.

Из резюме автора

5107. **Некоторые замечания о топологической характеристике алгебраических поверхностей.** Северн (Some remarks on the topological characterization of algebraic surfaces. (Alcune osservazioni sopra la caratterizzazione topologica delle superficie algebriche). Severi Francesco), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press. Inc., 1954, 54—61 (англ.); Rend. mat. e applic., 1957, 16, № 1-2, 161—169 (итал.)

Сформулирован ряд утверждений, содержащих топологическую (или почти топологическую) характеристику некоторых свойств алгебраических поверхностей. Например, утверждается, что геометрический род некоторой поверхности тогда и только тогда равен нулю, когда любой ее двумерный цикл (в топологическом смысле) гомологичен некоторому алгебраическому циклу. Если одномерная целочисленная группа гомологий поверхности F тривиальна и среди поверхностей, бирационально эквивалентных поверхности F, существует поверхность с двумерным числом Бетти, равным единице, то либо поверхность F рациональна, либо ее геометрический род равен нулю, а бирод не меньше десяти (при этом возможность второго случая остается открытой). Кроме того, сформулированы топологические необходимые и достаточные условия для того, чтобы поверхность была рациональной, квадратичной или линейчатой. В частности,

утверждается, что поверхность тогда и только тогда бирационально эквивалентна линейчатой поверхности рода $p>1$, когда ее одномерное число Бетти равно $2p$ и она бирационально эквивалентна поверхности с двумерным числом Бетти равным двум.

М. М. Постников

5108. О тройных точках дирамации кратной поверхности. Годо (Sur les points de diramation triples d'une surface multiple. Godeaux Lucien), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 39—52 (франц.)

В терминах предыдущих работ автора (см., например, РЖМат, 1953, 1367) исследуется строение точки дирамации A' кратной поверхности Ф (для инволюции простого нечетного порядка p, действующей на алгебраической поверхности F) при условии, что указанная точка имеет кратность 3. Предполагается, что соответствующая точка A на поверхности F является точкой второго рода и что касательный конус в точке A' распадается на два рациональных конуса. Изучено поведение в точке A присоединенных линейных систем кривых $C_0^{(k)}$ (РЖМат, 1955, 5257). Подробно рассмотрен случай, когда $p\equiv 1 \pmod 6$. И. З. Розенкноп

5109. Алгебраическая теория листов алгебраического многообразия. Мацумура, Нагата (On the algebraic theory of sheets of an algebraic variety. Matsumura Hideyuki, Nagata Masayoshi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1957, A. Math., 30, № 2, 157—164 (англ.)

Автор ставит перед собой задачу перевести метод аналитических ветвей (или листов), примененный ранее Севери (Severi F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Berlin, 1921), на язык локальной алгебры. Для этого в § 1 определяется число $dn(p)$ (decomposition number), где p — примарный идеал основного кольца, которое является алгебраическим выражением понятия числа листов многообразия в данной точке.

Из свойств $dn(p)$ следует теорема: Пусть V — r-мерное многообразие. Тогда те точки V, которые «разлагаются» в d или более точек производного многообразия $\bar{V}$ многообразия V, вместе с их специализациями составляют алгебраическое множество B_d многообразия V. Если V вложено в «$r+1$»-мерное не сингулярное многообразие U, то каждая компонента B_d имеет размерность $\geqslant r+1-d$. Здесь выражение «P разлагается в d точек V» можно заменить выражением «V имеет d листов (sheets) в P».

В § 2 и § 3 полученная теорема применяется для решения конкретных вопросов алгебраической геометрии. В частности, в § 3 для случая гензелевых колец (см., например, РЖМат, 1954, 3257) доказывается теорема: Каждая компонента пересечения некоторого листа с одним или более алгебраическими многообразиями есть также лист алгебраического многообразия.

В. И. Ведерников

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

5110. О двух замечательных кривых. Поццоло-Феррарис (Sopra due curve notevoli. Pozzolo Ferraris Giulia), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 1, 46—49 (итал.)

Рассматривается пространственная кривая γ, описанная точкой, зависящей от переменного параметра t: $P(t)$. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали кривой γ в точке P, направленный в центр ее кривизны C. Плоскость α, перпендикулярная $\mathbf{n}$ в окрестности точки P, пересекает кривую γ в двух точках P_1 и P_2 по разные стороны от P. Пусть M — средняя точка между P_1 и P_2. При перемещении плоскости α точка M опишет некоторую кривую, проходящую через точку P; эту кривую назовем диаметральной для γ относительно P.

Направление касательной $\mathbf{u}$ к диаметральной кривой в точке P определяется вектором

$$\mathbf{u}=-(\mathbf{P}'''\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{P}'+3\,(\mathbf{P}''\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{P}''.$$

Если за параметр взять дугу s кривой γ, то вектор $\mathbf{u}$ принимает вид

$$\mathbf{u}=\frac{3}{\rho^2}\left(\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\mathbf{t}+\mathbf{n}\right),$$

где ρ — радиус кривизны кривой γ и $\mathbf{t}$ — ее вектор касательной.

Если кривая γ плоская, то $\frac{d\rho}{ds}=\frac{\rho_1}{\rho}$, где ρ_1 — радиус кривизны ее эволюты, а отсюда автор получает, что радиус кривизны эволюты плоской кривой равен утроенному отрезку нормали этой эволюты между центром кривизны кривой и касательной к диаметральной кривой в соответствующей точке (относительно данной кривой).

Это свойство было получено Тиссераном.

М. П. Черняев

5111. О сферическом отображении образующих линейчатой поверхности. Горовара (On spherical representation of generators of a ruled surface. Gorowara K. K.), Ганита, Ganita, 1953, 4, № 1, 85—91 (англ.)

Доказывается теорема: Кручение сферического отображения образующих линейчатой поверхности равно произведению параметра распределения нормали рассматриваемой поверхности на кривизну сферического отображения образующих.

В статье имеются и некоторые другие результаты.

С. Г. Кислицын

5112. Винтовые коноиды или неразвертываемые геликоиды. Пурышев М. М., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 1 (49), 31—40

Рассматриваются четыре вида коноидов.

1. Прямой винтовой коноид постоянного шага. Направляющими служат винтовая линия постоянного шага, навитая на прямом круговом цилиндре, и ось цилиндра. Плоскость параллелизма перпендикулярна оси цилиндра.

2. Прямой винтовой коноид осе-переменного шага. Одной из направляющих является винтовая линия переменного шага.

3. Наклонный коноид радиально-переменного шага. Криволинейная направляющая — винтовая линия постоянного шага; плоскость параллелизма составляет с прямолинейной направляющей некоторый угол γ ($\gamma\neq 90°$).

Если в первых двух случаях все образующие перпендикулярны к прямолинейной направляющей, то у наклонного коноида радиально-переменного шага образующие составляют разные углы с прямолинейной направляющей в пределах от $90°-\gamma$ до $90°+\gamma$. В первых двух случаях все образующие, заключенные между двумя направляющими, равны между собой и равны радиусу цилиндра, на котором навита винтовая линия. В третьем случае величина образующей, заключенной между двумя направляющими, колеблется от величины радиуса цилиндра до величины радиуса, деленного на $\cos\gamma$.

4. Наклонный винтовой коноид осе-радиально-переменного шага. Криволинейная направляющая — вин

товая линия переменного шага. Плоскость параллелизма составляет с прямолинейной направляющей угол γ ($\gamma \neq 90°$).

Коэффициент $k = d/\alpha$, где d — смещение вдоль прямолинейной направляющей, α — соответствующий угол поворота образующей, в первом случае есть величина постоянная, в трех последних — переменная.

С каждым коноидом сопряжен развертывающийся геликоид.

Если прямолинейная направляющая не совпадает с осью цилиндра, на котором навита винтовая линия, то получаются новые виды коноидальных поверхностей. Вводится понятие эксцентриситета коноида $s = d/r$, где d — смещение прямолинейной образующей от оси цилиндра, а r — радиус цилиндра. Если прямолинейная образующая отклоняется от вертикального положения на угол γ, то угол γ называется углом прецессии. В. А. Иглицкая

5113. О линейчатых поверхностях. Франкс (Sur les surfaces réglées gauches. F r a n c k x E.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, 24, № 10, 296—300 (франц.)

Рассматривается линейчатая поверхность, определенная своей стрикционной линией $\bar{M}(s)$ и единичным вектором сферического отображения $\bar{i}(s)$, где s — длина дуги стрикционной линии. К каждой точке M стрикционной линии присоединяется неортогональный триэдр, образованный единичным вектором $\bar{i}$, единичным вектором касательной к стрикционной линии — $\bar{t}$ и единичным вектором $\bar{j}$, где $\bar{j} = k\frac{d\bar{i}}{ds}$, $k > 0$. Первые два вектора лежат в центральной плоскости, а вектор $\bar{j}$ к ней перпендикулярен.

Автор называет точку $\bar{Q}(s_0, u)$ развертывающейся поверхности $\bar{Q}(s_0, u) = \bar{M}(s_0) + u\bar{i}(s_0)$, «ассоциированной» с точкой $\bar{P}(s_0, u)$ данной линейчатой поверхности, а ассоциированной с $\bar{P}(s_0, u)$ прямой — прямую $\Delta(s_0, u)$, по которой пересекаются касательная плоскость поверхности в точке $\bar{P}(s_0, u)$ с плоскостью триэдра $M\bar{t}\bar{j}$. Прямая $\Delta(s_0 u)$ проходит через точку M и ее направление определяется вектором $d\bar{P}/ds = \bar{t} + u\,d\bar{i}/ds$.

Перпендикуляры опущенные из сопряженных точек $\bar{Q}(s_0, u)$ на соответствующие прямые $\Delta(s_0, u)$ проходят через фиксированную точку D. Эта точка, которую автор называет точкой распределения образующей s_0, лежит на нормали к центральной плоскости и определяется вектором $\overline{MO} = k\bar{j}$.

Автор называет окружностью распределения образующей s_0 окружность Г, лежащую в плоскости $M\bar{i}\bar{j}$ и имеющую MO своим диаметром. Точка пересечения прямой, соединяющей точки D и $Q(s_0, u_0)$ с окружностью Г, определяет положение прямой $\Delta(s_0, u)$ и, следовательно, и касательную плоскость. Если Q_0 — угол между $\bar{t}$ и $\Delta(s_0, u)$, то $u_0 = k \operatorname{tg} Q_0$. Геометрическое значение k следует из формулы $\frac{1}{k} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{Q}{\Delta s}$, где Q — угол между $\bar{i}(s)$ и $\bar{i}(s + \Delta s)$.

Когда точка P совпадает с ассоциированной точкой Q, то данная поверхность — развертывающаяся. Л. Я. Березина

5114. О поверхностях $rt - s^2 = K = \text{const}$ и их связи с поверхностями $Kr + t = 0$. Штрубеккер (Über die Flächen $rt - s^2 = K = \text{konst.}$ und ihren Zusammenhang mit den Flächen $Kr + t = 0$. S t r u b e c k e r K a r l), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1957, **21**, № 1-2, 99—103 (нем.)

Интегральная поверхность уравнения в частных производных в обозначениях Монжа

$$rt - s^2 = K = \text{const} \quad (K \neq 0) \qquad (1)$$

называется аффинной сферой. В изотропном пространстве аффинная сфера имеет постоянную изотропно релятивную кривизну. Параболоид

$$2z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad D = a_{11}a_{22} - a_{12}^1 \neq 0 \qquad (2)$$

называется изотропной сферой.

I. Если поверхность постоянной изотропной релятивной кривизны содержит сферическую полосу изотропной сферы, т. е. точки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $dz = pdx + qdy$, удовлетворяют (2), то поверхность автополярна относительно изотропной сферы (2).

II. Поверхность Ф постоянной релятивной кривизны в изотропном преобразовании «прямая → сфера» переводится в интегральную поверхность уравнения $K\bar{r} + \bar{t} = 0$.

III. В изотропном преобразовании «прямая—сфера» линии кривизны переходят в асимптотические линии.

IV. Если изотропная минимальная поверхность $r \pm t = 0$ содержит (вещественную) не изотропную прямую, то она (в смысле изотропной кинематики) относительно этой прямой симметрична. М. П. Черняев

5115. О каноническом пучке. Георгиу (Asupra fasciculului canonic. G h e o r g h i u Gh. Th.), Lucrările consfăt. geom. diferenț. 1955. Timișoara Acad. RPR., 1956, 189—200 (рум.; рез. русск., франц.)

Если y_0, y_1, y_2 — проективные координаты точки плоскости, то квартикой с тройной точкой называется кривая четвертого порядка, определяемая уравнением

$$a_1y_1^4 + 4a_2y_1^3y_2 + 6a_3y_1^2y_2^2 + 4a_4y_1y_2^3 + a_5y_2^4 = \\ = a_0y_0(y_1 + m_1y_2)(y_1 + m_2y_2)(y_1 + m_3y_3) \qquad (1)$$

(a_0, a_1, ..., a_5, m_1, m_2, m_3 — некоторые коэффициенты). Каждой такой квартике может быть сопоставлен некоторый пучок кривых 2-го порядка (Γ_λ). Прямые Δ_λ, являющиеся полярами тройной точки (для уравнения (1) это есть точка (1 : 0 : 0)) относительно кривых Γ_λ, называется главными прямыми квартики. Все главные прямые образуют пучок, центр которого называется главной точкой квартики. Прямая Δ_∞ носит название прямой Тольятти.

Квартика имеет два абсолютных инварианта, из которых первый (R) есть сложное отношение четырех точек прямой Тольятти — главной точки и трех точек пересечения этой прямой с тремя касательными к квартике в тройной точке, а второй (S) — некоторая рациональная функция от сложного отношения четырех точек пересечения прямой Тольятти с квартикой.

Полагая в фундаментальных уравнениях поверхности в проективном пространстве $\overset{*}{x}_{uu} = p\overset{*}{x} + \theta_u\overset{*}{x}_u + \beta\overset{*}{x}_v$, $\overset{*}{x}_{vv} = q\overset{*}{x} + \gamma\overset{*}{x}_u + \theta_v\overset{*}{x}_v$ коэффициент θ равным $\ln\beta\gamma$, получают проективную нормаль поверхности $\overset{**}{x}_{uv}$. Проектируя из точки $\overset{*}{x}_{uv}$ на касательную плоскость три линии Дарбу, автор получает двупараметрическое семейство квартик (C_D) с тройной точкой в исследуемой точке поверхности, у которых каждая ветвь, проходящая через тройную точку, имеет с проекцией соответствующей линии Дарбу три общих точки. Аналогично получается двупараметрическая совокупность квартик (C_S) для линий Сегре. При специальном выборе параметров из совокупностей C_D и C_S выделяются две специальные квартики C_1 и C_2.

Автор доказывает, что рациональная функция (R_1) от R, аналогичная функции S, равно как и сама

функция S, представляют собой некоторые инварианты поверхности и не зависят от выбора квартики из совокупности C_D. Подобным же свойством обладают и все квартики из совокупности C_S, причем в этом случае между инвариантами R_1 и S имеет место зависимость $R_1 = -4S$.

Доказывается, что геометрическое место главных точек квартик как совокупности C_D, так и совокупности C_S есть вторая каноническая касательная поверхности.

Если потребовать, чтобы главные точки совокупностей C_D и C_S совпадали, то можно заключить, что главные прямые, отвечающие одному и тому же значению λ, будут также совпадать. В частности, если потребовать в этом случае, чтобы общая прямая Тольятти квартик C_D и C_S совпадала со стороной $x_u^* x_v^*$ координатного трехсторонника на касательной плоскости, то окажется, что единственными квартиками, для которых это возможно, являются квартики C_1 и C_2. В рассматриваемом случае каждая главная прямая, общая двум квартикам, будет совпадать с некоторой прямой второго канонического пучка, что дает возможность давать новые геометрические характеристики каноническим прямым. В частности: 1) вторая главная нормаль есть общая прямая Тольятти двух квартик C_1 и C_2; 2) вторая директриса Вильчинского есть общая поляра точки поверхности относительно двух кривых второго порядка, содержащих точки перегиба квартик C_1 и C_2; 3) точки пересечения указанных кривых второго порядка с квартиками, не являющиеся точками перегиба, лежат на второй оси Чеха.

Отмечается одна новая каноническая прямая — общая поляра точки поверхности относительно тех кривых второго порядка, которые содержат 8 точек прикосновения бикасательных к квартикам C_1 и C_2.

Н. И. Кованцов

5116. Об одном инварианте Бомпиани. Маркус (Asupra unui invariant al lui Bompiani. Marcus F.), Lucrările consfăt. geom. diferent. 1955. Timişoara Acad. RPR., 1956, 209—214 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается инвариант Бомпиани $I = (x, dx, d^2x, d^3x)/(\zeta, d\zeta, d^2\zeta, d^3\zeta)$, где x — координаты точки поверхности в проективном пространстве, а ζ — координаты касательной плоскости этой поверхности, определенным образом нормированные. Линия, для которой подсчитывается инвариант I, включается в некоторое однопараметрическое семейство линий (c). Берется семейство (c'), с ним сопряженное, и для кривых этого семейства подсчитывается аналогично инвариант I'. Доказывается, что

$$I = \frac{N'}{N_1} = \frac{i_2}{\bar{i}_2}, \qquad I' = \frac{N_1'}{N} = \frac{\bar{i}_1}{i_1}, \tag{1}$$

где N' и N_1 есть соответственно дуальный инвариант конгруэнции (C) касательных к линиям (c) и точечный инвариант конгруэнции (C') касательных к линиям (c'), а i_2 и $\bar{i}_2$ — соответственно второй точечный и тангенциальный инварианты уравнения Лапласа, которое соответствует сети линий (c) и (c'). Аналогично определяются величины N_1', N, $\bar{i}_1$, i_1.

Из равенств (1) следует, что в случае $II' = 1$ асимптотические линии на вторых фокальных поверхностях конгруэнции (C) и (C') соответствуют друг другу. В случае $II' = -1$ асимптотические линии на второй фокальной поверхности одной конгруэнции соответствуют сопряженной сети линий на второй фокальной поверхности другой конгруэнции.

Пусть теперь между некоторой парой поверхностей S и S^* установлено соответствие с сохранением асимптотических линий и пусть c и c^* — два какие-либо соответствующие друг другу однопараметрические семейства кривых на этих поверхностях. Доказывается, что: 1. Если инвариант

$$(x, dx, d^2x, d^3x)/12(xx_vx_ux_{uv})(dudv)^2 \tag{2}$$

кривых c и дуальный инвариант

$$(\zeta, d\zeta, d^2\zeta, d^3\zeta)/12(xx_vx_ux_{uv})(dudv)^2 \tag{3}$$

кривых, сопряженных с c на S, равны соответствующим инвариантам кривых c^* и им сопряженных на S^*, то конгруэнции касательных к кривым c и c^* проективно наложимы друг на друга.

2. Если инвариант (2) кривых c и инвариант (3) кривых, сопряженных им на S, равны соответственно инварианту (3) кривых c^* и инварианту (2) кривых, сопряженных им на S^*, то наложимость конгруэнции касательных к кривым c и конгруэнции касательных к кривым c^* есть наложимость 2-го рода (Terracini A., Atti Ist. Veneto, 1934—1935, 94, 75—86).

3. Доказывается теорема Фубини о том, что конгруэнция W с $N = 0$ принадлежит некоторому специальному линейному комплексу.

Н. И. Кованцов

5117. Аналог поверхностей переноса в геометрии Лобачевского. Бланк Я. П., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 80, Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 25, 35—44

Аналог поверхностей переноса евклидова пространства в пространстве Лобачевского автор определяет как поверхности, несущие сопряженную сеть, у которой вдоль каждой линии, принадлежащей любому из двух семейств сети, касательные к линиям второго семейства суть параллели Лобачевского, т. е. образуют конус с вершиной на абсолюте.

Доказывается, что в пространстве Лобачевского цилиндрическая сеть (под цилиндром понимается конус с вершиной на абсолюте) есть сеть равных путей и что сопряженность сети равных путей необходима, но недостаточна для того, чтобы она была цилиндрической. Чтобы сопряженная сеть на поверхности пространства Лобачевского была цилиндрической, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция λ, удовлетворяющая условиям

$$Rd\ln\lambda = ds_1 + ds_2,$$

$$\lambda \cdot \Delta\lambda + \cos\theta \cdot \nabla\lambda = 0,$$

где θ — сетевой угол, ds_1 и ds_2 — дифференциалы дуг линий сети, R — постоянная пространства Лобачевского, а параметры Бельтрами составлены относительно квадратичной формы, нулевыми линиями которой служат линии сети.

Дается система двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, совместность которой необходима и достаточна для существования на поверхности пространства Лобачевского (отнесенной к асимптотическим координатам) цилиндрической сети и каждое решение которой определяет такую сеть. Этот прием применим и к поверхностям переноса евклидова пространства.

Если аналог поверхности переноса имеет более трех цилиндрических сетей, то он несет таких сетей ∞^1. Такими поверхностями являются только некоторые поверхности второго порядка и минимальные линей-

чатые поверхности, определяемые коэффициентами первой и второй основных форм

$$E=V^2,\quad F=0,\quad G=1;\quad L=0,\quad M=\frac{C}{V^2},\quad N=0,$$

где $V(v)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{V''}{V}-\frac{C^2}{V^4}+1=0,$$

а C — постоянная. К. К. Мокрищев

5118. О бинарных квадратичных формах в геометрии. Джха (On binary quadratic forms in geometry. Jha P.), Ганита, Ganita, 1956, 7, № 1, 7—11 (англ.)

Инвариант $2\sqrt{ac-b^2}\sqrt{\beta^2-a\gamma}/(a\gamma+c\alpha-2b\beta)$ двух бинарных квадратичных форм $f=adu^2+2bdudv+cdv^2$ и $\varphi=adu^2+2\beta dudv+\gamma dv^2$, из которых первая мнима, называется тангенсом угла ψ формы φ относительно f, а равенство $a\gamma+c\alpha-2b\beta=0$ называется условием ортогональности двух линий $\varphi=0$, независимо от того, является ли форма φ действительной или мнимой. Якобиан I форм f и φ — всегда действительная форма, а кривые $I=0$ ортогональны между собой. При помощи введенных понятий доказывается ряд известных результатов, а также устанавливается следующее.

1. Выводится формула $\mu=\mu_1\cos^2\theta+\mu_2\sin^2\theta$, где $\mu=\varphi/f$, μ_1 и μ_2 — экстремальные значения μ, а θ — угол формы $(ldu+mdv)(pdu+qdv)$ относительно формы f, причем $I=(ldu+mdv)(l'du+m'dv)$, а $pdu+qdv$ — произвольная линейная форма. Частными случаями этой формулы оказываются формула Эйлера теории поверхностей, формула для параметра распределения линейчатой поверхности и формула Гамильтона теории конгруэнций.

2. Две линейчатые поверхности конгруэнции, линии сжатия которых лежат на ее средней поверхности, отображаются в две взаимно перпендикулярные кривые на сфере единичного радиуса.

3. На средней или фокальной поверхности конгруэнции кривые $F=adu^2+(b+b')dudv+cdv^2=0$ (F — вторая фундаментальная форма конгруэнции) взаимно ортогональны только тогда, когда одна из них есть ортогональная траектория лучей конгруэнции, и наоборот, если одна из кривых $F=0$ есть ортогональная траектория лучей конгруэнции, то кривые $F=0$ будут ортогональны лишь тогда, когда поверхность отнесения есть средняя или фокальная поверхность конгруэнции. Н. И. Кованцов

5119. Линейчато-геометрический аналог триортогональной системы поверхностей. Кованцов Н. И., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 3, 497—500

Методом внешних форм Картана доказываются две теоремы: 1) Если комплекс распадается на ∞^1 конгруэнций, фокусы которых совпадают с точками прикосновения одной из главных поверхностей (РЖМат, 1955, 2846), то этими конгруэнциями могут быть только конгруэнции W; наоборот, если комплекс содержит в каждом луче конгруэнцию W (требование голономности не выдвигается), фокусы которой совпадают с точками прикосновения главной поверхности, то он распадается на ∞^1 таких конгруэнций, т. е. последние автоматически оказываются голономными; 2) Если комплекс распадается на ∞^1 конгруэнций W, фокусы которых совпадают с точками прикосновения одной из его главных поверхностей, то он еще двумя способами распадается на ∞^1 конгруэнций W, фокусы которых совпадают соответственно с точками прикосновения двух других главных поверхностей комплекса; при этом каждые две главные поверхности комплекса принадлежат конгруэнции, фокусы которой совпадают с точками прикосновения третьей главной поверхности, соединяя асимптотические линии на фокальных поверхностях этой конгруэнции (произвол такого комплекса — три функции двух аргументов).

Устанавливается своеобразная параллель, в которой понятиям: а) комплекс, удовлетворяющий условию первой теоремы, б) конгруэнции W, расслаивающие комплекс, в) главные поверхности комплекса, г) линейчатая поверхность конгруэнции, д) демиквадрика (автор называет ее квадрикой. *Реф.*), е) развертывающаяся поверхность конгруэнции — соответствуют в точечном пространстве понятия: а) триортогональная система поверхностей, б) поверхности системы, расслаивающие трехмерное точечное пространство, в) линии кривизны поверхностей системы, г) линия на поверхности системы, д) окружность (включая и прямую), е) изотропная кривая на поверхности.

В этой связи разыскиваются классы комплексов, аналогичные некоторым частным классам триортогональных систем поверхностей. К. И. Гринцевичюс

5120. О линеаризирующих соответствиях и внутренне определенных реперах в паре точек с нулевым якобианом. Кантони (Sulle corrispondenze linearizzanti e sui riferimenti intrinseci in una coppia a jacobiano nullo. Cantoni Lionello), Bol. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 3, 402—411 (итал.)

Следуя методу Вилла (реф. 5121), примененному им к построению реперов и определению канонических форм для точечных преобразований плоскостей π, π' в точке O с нулевым якобианом, автор решает аналогичную задачу для точечного преобразования пространств S_r размерности $r>2$. В. В. Рыжков

5121. Еще о внутренне определенных реперах для точечных преобразований в парах точек с нулевым якобианом. Вилла (Ancora sui riferimenti intrinseci per le trasformazioni puntuali in una coppia a jacobiano nullo. Villa Mario), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 343—345 (итал.)

Работа примыкает к серии работ того же автора, в которых для изучения точечных преобразований плоскостей (пространств) применяется понятие линеаризующего соответствия двух точечных преобразований. В данном случае рассматривается точечное преобразование T плоскостей $\pi(x, y)$, $\pi'(x', y')$ в паре точек O, O', где O — простой нуль якобиана преобразования. Строится пара проективных реперов в точках O и O', инвариантно связанных с преобразованием; по отношению к этим реперам уравнения преобразования принимают, с точностью до малых выше третьего порядка, вид:

$$x'=y+a_{30}x^3+3a_{21}x^2y+3a_{12}xy^2+(4)$$

$$y'=y^2-x^2+b_{30}x^3+3b_{21}x^2y+2xy^2+b_{03}y^3+(4),$$

где

$$b_{30}=2(a_{30}+6a_{21}+12a_{12}-3b_{21}-4b_{03}-4).$$

В. В. Рыжков

5122. Тангенциальное изгибание поверхностей и связанные с ним задачи. Рыжков В. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 166—167

Рассматривается связь задачи о тангенциальном изгибании невырожденной поверхности V_n аффинного или евклидова пространства E_N с задачами о преобразовании параллелизма этой поверхности и об отыскании на ней полных сопряженных систем.

М. А. Акивис

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

5123. Тензорное исчисление и функциональные операторы. Заметка II. Налли (Calcolo tensoriale ed operazioni funzionali. Nota II. Nalli Pia), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 2, 131—144 (итал.)

Иллюстрируется идея автора об аналогии между тензорами и линейными функциональными операторами на примере тензора 3-й валентности, дважды ковариантного и раз контравариантного, подобно тому, как в первой заметке это было сделано для смешанного тензора 2-й валентности (РЖМат, 1957, 8189).

Ю. Е. Пензов

5124. К теории геометрических объектов. V. Ковариантная производная дифференциальных геометрических объектов первого и второго класса в одномерном пространстве. Ацел (Beitrage zur Theorie der geometrischen Objekte. 5. Kovariante Ableitungen von differentiellen geometrischen Objekten erster und zweiter Klasse im eindimensionalen Raum. Aczel J.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 1-2, 53—64 (нем.)

Настоящая работа является продолжением двух ранее изданных работ автора (РЖМат, 1958, 676, 3234).

Ковариантная производная геометрических объектов в одномерном пространстве определяется по Голомбу (РЖМат, 1955, 5281). Находятся выражения ковариантной производной объектов 1-го и 2-го классов с произвольным числом компонент.

Примечание референта. Автору, по-видимому, неизвестна общая теория ковариантного дифференцирования геометрических объектов, разработанная В. Вагнером (Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1950, в. VIII, 11—72). Ю. Е. Пензов

5125. Теория фокальных конгруэнций. Гейдельман Р. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 147

Кратко сформулированы итоги ряда работ автора, в которых рассматриваются конгруэнции и псевдоконгруэнции k-мерных плоскостей в пространстве P_n с абсолютом Q_{n-1}, и приложения этой теории к конформной геометрии и к проблеме расслоения в проективном и неевклидовом пространствах.

М. А. Акивис

5126. Многолокальные римановы многообразия. Оническу (Variétés riemanniennes multilocales. Onicescu O.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e. natur., 1957, 22, № 2, 154—157 (франц.).

Пусть E^n — n-мерное евклидово пространство, E — прямая, dP^2 — евклидова метрика в пространстве E^n. Рассматриваются m квадратичных форм в пространстве $E^{nm+1} = E_1^n \times \ldots \times E_m^n \times E$ вида $(ds_l)^2 = a_l(dP_l)^2 + b_l dt^2$, где $P_l \in E_l^n$, $t \in E$, a_l и b_l — положительные дифференцируемые функции от $P_1, \ldots, P_m$ ($l = 1, \ldots, m$). Строятся некоторые инварианты этого набора квадратичных форм. Указывается возможность обобщения на произвольные римановы пространства.

А. Л. Онищик

5127. Обобщенные однородные контактные преобразования. Миками (The generalized homogeneous contact transformations. Mikami Misao), Кюсю дайгаку когакубу киё, Mem. Fac. Engng, Kyushu Univ., 1956, 15, № 2, pp. 181—212 (англ.)

В работе рассматривается теория однородных контактных преобразований в многообразии гиперповерхностных элементов высшего порядка. Преобразование в многообразии гиперповерхностных элементов $(x^i, p_i, p_{i_1 i_2}, \ldots, p_{i_1 i_2 \ldots i_m})$ порядка m ($m \geqslant 2$) называется обобщенным однородным контактным преобразованием, если оно сохраняет вид соотношений

$$p_i dx^i = 0, \quad dp_i - p_{ij} dx^j = 0, \quad \ldots$$

$$\ldots dp_{i_1 \ldots i_{m-1}} - p_{i_1 \ldots i_{m-1} j} dx^j = 0$$

Основное значение для развития теории имеет полный дифференциальный оператор

$$\vartheta_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + p_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} + \ldots + p_{i_1 \ldots i_m j} \frac{\partial}{\partial p_{i_1, \ldots i_{m-1}}}$$

и величины

$$x^{i'}_j = \vartheta_j x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + p_{kj} \frac{\partial x^{i'}}{\partial p_k} + \ldots$$

Эти последние играют для обобщенных контактных преобразований ту же роль, что величины $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$ для точечных преобразований координат. При их помощи, а также при помощи обратных им величин $x^j_{i'}$ в многообразии гиперповерхностных элементов определяются ковариантные, контравариантные и смешанные тензоры. Далее вводится «базисная связность» и при ее помощи обычным путем определяется ковариантное дифференцирование.

Большое место в работе уделено исследованию функциональной формы зависимости преобразованных величин $p_{i'_1 \ldots i'_2}$ от своих аргументов $x^i, p_{i_1}, \ldots, p_{i_1 \ldots i_r}, \ldots$

Геометрическое рассмотрение обобщенных контактных преобразований должно составить содержание следующей работы автора. М. А. Акивис

5128. Некоторые теоремы «в целом» для гиперповерхностей. Сюн Чжуан-чжи (Some global theorems on hypersurfaces. Hsiung Chuan Chin), Canad. J. Math., 1957, 9, № 1, 5—14 (англ.)

Распространяются некоторые теоремы Хоифа и Фосса, относящиеся к поверхностям трехмерного евклидова пространства, на случай гиперповерхностей в E_n. В частности:

Если между двумя замкнутыми гиперповерхностями V и V^* установлен гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию, так что в соответствующих точках этих гиперповерхностей средние кривизны равны, прямые, соединяющие соответствующие точки гиперповерхностей, параллельны некоторому направлению R и на гиперповерхностях нет цилиндрических частей с образующими, параллельными этому направлению, то гиперповерхности V и V^* можно совместить сдвигом в направлении R.

Доказательство основано на интегральном тождестве для поверхностей в указанном расположении

$$n \int_V (M^* - M)(r^* - r)\, n dA + \int_V (1 - nn^*)(dA + dA^*) = 0,$$

где r и r^* — векторы соответствующих точек гиперповерхностей, n и n^* — единичные векторы нормали, M и M^* — средние кривизны, dA и dA^* — элементы площади. При $M = M^*$ получается $nn^* = 1$, т. е. $n \parallel n^*$. Отсюда очевидна возможность совмещения сдвигом в направлении R гиперповерхностей V и V^*

Имеет место соответствующая теорема для незамкнутых гиперповерхностей, если их границы можно совместить сдвигом в направлении R. А. В. Погорелов

5129. Обобщенные асимптотические линии в римановых многообразиях. Холдер, Бехари (Generalised asymptotic lines in Riemannian manifolds. Halder Gita, Behari Ram), анита; Ganita, 1956, 7, № 1, 45—53 (англ.)

Рассматривается гиперповерхность V_n в $(n+1)$-мерном римановом пространстве V_{n+1}. Авторы называют обобщенной асимптотической линией в V_n кривую, касательный вектор которой самосопряжен, а также сопряжен относительно второго фундаментального тензора гиперповерхности V_n в V_{n+1} с первыми $n-2$ главными нормалями рассматриваемой кривой. Доказывается для обобщенной асимптотической линии C, что ее первые $n-1$ главных нормалей относительно V_{n+1} совпадают соответственно с ее главными нормалями относительно V_n. (Отсюда следует, что обобщенные асимптотические линии, определенные выше, являются асимптотическими линиями $(n-1)$-го порядка гиперповерхности в V_{n+1}; см. И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, Изд-во ин. лит., 1948, 2, 87). Изучаются некоторые свойства обобщенных асимптотических линий, в частности для случая, когда V_{n+1} является евклидовым пространством, даны обобщения известных формул для кручения асимптотических линий. А. Е. Либер

5130. Заметка о семействе параллельных гиперповерхностей в римановом V_n. Сингал, Бехари (A note on a family of parallel hypersurfaces in a Riemannian V_n. Singal M. K., Behari Ram), Math. Student, 1957, 25, № 1-2, 19—20 (англ.)

Доказывается, что семейство геодезически параллельных гиперповерхностей является изометричным (изотермическим) тогда и только тогда, если его средняя кривизна постоянна вдоль любой поверхности семейства.

С этой целью обобщается понятие изотермического семейства $\infty^1 V_{n-1}$ (Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, Изд-во ин. лит., М., 1948, 144): семейство $\varphi = \text{const}$ называется изометрическим (или изотермическим), если $\nabla^2\varphi/(\nabla\varphi)^2$ является функцией только от φ. Средней кривизной семейства называется величина $M = -\operatorname{div} N$, где $N = \nabla\varphi/\sqrt{(\nabla\varphi)^2}$ — единичный вектор, нормальный к V_{n-1}. Ю. Г. Лумисте

5131. О преобразованиях с несколькими параметрами и о действиях в многомерных пространствах. Ацел, Хоссу (On transformations with several parameters and operations in multidimensional spaces. Aczél J., Hosszú M.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 7, № 3-4, 327—338 (англ.; рез. русск.)

Преобразования $y = f(x, U)$ векторного пространства $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в пространство $y = (y_1, \ldots, y_n)$, зависящие от m параметров $(u_1, \ldots, u_m) = U$, образуют полугруппу, если $f(f(x, U), V) = f(x, W)$, где $W = U \circ V$ — функция $2m$ параметров U и V. При определенных предположениях о разрешимости уравнений вида $f(x, U) = y$ выводится вид функции f (насколько эти предположения ограничивают общность, не указано). Если $U \circ V \equiv U + V = (u_1 + v_1, \ldots, \ldots, u_m + v_m)$, то выводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы преобразование имело вид $f(x, U) = g^{-1}(g(x) + CU)$, где C — некоторая $n \times m$-матрица. Получены также условия, необходимые и достаточные для того, чтобы непрерывная операция $U \circ V$, удовлетворяющая условиям ассоциативности и коммутативности, имела вид $U \circ V = G^{-1}(G(U) + G(V))$, где G — топологическое отображение m-мерного пространства на себя.

Случай $m = 1$ был исследован ранее (см., в частности, РЖМат, 1956, 5916). А. Д. Мышкис

5132. Об обобщенных римановых пространствах. Деви-Синг (On generalised Riemann spaces. Devi Singh Kamla), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 1—2, 125-138 (англ.)

Статья посвящена обобщенному риманову пространству, т. е. пространству с несимметрическим фундаментальным тензором g_{ij}. При помощи аффинной связности, определенной Эйзенхартом, вычисляются формула Риччи, тождества Бианки и т. д., определяются параллельное перенесение векторов и геодезических линий. Однако почти все результаты представляют собой частные случаи известных результатов о пространстве аффинной связности с кручением. В статье еще рассматриваются конгруэнции кривых, ортогональных по римановой метрике $g_{(ij)}$, и вычисляются коэффициенты Риччи по связности с кручением. Очевидной является теорема: Движение (или аффинное движение) обобщенного риманова пространства представляет собой движ ние (или аффинное движение) риманова пространства с метрикой $g_{(ij)}$. Гу Чао-хао

5133. К теории углов в двумерных пространствах Минковского и Финслера. Липман (Zur Winkeltheorie in zweidimensionalen Minkowski- und Finsler-Räumen. Lippmann Horst), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, A60, № 2, 162—170; Indagationes math., 1957, 19, № 2, 162—170 (нем.)

Пусть Z^n — векторное пространство n измерений, φ — n-мерное многообразие в смысле Веблена и Уайтхеда. Если в Z^n введена метрика посредством основной метрической функции $F(x)$, обладающей свойствами: 1) $F(x)$ два раза непрерывно дифференцируема в любой точке $x \neq 0$ и $F(x) > 0$, если $x \neq 0$; 2) $F(kx) = |k| F(x)$, где k — действительное число; 3) $\dfrac{\partial^2 F(x)}{\partial x^i \partial x^k} y^i y^k > 0$, если x, y линейно независимые, то Z^n называется n-мерным пространством Минковского M^n. Если с каждой точкой p n-мерного многообразия φ связано касательное пространство Минковского, то φ называется n-мерным пространством Финслера.

Автор показал, что двумерное пространство Минковского (а также и пространство Финслера) можно определить при помощи угловой функции.

Примечание референта. На стр. 163 автор ссылается на работу Веблена и Уайтхеда (ссылка 9), но в списке литературы эта работа не приводится. В. И. Близникас

5134. Обобщения конгруэнций кривых в римановом пространстве. Мишра, Кришна (Generalisations of the congruences of curves in Riemannian space. Mishra R. S., Krishna Shri), Tensor, 1956, 6, № 2, 125—131 (англ.)

Обозначения: V_m — риманово пространство, V_n — некоторое его подпространство, через каждую точку P которого проходит одна кривая каждого семейства некоторой $(m-n)$-сети конгруэнций. λ^α_τ $(\alpha = 1, \ldots, m, \tau = n+1, \ldots, m)$ — контравариантные компоненты единичного вектора, касательного к какой-либо конгруэнции λ_τ. N^α_ν $(\alpha = 1, \ldots, m, \nu = n+1, \ldots, m)$ — контравариантные компоненты $m-n$ взаимно перпендикулярных единичных векторов, нормальных к V_n. C — некоторая кривая на V_n, проходящая через P. $\delta\lambda^\alpha_\tau/\delta c$ — производная вектора λ^α_τ вдоль кривой C, ω^α_τ — единичный вектор, а $\bar{k}_\tau$ — модуль вектора $\delta\lambda^\alpha_\tau/\delta s$. Величина $\bar{k}_\tau$ называется абсолютной кривизной конгруэнции λ_τ в точке P относительно кривой C. $\omega_{\tau\nu}$ —

угол между векторами $N^{\alpha}_{\nu|}$ и $\omega^{\alpha}_{\tau|}$. Величина $k_{\tau|}\cos\omega_{\tau\nu|}$ называется нормальной кривизной конгруэнции $\lambda_{\tau|}$, соответствующей вектору $N^{\alpha}_{\nu|}$. $\theta_{\nu\tau|}$ — угол между векторами $\lambda^{\alpha}_{\tau|}$ и $N^{\alpha}_{\nu|}$. Величина $\rho_{\tau|}$, определяемая равенством $\rho^{2}_{\tau|}=\sum_{\nu}\left(k_{\tau|}\cos\omega_{\tau\nu|}\right)^{2}\Big/\left(1-\sum_{\nu}\cos^{2}\theta_{\nu\tau|}\right)$, называется нормальной кривизной конгруэнции $\lambda_{\tau|}$ относительно кривой C в точке P.

Направления, вдоль которых нормальная кривизна достигает экстремальных значений, суть главные направления конгруэнции. Естественным путем определяются главные кривизны и линии кривизны. Направления и линии, соответствующие нулевым значениям нормальной кривизны, называются соответственно асимптотическими направлениями и асимптотическими линиями.

Доказывается, что у всех кривых на V_n, имеющих одно и то же направление, нормальная кривизна одна и та же.

Отдельно рассматривается случай $m=n+1$. В этом случае отыскивается гиперповерхность V'_n в V_{n+1}, точки которой имеют координаты, равные контравариантным компонентам единичных векторов, касательных теперь уже к единственной конгруэнции. Если потребовать, чтобы вектор нормали к V'_n имел те же самые компоненты (аналог сферического отображения прямолинейной конгруэнции и евклидовом пространстве), то можно прийти к заключению, что пространство V_{n+1} является плоским. Для такого пространства находятся уравнения, обобщающие фундаментальные уравнения прямолинейной конгруэнции трехмерного евклидова пространства. Н. И. Кованцов

5135. Частично проективные пространства. Мокану (Spaţii parţial proiective. Mocanu P.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1955, 6, № 3-4, 495—528 (рум.; рез. русск. франц.)

Частично проективными пространствами P^{n-k}_{n} называются пространства аффинной связности (без кручения), геодезические линии которых в подходящей системе координат располагаются на k-мерных линейных многообразиях (Каган В. Ф., С. r. Acad. sci., 1930, 191, 548; Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1933, вып. 1, стр. 12). В частности, пространствами Кагана автор называет P^{n-k}_{n}, для которых указанные линейные многообразия проходят через фиксированную точку.

Для объекта связности Γ^{i}_{jk} пространства P^{n-2}_{n} (в специальных координатах) выписываются дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial\Gamma^{i}_{jk}}{\partial x^{l}}+2\Gamma^{i}_{sj}\Gamma^{s}_{kl}-\delta^{i}_{j}\omega_{kl}-\omega_{j}\Gamma^{i}_{kl}\,(jkl)=0, \qquad (1)$$

где (jkl) означает симметрирование по указанным индексам. Здесь ω_j, ω_{kl} — также неизвестные функции. Указываются инварианты

$$I_{jk}=\omega_{jk}-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial x^{k}}+\frac{\partial\omega_k}{\partial x^{j}}\right)-\frac{1}{3}\,\omega_{s}\Gamma^{s}_{jk}+\frac{2}{9}\,\omega_j\omega_k$$

проективного преобразования связности Γ^{i}_{jk}.

Для пространств P^{n-k}_{n} (в частности, для пространств Кагана), где $k=3,\ldots$, также выписаны уравнения, аналогичные (1), но гораздо более сложные.

П. К. Рашевский

5136. Метризации проективных пространств. Буземан (Metrizations of projective spaces. Busemann Herbert), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 387—390 (англ.)

Двумерное G-пространство, удовлетворяющее требованию единственности геодезической, проходящей через две любые точки, либо гомеоморфно плоскости E_2, причем все геодезические изометричны прямой, либо гомеоморфно проективной плоскости P_2, причем геодезические изометричны одной и той же окружности (определения и результаты — в книге автора «Геометрия геодезических»; РЖМат, 1957, 6668К). В связи с этим в упомянутой книге были поставлены (а для случая E_2 решены) следующие вопросы: 1) определить системы кривых P_2, могущие служить системами геодезических (при метризации P_2 в указанном выше смысле); 2) допуская, что геодезические суть обычные прямые (или на них лежат), решить вопрос о погружении пространства в пространство высшей размерности с прямыми в качестве геодезических. Л. А. Скорняков дал решение первого из этих вопросов (РЖМат, 1956, 6834). В данной работе автор, отправляясь от работы Л. А. Скорнякова и упрощая ее метод, доказывает следующую теорему (а также вновь получает результат Л. А. Скорнякова): Пусть проективное пространство P_n ($n\geqslant 2$) метризовано как G-пространство так, что геодезические суть проективные прямые. Тогда P_n может быть погружено в P_{n+1} (а, значит, и в P_m, $m>n$) так, что метрика в P_n сохраняется и геодезические в P_{n+1} суть проективные прямые.

Простота доказательств достигается за счет использования сферы S_n как универсальной накрывающей P_n.

В. В. Рыжков

5137. Пространства с общими геодезическими. Солодовников А. С., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 201—203

Рассматриваются римановы пространства V_n с положительно определенной метрикой $ds^2=g_{ij}dx^{i}dx^{j}$ при $n\geqslant 3$. Геодезическим классом данной метрики ds^2 называется совокупность всех метрик $d\bar{s}^2$, имеющих с ds^2 общие геодезические. В статье ставится задача определения всех геодезических классов. Согласно известной теореме Леви—Чивита, для того чтобы две не подобные метрики ($\bar{g}_{ij}\neq cg_{ij}$) имели общие геодезические, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой системе координат

$$ds^2=\sum_{\alpha=1}^{p}\Pi_{\alpha}ds^2_{\alpha}, \qquad (1)$$

$$d\bar{s}^2=\frac{1}{(af_1+b)\ldots(af_p+b)}\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{af_{\alpha}+b}\,\Pi_{\alpha}ds^2_{\alpha}$$

$$(a,\ b=\mathrm{const}), \qquad (2)$$

где ds^2_{α} — самостоятельные, зависящие каждая от своих переменных метрики, функция f_{α} зависела только от переменной из ds^2_{α}, если последняя одномерна, и была постоянной $f_{\lambda}=\mathrm{const}$, если соответствующая метрика ds^2_{α} неодномерна. Π_{α} означает произведение множителей $|f_{\beta}-f_{\alpha}|$ для всех $\beta=1,\ldots,p$, кроме $\beta=\alpha$. Так что для метрик, не представимых в форме Леви—Чивита (1), геодезический класс является тривиальным ($d\bar{s}^2=cds^2$).

Автор называет пространствами основного типа те из пространств (1), для которых «присоединенная» метрика

$$ds^{*2}=\sum_{\alpha=1}^{p}\Pi_{\alpha}dy^{\alpha 2}$$

не имеет постоянной кривизны. Устанавливается теорема: Если ds^2 (1) есть метрика основного типа, то ее геодезический класс состоит только из ∞^2 метрик (2).

Эта теорема выводится из теоремы Леви—Чивита и теоремы: Для всякой метрики (1) основного типа представление в форме Леви—Чивита возможно лишь единственным образом (с точностью до преобразований координат отдельно в каждой из метрик ds_α^2 и и замены функций f_α на $\pm f_\alpha + \text{const}$.

Если присоединенная метрика ds^{*2} имеет постоянную кривизну K, то пространство (1) называется $V(K)$. Отысканию всех геодезических классов пространств $V(K)$ посвящена другая работа автора (РЖМат, 1957, 8438). Г. И. Кручкович

5138. **Инвариантный ряд Тэйлора в финслеровом пространстве. Р а п ч а к** (Invariante Taylorsche Reihe in einem Finslerschen Raum. R a p c s á k A.), Publ. math., 1955, 4, № 1-2, 49—60 (нем.)

F_n — финслерово пространство с основным метрическим тензором $g_{ij}(x, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2(x, v)}{\partial v^i \partial v^j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ и картановскими объектами связности $\Gamma^i_{jk}(x, v)$, $C^i_{jk}(x, v)$ (E. Cartan, Les espaces de Finsler. Act. Sci. Industrielles, Paris, 1934). Пусть l^i — единичный вектор, имеющий направление линейного элемента (x, v). Рассмотрим в F_n вектор $\xi^i_{(0)} = \underset{(0)\,(0)}{\xi^i(x, l)}$ с опорным линейным элементом $\underset{(0)\,(0)}{(x, l)}$. Квазигеодезической кривой (в смысле Варга), проходящей через точку $\underset{(0)}{x^i}$ в направлении $\underset{(0)}{\xi^i}$, называется такая кривая, касательные вектора $\underset{(0)}{\frac{dx^i}{ds}}$ которой образуют последовательность параллельных векторов относительно непрерывной последовательности линейных элементов $(x(s), l(s))$, полученной параллельным перенесением линейного элемента $\underset{(0)\,(0)}{(x, l)}$ вдоль этой кривой. Квазигеодезические кривые пространства F_n определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma^{*i}_{kp}(x, l)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^p}{ds}, \quad \frac{dl^i}{ds} = -\Gamma^{*i}_{0p}(x, l)\frac{dx^p}{ds} \qquad (1)$$

с начальными данными $x^i(s_0) = \underset{(0)}{x^i}$, $\frac{dx^i(s_0)}{ds} = \underset{(0)}{\xi^i}$, $l^i(s_0) = \underset{(0)}{l^i}$, где $\Gamma^{*i}_{kp} = \Gamma^i_{kp} - C^i_{kq}\Gamma^q_{sp}v^s$, $\Gamma^{*i}_{0p} = l^k\Gamma^{*i}_{kp}$. (Предполагается, что все величины — регулярные аналитические функции своих переменных). Регулярные решения системы (1) можно определить в виде сходящихся рядов (для достаточно малых $|s - s_0|$):

$$\underset{(0)}{\xi^i}(s) = \underset{(0)}{x^i} + \bar{x}^i - \sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p!}\underset{(0)\,(0)}{\Gamma^{*i}_{k_1\ldots k_p}(x, l)}\bar{x}^{k_1}\ldots\bar{x}^{k_p}, \qquad (2)$$

$$\underset{(0)}{l^i}(s) = \underset{(0)}{l^i} - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\Gamma^{*i}_{0k_1\ldots k_p}\bar{x}^{k_1}\ldots\bar{x}^{k_p},$$

где $\underset{(0)}{\bar{x}^i} = \underset{(0)}{\xi^i}(s - s_0)$,

$$\Gamma^{*i}_{k_1\ldots k_p} = \frac{1}{p!}\sum_{P(k_1\ldots k_p)}\left[\frac{\partial\Gamma^{*i}_{k_1\ldots k_{p-1}}}{\partial x^{k_p}} - L\frac{\partial\Gamma^{*i}_{k_1\ldots k_{p-1}}}{\partial v^r}\Gamma^{*r}_{0k_p} - (p-1)\Gamma^{*i}_{rk_1\ldots k_{p-2}}\Gamma^{*r}_{k_{p-1}k_p}\right],$$

$$\Gamma^{*i}_{0k_1\ldots k_p} = \frac{1}{p!}\sum_{P(k_1\ldots k_p)}\left[\frac{\partial\Gamma^{*i}_{0k_1\ldots k_{p-1}}}{\partial x^{k_p}} - L\frac{\partial\Gamma^{*i}_{0k_1\ldots k_{p-1}}}{\partial v^r}\Gamma^{*r}_{0k_p} - (p-1)\Gamma^{*i}_{0rk_1\ldots k_{p-2}}\Gamma^{*r}_{k_{p-1}k_p}\right],$$

$\underset{(0)}{x^i}$ называются нормальными координатами F_n относительно начального линейного элемента $\underset{(0)\,(0)}{(x, l)}$ и координат $\underset{(0)}{x^i}$. Для длины дуги квазигеодезической кривой вводится обозначение $\Omega = \frac{1}{2}(s_1 - s_0)^2$, где $s_0 = s(t_0)$, $s_1 = s(t_1)$, s — длина квизигеодезической, t — любой параметр. Автор доказывает, что $\Omega = \underset{(0)\,(1)\,(0)}{\Omega(x, x, l)}$ и что функция Ω обладает частными производными

$$\underset{(0)}{\frac{\partial\Omega}{\partial x^i}} = -\underset{(0)\,(0)}{g_{ik}(x, l)}\underset{(0)}{\frac{dx^k}{ds}}(s_1 - s_0),$$

$$\underset{(1)}{\frac{\partial\Omega}{\partial x^i}} = \underset{(1)\,(1)}{g_{ik}(x, l)}\underset{(0)}{\frac{dx^k}{ds}}(s_1 - s_0). \qquad (3)$$

Из (3) и определения нормальных координат $\bar{x}^i$ следует, что $\bar{x}^i = -\underset{(0)\,(0)}{g^{ik}(x, l)}\underset{(0)}{\frac{\partial\Omega}{\partial x^k}}$.

Затем доказывается, что в F_n для любого тензорного поля $T^{b_1\ldots b_s}_{a_1\ldots a_r}(x, b)$ в окрестности линейного элемента $\underset{(0)\,(0)}{(x, l)}$ имеет место инвариантное разложение (ряд Тэйлора):

$$T^{b_1\ldots b_s}_{a_1\ldots a_r}(x, l) = (-1)^{r+s}\prod_{i=1}^{s}\Omega^{(l_i)}_{d_i}\prod_{j=1}^{r}\Omega^{c_j}_{(a_j)}\left\{T^{d_1\ldots d_s}_{c_1\ldots c_r}\underset{(0)\,(0)}{(x, l)} + \right.$$

$$+\frac{1}{1!}T^{d_1\ldots d_s}_{c_1\ldots c_r, k_1}\underset{(0)\,(0)}{(x, l)}\Omega^{k_1} +$$

$$\left. + T^{d_1\ldots d_s}_{c_1\ldots c_r/k_1}\underset{(0)\,(0)}{(x, l)}\psi^{k_1}\right] + \ldots\Big\}, \qquad (4)$$

где $\Omega^{(r)}_i = g^{rk}(x, l)\underset{(0)}{\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^k\partial x^i}}$, $\Omega^r_{(i)} = \underset{(0)\,(0)}{g^{rk}(x, l)}\underset{(0)}{\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^i\partial x^k}}$,

$$\bar{l}^k - l^k = \psi^k, \quad T^{d_1\ldots d_s}_{c_1\ldots c_r, k_1\ldots k_p} = \underset{(0)}{\frac{\partial^p\bar{T}^{d_1\ldots d_s}_{c_1\ldots c_r}(0, l)}{\partial\bar{x}^{k_1}\ldots\partial\bar{x}^{k_p}}},$$

$$T^{d_1\ldots d_s}_{c_1\ldots c_r/k_1\ldots k_{p'}, k_{p+1}\ldots k_{p+q}} = \underset{(0)}{\frac{\partial^{p+q}\bar{T}^{d_1\ldots d_s}_{c_1\ldots c_r}(0, l)}{\partial l^{k_1}\ldots\partial l^{k_p}\partial\bar{x}^{k_{p+1}}\ldots\partial\bar{x}^{k_{p+q}}}},$$

$$\bar{T}^{b_1\ldots b_s}_{a_1\ldots a_r}(\bar{x}, \bar{l}) = \frac{\partial x^{c_1}}{\partial\bar{x}^{a_1}}\ldots\frac{\partial x^{c_r}}{\partial\bar{x}^{a_r}}\frac{\partial\bar{x}^{b_1}}{\partial x^{d_1}}\ldots\frac{\partial\bar{x}^{b_s}}{\partial x^{d_s}}T^{d_1\ldots d_s}_{c_1\ldots c_r}(x, l),$$

а $(\bar{x}, \bar{l})$ — нормальные координаты, соответствующие линейному элементу $\underset{(0)\,(0)}{(x, l)}$ и координатам $\underset{(0)}{x^i}$. Рюз доказал формулу (4) для любого тензора риманова пространства (Ruse H. S., Proc. London Math. Soc., 1931, 32, 87—92). В работе имеются опечатки.

В. И. Близникас

5139. **К конформной теории римановых пространств, допускающих внешнюю форму. К л а р к** (On con-

formal theory of a Riemannian space which admits an exterior form. Clark R. S.), J London Math. Soc., 1956, 31, № 1, 83—88 (англ.)

Риманово n-мерное пространство класса C^r $(r \geqslant 3)$ с положительно определенной метрикой g_{ij}, несущее внешнюю p-форму f $(1 < p \leqslant n)$, коэффициенты f_i $((i) \equiv i_1 \ldots i_p)$ которой удовлетворяют условиям

$$f_i^{(r)} f_{j(r)} = g_{ij},$$

где $(r) \equiv (r_1 \ldots r_{p-1})$ и суммирование ведется по сочетаниям индексов, обозначается через $V(n, p)$. Частный случай такого пространства — пространство $V(n, 2)$ — будет римановым пространством почти комплексной структурой.

Пространство $V(n, p)$, форма f которого замкнута, обозначается через $S(n, p)$. Пространство $S(n, 2)$ будет римановым пространством с симплектической структурой.

Пространство $V(n, p)$, форма f которого ковариантно постоянна относительно метрики этого пространства, обозначается через $K(n, p)$. Пространство $K(n, 2)$ будет общим келеровым пространством.

Рассматриваются такие $V(n, p)$, которые при помощи конформного преобразования метрики могут быть отображены на $S(n, p)$ и на $K(n, p)$. При этом из коэффициентов формы f строится целый ряд конформно инвариантных и относительно инвариантных тензоров, обращение в нуль которых и дает необходимые и достаточные условия для возможности такого отображения. Для случая $V(n, 3)$ находятся условия того, что это пространство будет локально конформно эквивалентным пространству компактной полупростой группы Ли.

Эти рассмотрения, носящие локальный характер, дополняются соображениями, относящимися к многообразию в целом. Например, если пространство $V(n, p)$ конформно эквивалентно некоторому $S(n, p)$ локально, то оно будет конформно эквивалентно этому пространству в целом в том случае, если его фундаментальная группа не имеет элементов бесконечного порядка.

М. А. Акивис

5140. **Общее преобразование направлений и обобщенная однородная функция. Кавагути** (General direction transformation and generalized homogeneous function. Kawaguchi Akitsugu), Tensor, 1955, 5, № 1, 68—70 (англ.)

Преобразование

$$'v^h = f^h(v^i) \tag{1}$$

вектора n-мерного векторного пространства автор называет общим преобразованием направлений, если (1) преобразует векторы с общим направлением в векторы с тем же свойством. Функции $f^h(v^i)$ должны удовлетворять соотношениям

$$v^i \frac{\partial \ln f^h(v^j)}{\partial v^j} = F(v^j) \quad (h = 1, 2, \ldots,). \tag{2}$$

Автор называет функции $f^h(v^j)$, удовлетворяющие уравнениям (2), в которых F означает заданную функцию, обобщенными однородными функциями, а F — степенной функцией однородности. Автор рассматривает разные степени однородности, предполагая по очереди, что F — постоянна, F — однородная функция степени нуль в обыкновенном смысле, F — однородная функция μ-го порядка в обыкновенном смысле и т. д., и определяет таким способом обобщенные однородные функции разных степеней.

W. Slebodziński

5141. **Об одной евклидовой связности пространства линейных элементов. Хассан Акбар-Задех** (Sur une connexion euclidienne d'espace d'éléments linéaires. Hassan Akbar-Zadeh), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 1, 26—28 (франц.)

$\mathscr{V}$ — расслоенное пространство векторов, касательных к V_n (дифференцируемое многообразие размерности n и класса C^∞), со структурной группой $GL(n, R)$ и слоями изоморфными R^n. Пусть $z \in \mathscr{V}$, а π — каноническая проекция любого $z \in \mathscr{V}$ на его начало $x \in V_n$ $(\pi z = x)$. Пространство отношений W от $\mathscr{V}$, определенное соотношением эквивалентности положительной колинеарности, автор называет пространством ориентированных направлений, касательных к V_n. Если η — каноническая проекция соответствия $\mathscr{V} \to W$, то $\eta z = y \in W$. Пространство W снабжено расслоенной структурой на V_n. Пространство W снабжено структурой финслерового многообразия, если на нем задано поле узких тензоров нулевой степени g_{ij}, $g_{ij} = g_{ji}$, $\det(g_{ij}) > 0$. Линейная связность определяется заданием, для каждой окрестности U пространства V_n, матрицы 1-форм (ω_j^i) на $p^{-1}(U)$, удовлетворяющих на $p^{-1}(U \cap V)$ классическому условию сочетания. Этой линейной связности соответствуют 1-формы ω на W со значениями в алгебре Ли группы $GL(n, R)$. Обратным отображением получаются 1-формы $\eta^*\omega$ на $\mathscr{V}$. Если (α^i, θ^i) — корепер, где $\alpha_y'' \in T_{py}^*$, $\theta^i = \nabla v^i$, то линейная связность называется регулярной. Если положить $\beta^i = \nabla l^i$, то

$$\omega_j^i = \gamma_{jk}^i \alpha^k + B_{jk}^i \beta^k \quad (B_{j_0}^i = 0). \tag{1}$$

Для того чтобы линейная связность была естественно ассоциирована к евклидовой связности, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_{ijk} + \gamma_{jik} = \partial_k g_{ij}, \; C_{ijk} + C_{jik} = \partial_k g_{ij}, \; v^k \partial_k g_{ij} = 0, \tag{2}$$

где $f_{ijk} = g_{jr}\gamma_{ik}^r$, $LC_{ijk} = B_{ijk} = g_{jk}B_{ik}^r$,

$$L^2 = g_{ij}(x, v) v^i v^j.$$

Так как пфаффова система $\alpha^i = 0$ вполне интегрируема, то

$$d\alpha^i = \left(\frac{1}{2}\right) b_{jh}^i \alpha^j \wedge \alpha^h + E_{jh}^i \alpha^j \wedge \beta^h \quad (E_{j0}^i = 0)$$

и формы кручения связности можно записать так:

$$\sum^i = A_{jh}^i \beta^h \wedge \alpha^j + L_{jh}^i \alpha^j \wedge \alpha^h \quad (A_{j0}^i = 0),$$

где

$$A_{jh}^i = B_{jh}^i - E_{jh}^i, \; L_{jk}^i = \left(\frac{1}{2}\right)(b_{jh}^i + \gamma_{hj}^i - \gamma_{jh}^i) \text{ — тензоры кручения.}$$

Если предположить, что тензоры кручения регулярной евклидовой связности удовлетворяют соотношениям

$$A_{ijh} = A_{jih}, \; L_{ijk} = 0, \tag{3}$$

то из (2) получается

$$C_{ijk} = \left(\frac{1}{2}\right)\partial_k g_{ij} + \left(\frac{1}{2}\right)(D_{ijk} - D_{jik}) \quad (LD_{ijk} = E_{ijk}), \tag{4}$$

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ki}) -$$

$$- \frac{1}{2}(b_{jik} + b_{kji} - b_{ikj}).$$

Связность на многообразии финслеровой структуры автор называет финслеровой, если ассоциированная линейная связность удовлетворяет условию (3). Финслеровую связность он называет картановской, если тензор кручения удовлетворяет условию $A_{0jh}=0$. В этом случае g_{kl} можно представить в виде $g_{kp}=\partial^2_{kp}F$ $(2F=L^2)$. В. И. Близникас

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

5142. Пространство-время теории относительности. **Александров** (The space-time of the theory of relativity. Alexandrov A.), Helv. phys. acta, 1956, Suppl. № 4, 44—45 (англ.)

Соотношения пространства-времени определяются взаимодействиями вещей и явлений; геометрическая структура пространства-времени определяется общими законами взаимодействия, и теория пространства-времени должна быть получена из свойств этих законов. Будучи теорией пространства-времени, теория относительности развивалась именно по этому пути. Теория пространства-времени может быть основана на том фундаментальном факте, что каждое явление действует на другое. Если мы определим событие как точку-явление, пространство-время может быть определено как множество всех событий, все свойства которых отброшены, за исключением тех, которыми определяется соотношение; одно событие влияет на другое, одно событие предшествует другому. Построение теории, основанное на понятии «следует», было дано Роббом. Его система, аналогичная аксиоматике элементарной геометрии, включает 21 аксиому.

Однако основные свойства пространства-времени специальной теории относительности могут быть выражены посредством следующих аксиом.

1) Пространство-время — четырехмерное многообразие (его топология подходящим образом определена посредством отношения «следует»).

2) Оно однородно, т. е. каждым двум парам событий A, B и A', B'; с заданным отношением следования соответствует преобразование пространства-времени в себя, сохраняющее это отношение и сопоставляющее паре A, B пару A', B'.

Первая аксиома включает неограниченность распространения влияния. Вторая выражает принцип относительности. Можно показать, хотя и с прибавлением условий аналитического характера (например, дифференцируемость многообразия), что эти два постулата определяют пространство-время специальной теории относительности, т. е. существуют системы координат, в которых преобразование, сохраняющее отношение «следует», выражается лоренцовыми формулами с добавлением пропорционального изменения всех масштабов. Возможность преобразовать пару событий в другую пару, предположенная во 2-й оксиоме без каких-либо условий равенства интервалов или других условий, приводит к плоскому пространству, т. е. к пространству Минковского. К. М. Белов

5143. Уравнения единой теории поля Эйнштейна и Шредингера. **Мишра** (The field equations of Einstein's and Shrödinger's unified theory. Mishra R. S.), Tensor, 1956, 6, № 2, 83—89 (англ.)

Проективное преобразование аффиной связности

$$*\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+2\delta^i_j\lambda_k$$

и симметрическое преобразование

$$^0\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\delta^i_j\lambda_k+\delta^i_k\lambda_j$$

видоизменяют уравнения поля в теории Эйнштейна и Шредингера. Делается пересчет этих уравнений в связности *Γ и ^{0}Γ. Ссылки на работы Эйзенхарта, Главатого и автора. К. М. Белов

5144. Уравнения Дирака в рамках общей теории относительности. **Сурио** (Équations de Dirac en schéma relativiste général. Souriau Jean-Marie), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 5, 496—497 (франц.)

Дается выражение общековариантной функции Лагранжа для уравнений Дирака

$$\rho\left[m\cos\varphi+h\frac{\partial\varphi}{\partial M}S_2+k\nabla S_2+e\mathbf{A}\cdot S_1\right],$$

скомбинированной из компонент волновой функции

$$\psi=\begin{bmatrix}z\\0\\\bar z\\0\end{bmatrix}$$

($z=\rho e^{i\varphi}$ — комплексное число), компонент спинорной функции состояния электрона

$$S=[S_1S_2S_3S_4]$$

и координат обобщенной точки пространства M (h, m, k, e — известные константы). Величины S и z определяют ψ с точностью до знака. С помощью этой функции могут быть получены уравнения Дирака, пригодные, в частности, как указывает автор, для решения задачи анизотропного распределения вектора плотности тока. Я. И. Пугачев

5145. Теория тяготения Йордана с новыми уравнениями поля. **Людвиг, Юст** (Jordansche Gravitationstheorie mit neuen Feldgleichungen. Ludwig G., Just K.), Helv. phys. acta, 1956, Suppl. № 4, 168—170 (нем.)

Уравнения поля теории Йордана, в которой используется непостоянство коэффициента гравитационного взаимодействия $\varkappa$, могут быть получены из вариационного принципа

$$\delta\int\varkappa^\eta\left(\overset{4}{R}-\zeta\varkappa^{-2}\varkappa_{|\nu}\varkappa^{|\nu}\right)d\overset{4}{\sum}=0,$$

где η, ξ — некоторые константы, $\overset{4}{R}$ — четырехмерная кривизна, при условии, что $\eta\neq0$. Авторы рассматривают как раз случай $\eta=0$. Ими указан для этого случая вариационный принцип, имеющий вид

$$d\int\overset{5}{R}d\overset{4}{\sum}=0,$$

($\overset{5}{R}$ — кривизна пятимерного проективного пространства), и получены соответствующие уравнения поля, как простейший вид обобщения уравнений Эйнштейна. Используя решения их и предполагая ту или иную зависимость $\varkappa$ от времени, авторы в заключение дают оценку некоторых космологических величин (радиус вселенной, начало органической жизни на земле и др.). Я. И. Пугачев

5146. Общее решение уравнений Эйнштейна $g_{\mu\nu;\,\rho}=0$. **Тонла** (La solution générale des équations d'Einstein $g^{+-}_{\mu\nu;\,\rho}=0$. Tonnelat M. A.), Helv. phys. acta, 1956, Suppl. № 4, 192—197 (франц.)

Получено общее решение уравнений единой теории поля Эйнштейна:

$$g_{\mu\nu};\ \underset{+}{\rho} \equiv \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Delta^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Delta^\sigma_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} = 0,$$

где $g_{\mu\nu}$ — несимметричный метрический тензор, $\Delta^\sigma_{\mu\rho}$ — аффинная связность. Предполагая, что детерминант симметричной части метрического тензора отличен от нуля, автор находит условие существования решения рассматриваемого уравнения. Это условие записано в общем виде, а также для двух частных случаев: 1) для сферически симметричного случая и 2) для случая, когда детерминант антисимметричной части метрического тензора равен нулю.

Указано, что из полученного общего решения можно получить приближенное решение, которое совпадает с результатами, полученными Эйнштейном и Кауфман, а также Шрёдингером. А. Я. Темкин

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

5147. Приложение методов гильбертова пространства к группам Ли, действующим на дифференцируемом многообразии. Лелон-Ферран (Application of Hilbert space methods to Lie groups acting on a differentiable manifold. Lelong-Ferrand Jacqueline), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 2, 249—252 (англ.)

Пусть M^n — ориентирусмое связное n-мерное многообразие с краем (не обязательно конечное), удовлетворяющее определенному требованию гладкости. Каждому векторному полю ξ на M^n, удовлетворяющему условию Липшица, ставятся в соответствие бесконечно малые преобразования пространства L_{pq} тензоров T типа (p, q):

$$XT^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} = \xi^r \frac{\partial}{\partial x^r} T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \xi^r}{\partial x i_k} T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots r\dots i_p} -$$

$$- \sum_{h=1}^{q} \frac{\partial \xi^{j_h}}{\partial x^r} T^{j_1\dots r\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$$

и (при наличии римановой метрики $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$)

$$XT + \tilde{X}T = \sum_{k=1}^{p} t^r_{i_k} T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots r\dots i_p} -$$

$$- \sum_{h=1}^{q} t^{j_h}_r T^{j_1\dots r\dots j_q}_{i_1\dots i_p} + t^r_r T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p},$$

где $t^r_s = g^{rs} X g_{rs}$ (часть результатов получена, если в M^n дан только элемент объема). После формулировки ряда соотношений между X и $\tilde{X}$ эти операторы замыкаются в гильбертовом пространстве H_{pq}, полученном введением в L_{pq} естественного скалярного произведения (с помощью интегрирования по M^n). Ортогональное разложение этого пространства позволяет, в частности, установить, что если конечное многообразие M^n допускает группу Y бесконечно малых изометрий, для которых край глобально инвариантен, то всякая инвариантная форма, гомологичная (когомологичная) нулю, является точным дифференциалом (кодифференциалом) инвариантной формы. С помощью теории Кошуля (РЖМат, 1956, 8624) далее устанавливается, что если Y — компактная ν-мерная группа Ли с базисом алгебры X_α, то для некоторого $k = k(p, q)$ будет $\| T \|^2 \leqslant k \sum \| X_\alpha T \|^2 \times \times (T \in H_{pq})$. При $p = q = 0$, $\nu = 1$ для некоторых классов последнее неравенство является необходимым для компактности соответствующей группы Ли.

Доказательства не приведены. Много опечаток. А. Д. Мышкис

5148. О геодезических на V_n по отношению к аффинной связности. Гаспарини-Каттанео (Sulle geodetiche di una V_n relative a una connessione affine. Gasparini Cattaneo Ida), Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 2, 146—154 (итал.)

На многообразии V_n класса $C^r (r > 2)$ рассматриваются инфинитезимальная связность с полной аффинной группой в качестве структурной группы. Такую связность автор называет аффинной (связность, обычно называемую аффинной, автор называет линейной связностью).

В работе рассматриваются линии, геодезические относительно связности в том смысле, что они переходят в прямые при развертке V_n вдоль них на плоскость. Если $\overset{\pi}{\nabla}$ ковариантный дифференциал относительно аффинной связности π, то геодезические линии $x(t)$ характеризуются тем, что вдоль них ковариантный дифференциал вектора $\overset{\pi}{\nabla} x/dt$ параллелен этому вектору. Вектор $\overset{\pi}{\nabla} x/dt$, вообще говоря, не является касательным.

К аффинной связности естественным образом присоединяется линейная связность. Дано необходимое и достаточное условие совпадения геодезических в этих двух связностях, в случае, если аффинная связность удовлетворяет условию «регулярности».

Д. В. Беклемишев

5149. О геометрии поверхностей многомерного аффинно-симплектического пространства. Остиану Н. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 160—161

Изучается четномерная поверхность невырожденного аффинно-симплектического пространства произвольной четной размерности. Установлено, что: 1) порядок основного объекта поверхности не превышает порядка соприкасающегося пространства наинизшей размерности, вмещающего поверхность; 2) к поверхности инвариантно присоединяется симплектическая связность без кручения и евклидова связность с кручением; 3) направления поверхности, вдоль которых семейства нормальных плоскостей фокальны, симплектически ортогональны ко всем сопряженным им направлениям.

Рассматриваются некоторые особенности четномерной поверхности, размерность которой равна половине размерности объемлющего пространства.

М. А. Акивис

5150. О сильно минимальных поверхностях риманова пространства. Беклемишев Д. В., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 2, 256—258

Автор вводит класс сильно минимальных поверхностей V_{2n} риманова пространства, определяя его при помощи аналитических условий, равносильных геометрическому требованию о наличии в каждой точке поверхности V_{2n} двух сопряженных вполне изотропных непересекающихся n-направлений.

Сообщаются результаты, устанавливающие связи сильно минимальных поверхностей с комплексно-аналитическими поверхностями келерова многообразия и унитарного пространства.

На поверхности келерова многообразия строится так называемый объект аналитичности, обращение

в нуль которого характеризует комплексно-аналитические поверхности.

Теорема. Поверхности келерова многообразия, вдоль которых объект аналитичности ковариантно постоянен, являются сильно минимальными поверхностями в келеровом многообразии, лишенном комплексной структуры.

Отображение $z^J E_J \to \frac{z^J + \bar{z}^J}{2} E_J$ в унитарном пространстве U_N называются проектированием вектора $z^J E_J$ на вещественную плоскость $R_N(E_J)$. Аналогично определяется проектирование на мнимую плоскость $I_N(E_J)$; последняя при помощи формул $y^J(iE_J) \to y^J E_J$ отображается также на $R_N(E_J)$. Комплексно-аналитическая поверхность в U_N отображается при этом в пару так называемых сопряженных сильно минимальных поверхностей в $R_N(E_J)$, вполне аналогичных сопряженным минимальным V_2 в R_3. В качестве образа может быть получена любая сильно минимальная V_{2n}; соответствующая комплексно-аналитическая поверхность в U_N определяется с произволом постоянных. Доказательства не приведены.

Ю. Г. Лумисте

5151. Ортогональные системы из n векторов в келеровом многообразии. Холдер, Бехари (Orthogonal ennuples in a Kaehler manifold. Halder Gita, Behari Ram), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1956, A22, № 5, 305—315 (англ.)

Вводится ортогональный репер $u^\alpha_{r|}$, $v^\alpha_{r|}$ ($r = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, 2n$) в келеровом пространстве такой, что $u^\alpha_r = F^\alpha_\beta V^\beta_r$, где F^α_β — тензор, задающий комплексную структуру пространства. Доказано, что коэффициенты вращения такого репера самоприсоединены. Если ковариантные компоненты $u^\alpha_{s0|}$ аналитичны, то коэффициенты вращения удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_{ts_0r} = \gamma_{TS_0R} = \gamma_{s_0tR} = \gamma_{S_0Tr} = 0, \quad R = r + n.$$

Рассматриваются нормальные (к аналитической поверхности) конгруэнции в келеровом пространстве. Условие того, чтобы вектор $u^\alpha_{n|}$ определял нормальную конгруэнцию

$$\gamma_{nrs} = \gamma_{nsr}, \quad \gamma_{NRS} = \gamma_{NSR}, \quad \gamma_{rns} = \gamma_{RNS} = 0.$$

Аналогичный результат для геодезических конгруэнций.

Д. В. Беклемишев

5152. О келеровых многообразиях с характеристической изотропией. Мартинелли (Sulle varietà kähleriane dotate di isotropia caratteristica. Martinelli Enze), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 21, № 6, 400—404 (итал.)

Келеровыми многообразиями с характеристической изотропией автор называет многообразия с постоянной аналитической кривизной (РЖМат, 1957, 2658, 8927). Статья содержит исследование геометрического смысла кривизны такого многообразия. Доказан следующий факт: В точке характеристической изотропии келерова многообразия вращение, которое испытывает репер в результате параллельного переноса по инфинитезимальному контуру, лежащему в аналитическом двумерном направлении, распадается на два вращения.

1) Вращение, параллельное данному аналитическому двумерному направлению на угол $K/2\sigma$, где K — кривизна аналитических двумерных направлений в данной точке, а σ — мера площади, ограниченной инфинитезимальным контуром.

2) Вращение, не зависящее от данного аналитического направления, при котором каждое аналитическое двумерное направление поворачивается параллельно самому себе на тот же угол $K/2\sigma$.

Отметим, что аналитические двумерные направления автор называет характеристическими гранями (faccette caratteristiche).

Д. В. Беклемишев

5153. Об автоморфизмах келеровой структуры. Кобаяси, Номидзу (On automorphisms of a Kählerian structure. Kobayashi Shoshichi, Nomizu Katsumi), Nagoya Math. J., 1957, 11, 115—124 (англ.)

Келерово многообразие M рассматривается как риманово многообразие V, на котором задана соответствующим образом комплексная структура I. Келерово многообразие авторы называют невырожденным, если ограниченная однородная группа голономии σ_x многообразия V содержит I_x, т. е. значение тензорного поля I в точке x.

Доказано: 1. Если M не приводимо и его кривизна Риччи не равна нулю, то M не вырождено.

2. Если M не вырождено, и n (комплексная размерность M) не делится на 4, то кривизна Ричи M не равна нулю.

3. Если кривизна Риччи не особенна в некоторых точках M, то M не вырождено.

Основной результат работы следующий:

1. Каждое просто связное и полное келерово многообразие M есть прямое произведение $M_0 M_1 \ldots M_k$, где M_0 — комплексное евклидово пространство размерности $\geqslant 0$, а $M_1 \ldots M_k$ — неприводимые келеровы многообразия. Если M не вырождено, M_0 не появляется, а $M_1, \ldots, M_k$ все не вырождены.

2. Пусть M неприводимое и его однородная ограниченная группа голономии не содержится в вещественном представлении $Sp(l)$, где $\dim M = 4l$. Тогда каждое аффинное преобразование M сохраняет комплексную структуру J или отображает J в сопряженную комплексную структуру. Наибольшая связная группа аффинных преобразований A^0 сохраняет комплексную структуру.

3. Если M полное невырожденное, то A^0 состоит из автоморфизмов. Доказана также следующая теорема: Пусть M $2n$-мерное просто связное вещественно аналитическое неприводимое риманово многообразие. Возможны три случая:

1. Если σ не содержится в вещественном представлении $U(n)$ на M не существует келеровых структур.

2. Если σ содержится в вещественном представлении $U(n)$, но не в $Sp(l)$, тогда существует в точности две (сопряженных) келеровых структуры на M.

3. Если σ содержится в вещественном представлении $Sp(l)$, то существует континуум различных келеровых структур на M.

Д. В. Беклемишев

5154. О псевдоэрмитовых и псевдокелеровых многообразиях. Яно (On pseudo-Hermitian and pseudo-Kählerian manifolds. Yano Kentaro), Proc. Internat. Congr. Mathematicians. 1954. Vol. 3. Groningen-Amsterdam, 1956, 190—197 (англ.)

Статья содержит обзор результатов, относящихся к следующим вопросам: А) Условия того, что почти комплексное (почти эрмитово, почти келерово) многообразие является псевдокомплексным (псевдоэрмитовым, псевдокелеровым) многообразием. Б) Кривизна псевдокелерова многообразия. В) Псевдоаналитические векторные поля на псевдокелеровых многообразиях. Г) Псевдокелеровы многообразия постоянной аналитической кривизны. Библ. 30 назв.

Д. В. Беклемишев

5155. О нескольких аффинных связностях, определенных в почти эрмитовом многообразии. Уэсуги (On some affine connections defined in almost Hermitian manifolds. Uesugi Toshitane), Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., A, 1956, 10, № 2, 121—132 (англ.)

Автор подробно описывает пять аффинных связностей на почти эрмитовом многообразии, введенных различными авторами, а также указывает на очевидные связи между этими связностями в случае, если многообразие псевдоэрмитово, почти келерово и т. д.

Д. В. Беклемишев

5156. Псевдоаналитические векторы на псевдоэрмитовых многообразиях. Чжун Тун-дэ (Chung Tong-der), Сямэнь дасюэ сюэбао. Цзыжанькэсюэбань, Acta scient. natur. Univ. amoensis, 1957, № 1, 93—102 (кит.; рез. англ.)

Работа имеет целью распространить результаты Бохнера относительно аналитических векторных полей в келеровых многообразиях на псевдоаналитические векторные поля (РЖМат, 1958, 8922) в псевдоэрмитовых многообразиях. Получены результаты, обобщающие теоремы о связи аналитических векторных полей с гармоническими и киллинговыми векторными полями, в предположении, что кручение S_{ijk} псевдоэрмитова многообразия удовлетворяет условиям: $S^{\cdots t}_{jk;t}=0$.

$$S^{\cdots i}_{ab\,|\,l}+S^{\cdots i}_{il\,|\,a}+S^{\cdots i}_{la\,|\,b}-$$

$$-2\left(S^{\cdots t}_{ab}S^{\cdots i}_{tl}+S^{\cdots t}_{bl}S^{\cdots i}_{ta}+S^{\cdots t}_{la}S^{\cdots i}_{tb}\right)=0.$$

Многообразия с таким кручением названы почти псевдокелеровыми.

Д. В. Беклемишев

5157. Топологические проективные плоскости. Зальцман (Topologische projektive Ebenen. Salzmann Helmut), Math. Z., 1957, 67, № 5, 436—466 (нем.)

Отмечается, что утверждение референта о бикомпактности локально бикомпактной топологической проективной плоскости π (РЖМат, 1955, 4626, лемма 23) в общем случае неверно. Доказывается справедливость этого предложения, когда π удовлетворяет одному из следующих условий: а) π — связна; б) топология в π индуцирована порядком; в) любые два элемента мультипликативной лупы какого-либо тернара плоскости π порождают группу. Кроме того, устанавливается, что локально бикомпактная топологическая проективная плоскость является объединением счетного множества бикомпактных подмножеств и удовлетворяет второй аксиоме счетности (имеет счетный вес). Далее исследуются плоскости, гомеоморфные действительной проективной плоскости. Наконец, показывается, что для каждого топологического альтернативного тела k существует в точности одна топологическая проективная плоскость, тернар которой изоморфен k.

Примечание референта. Рассуждения, проведенные при доказательстве упомянутой выше леммы 23, показывают, что всякая топологическая плоскость с бикомпактными обручами около каждой точки (обручем около точки P называется множество, не содержащее точки P, но пересекающееся с каждой прямой, проходящей через P) бикомпактна. Из этого утверждения легко выводится бикомпактность локально бикомпактной топологической проективной плоскости в случаях а) и б). Попутно заметим, что указанное изменение формулировки леммы 23 не сказывается на других частях цитированной работы референта.

Л. А. Скорняков

5158. Дифференциальные формы и когомологии на комплексном аналитическом многообразии. I. Дольбо (Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe. I. Dolbeault Pierre), Ann. Math., 1956, 64, № 1, 83—130 (франц.)

Реферируемая первая часть работы состоит из введения и двух глав: гл. 1. Когомологии с коэффициентами в пучке ростков замкнутых потоков; гл. 2. Приложения к аналитическим главным расслоенным пространствам, в которых слоем является абелева группа. Часть результатов была опубликована ранее (C. r. Acad. sci., 1951, 233, 221—РЖМат, 1953, 1307; 1954, 2060).

Вводная часть работы содержит определение пучка (faisceau) по А. Картану, когомологий с коэффициентами в пучке, резольвенты и других понятий теории пучков, используемых в дальнейшем изложении. Далее напоминаются понятия комплексно-аналитического многообразия, келерова многообразия, многообразия Штейна; определение когомологий с помощью дифференциальных форм, потоков, гармонических форм и т. п. Автор называет главным аналитическим ростком (germ) в точке x рассматриваемого комплексно-аналитического многообразия V совокупность нулей ростка голоморфной функции, принимающей в точке x нулевое значение, но не равной тождественно нулю. Подмножество V называется главным аналитическим множеством, если в окрестности каждой своей точки оно определяет главный аналитический росток. Обычным образом определяется дивизор и пучок ростков дивизоров.

В главе первой автор интерпретирует когомологии с коэффициентами в пучках ростков голоморфных (а также голоморфных замкнутых) дифференциальных форм посредством d''-когомологий (соответственно $\bar{\partial}$-когомологий) многообразия V, определяемых с помощью дифференциальных форм класса C^∞ или потоков. (Здесь d — оператор внешнего дифференцирования; он распадается на два оператора d' и d'' типов (1,0) и (0,1) соответственно.) Именно, обозначим пучок ростков голоморфных (голоморфных замкнутых) p-форм через Ω^p (соответственно E^p), пучок ростков потоков типа (pq) — через $A^{p,q}$; пусть далее $B^p=\sum_{q,\,r\geqslant 0}A^{p+r,\,q}$; L^p — пространство сечений пучка B^p и $K^{pq}(VC)$ — подпространство элементов степени $(p+q)$ в $H(L^p)$. Имеют место изоморфизмы (над полем C комплексных чисел): $H^q(V,\Omega^p)\cong H^{pq}(VC)$ (пространство когомологий типа (pq) относительно оператора d'') и $H^q(VE^p)\cong K^{pq}(VC)$ (§§ B, C). Далее (§ D) устанавливаются соотношения между указанными двумя видами когомологий (в терминах некоторых коммутативных диаграмм). Для компактных келеровых многообразий Штейна полученные результаты принимают более простой вид (§ E).

Во второй главе выводятся необходимые и достаточные условия (в терминах дифференциальных форм на V), которыми определяются классы когомологий, выражающие топологические и аналитические препятствия для аналитических главных расслоенных пространств X над V с абелевой группой G. Отметим, например, результат, относящийся к случаю, когда G является фактор-группой n-мерного комплексного пространства C^n по дискретной подгруппе Π. Для того чтобы 2-мерный класс когомологий V с коэффициентами в Π был топологическим препятствием для некоторого X, необходимо и достаточно, чтобы его образ в группе когомологий с коэффициентами в C^n определялся дифференциальной формой, состоящей из членов типов (2,0) и (1,1).

Применительно к случаям, когда G является аддитивной (C) или мультипликативной (C^*) группой комплексных чисел, рассматриваются условия разрешимости первой и второй проблем Кузена (РЖМат 1956, 1298). Попутно получена теорема о связи между

сингулярными гомологиями дивизора и его гомологиями по Чеху. Далее устанавливается условие для введения в X аналитической аффинной связности. Наконец, рассматривается (без доказательств, по аналогии с предыдущими) вопрос о распространении на все V расслоенной структуры, заданной на некоторой его части (описываются соответствующие препятствия).

В последнем параграфе (§ D) вводятся понятия аддитивной мероморфной формы и θ-функции. Пусть $\tilde{V}$ — универсальная накрывающая для V и Γ — фундаментальная группа. Мероморфная замкнутая форма G на $\tilde{V}$ называется аддитивной, если для любого $\xi \in \Gamma$ $G - \xi G = F_\xi$, где F_ξ голоморфна и инвариантна относительно Γ. Мероморфная функция g (на $\tilde{V}$) называется θ-функцией, если $g(\xi y)/g(y) = \exp h_\xi(y)$, где $h_\xi(y)$ — интеграл одномерной голоморфной замкнутой формы на V. (В более специальных условиях эти понятия рассматривали Кодаира и Штейн). Устанавливается условие существования аддитивной формы, допускающей наперед заданную «систему сингулярных частей» (определяемую элементом $S \in H^0(V, m^p/E^p)$, где m^p и E^p — пучки ростков соответственно мероморфных и голоморфных замкнутых p форм, а также существования θ-функции с заданным дивизором (последняя задача сводится к частному случаю первой). Показывается, что для полицилиндра обе задачи всегда имеют решение. И. З. Розенкноп

5159. **Дифференциальные формы и когомологии на комплексном аналитическом многообразии. II. Дольбо** (Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe. II. Dolbeault Pierre), Ann. Math., 1957, 65, № 2, 282—330 (франц.)

Вторая часть работы (реф. 5158): гл. 3. О замкнутых мероморфных формах; гл. 4. О мероморфных формах и потоках, с ними ассоциированных.

В третьей главе после локального изучения ростков мероморфных форм автор получает условие, при котором заданная система сингулярных частей многообразия V (паракомпактного) определяется замкнутой мероморфной формой (на V). Доказывается теорема: Пусть $S \in H^0(V, m^p/E^p)$. Рассмотрим соответствующий ему (естественным образом) элемент из $Hp^{+1}(V, C)$, которому отвечает, по двойственности, класс l из $H_{2m-p-1}(V, C)$ (где $2m = \dim V$). Тогда можно утверждать, что l является классом гомологий полярного множества для S. Если гомоморфизм $H^q(V, \Omega^r) \to H^q(V, E^{r+1})$ является нулевым для $q, r+1 > 0$, то класс l может обратиться в нуль лишь в случае, если S — система сингулярных частей некоторой замкнутой мероморфной формы на V (последнее условие выполнено для компактных келеровых многообразий и многообразий Штейна).

Устанавливается условие, при котором заданный дивизор является вычетом некоторой мероморфной формы первого порядка. Для этого достаточно, чтобы соответствующий этому дивизору класс в $K^{1,1}(V, C)$ обратился в нуль. В случае компактных келеровых многообразий и многообразий Штейна необходимым и достаточным является условие обращения в нуль отвечающего дивизору класса из $H^2(V, C)$. Далее выводится теорема о двумерных голоморфных формах, соответствующих дивизорам.

Дается определение формы второго рода (более широкое, чем в алгебраической геометрии) как формы, локально являющейся дифференциалом ростка мероморфной формы; отмечаются некоторые свойства, связанные с этим понятием.

В четвертой главе излагается построение потока, продолжающего полумероморфную форму G (т. е. форму, локально имеющую вид F/f, где F — форма класса C^∞, а f — голоморфная функция). На форму G накладываются некоторые ограничения (формулируемые довольно громоздко), при которых ее полярное множество имеет достаточно простой вид. Поток, о котором идет речь, обозначается V_pG и определяется (локально) с помощью формулы:

$$V_pG[\varphi] = \lim \int G \wedge \varphi,$$

где интеграл берется по множеству вне некоторой специальной окрестности полярного множества для G, а переход к пределу происходит при стремлении этой окрестности к нулю. Доказывается, что для любого полуголоморфного дифференциального оператора D должно быть: $DV_pG = V_pDG$. Изложенная конструкция обобщает соответствующие результаты Кодаира и Шварца.

Последний параграф содержит ряд локальных результатов о замкнутых мероморфных формах и их вычетах. В заключение уточняется и обобщается результат третьей главы о существовании замкнутой мероморфной формы, имеющей заданное главное аналитическое множество своим полярным множеством (кратности 1). И. З. Розенкноп

5160. **Теорема об устойчивости комплексных структур. Фрёлихер, Нейенхёйс** (A theorem on stability of complex structures. Frölicher Alfred, Nijenhuis Albert), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 2, 239—241 (англ.)

Две комплексные структуры на многообразии X (компактном, дифференцируемом) называются эквивалентными, если имеется дифференцируемый гомеоморфизм Ψ рассматриваемого многообразия в себя такой, что $I' = \Psi^* I$, где I, I' — тензоры, определяющие рассматриваемые структуры, а Ψ^* — отображение тензорных полей, индуцируемое Ψ. Обозначим через $\theta_0(I)$ пучок ростков голоморфных векторных полей на X по отношению к комплексной структуре I.

Доказывается теорема: Если I_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — семейство (класса C^1) комплексных структур на X и $H^1(X, \theta_0(I_0)) = 0$, то найдется положительное число ε такое, что при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ структуры I_0 и I_t эквивалентны. (Бот доказал, что условие $H^1(X, \theta_0(I)) = 0$ имеет место для любого однородного компактного келерова многообразия с конечной фундаментальной группой). И. З. Розенкноп

5161. **Локально точные мероморфные дифференциальные формы. Дольбо** (Formes différentielles méromorphes localement exactes. Dolbeault Pierre), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 494—518 (франц.)

Мероморфная дифференциальная форма на комплексном аналитическом многообразии V называется локально точной, если в каждой точке она является дифференциалом ростка некоторой мероморфной формы. В предыдущей работе автора (реф. 5158, 5159) для такой формы употреблялось название формы второго рода. Мы будем пользоваться некоторыми понятиями и обозначениями указанной работы.

Пусть S — главное аналитическое подмножество V и $\mathcal{E}_S^{p+1,0}$ — векторное пространство классов локально точных $(p+1)$-мерных форм, допускающих S как множество полюсов (полярное множество) по крайней мере второй кратности по модулю дифференциалов p-мерных мероморфных форм, допускающих S в качестве множества полюсов кратности 1 и выше. Одним из основных результатов работы является выражение размерности $\mathcal{E}_S^{p+1,0}$ через размерности пространств когомологий форм класса C^∞ (или потоков) на V и S.

§ 1 содержит изучение пучков ростков вычетов $\mathscr{R}_S^p$, r_S^p, $\mathscr{S}_S^p$, соответствующих а) пучку M_S^p ростков мероморфных p-форм, допускающих S как полярное множество кратности 1 и выше; б) пучку m_S^p ростков замкнутых мероморфных форм, обладающих тем же свойством; в) пучку dM_S^p. При этом вычет ростка τ (какого-либо из пучков M_S^p, m_S^p, dM_S^p) определяется как $d''\langle\tau\rangle$, где $\langle\tau\rangle$ — росток потока, задаваемый с помощью формулы: $\langle\tau\rangle[\varphi]=\int\tau\wedge\varphi$. Напоминаются некоторые из результатов Кодаира-Спенсера (РЖМат, 1955, 3400; 1956, 3734).

В дальнейшем предполагается большей частью, что V — компактное келерово многообразие, а S не имеет особенностей и достаточно обширно по Кодаира (в смысле положительной определенности некоторой эрмитовой формы, связанной с S; РЖМат, 1955, 3393). Вычисляются когомологии многообразия с коэффициентами в пучках $\mathscr{R}_S^p$, r_S^p, S_S^p. Именно, отметим следующие формулы:

$$\dim H^q\left(V,\ r_S^p\right)=\dim K^{p-1,\,q}(S,\ C),$$

$$\dim H^q\left(V_1\mathscr{R}_S^p\right)=\dim H^{p-1,\,q}(S,\ C)+$$

$$+\dim H^q\left(S,\ \Omega^p\left(\{S\}_S\right)\right)$$

(при $p+q\geqslant m+1$ или $p+q<m-3$, а также $p=m$, $q=0$);

$$\dim H^q\left(V,\ \mathscr{S}_S^p\right)=\dim K^{p,\,q}(S,\ C)+$$

$$+\dim H^q\left(S,\ \Omega^p\left(\{S\}_S\right)\right)=(\text{при } p>0),$$

где $\Omega^p\left(\{S\}_S\right)$ — пучок ростков голоморфных p-форм на S с коэффициентами в расслоенном пучке комплексных линий, индуцируемом с помощью S.

В § 2, отправляясь от точных последовательностей пучков:

$$0\to m_S^p\to M_S^p\to dM_S^p\to 0,$$

$$0\to\Omega^p\to M_S^p\to\mathscr{R}_S^p\to 0,$$

$$0\to E^p\to m_S^p\to r_S^p\to 0,$$

$$0\to E^{p+1}\to\left(dM_S^p\right)\to\mathscr{S}_S^p\to 0,$$

автор рассматривает соответствующие гомоморфизмы групп когомологий и вводит подпространства:

$$\mathscr{E}_S^{p+1,\,t}=\operatorname{conoyau}\left[H^t\left(V,\ M_S^p\right)\to H^t\left(V,\ dM_S^p\right)\right],$$

$$k_1^{p,\,t+1}=\operatorname{conoyau}\left[H^t\left(V,\ \mathscr{R}_S^p\right)\to H^{t+1}\left(V,\ \Omega^p\right)\right],$$

$$k_2^{p,\,t+1}=\operatorname{conoyau}\left[H^t\left(Vr_S^p\right)\to H^{t+1}\left(VE^p\right)\right],$$

$$k_3^{p,\,t+1}=\operatorname{conoyau}\left[H^t\left(V\mathscr{S}_S^p\right)\to H^{t+1}\left(VE^{p+1}\right)\right].$$

Далее вычисляются размерности $k_1^{p,\,t+1}$, $k_2^{p,\,t+1}$, $k_3^{p,\,t+1}$, затем размерности групп когомологий V с коэффициентами в M_S^p, m_S^p, dM_S^p, а отсюда и размерность $\mathscr{E}_S^{p+1,\,q}$.

Приведем некоторые из полученных формул (в предположении, что $q>0$, а также $p+q<m-3$ или $p+q>m+1$):

$$H^q\left(V,\ M_S^p\right)=0;$$

$$\dim H^q\left(V,\ m_S^p\right)=\dim K^{p,\,q}(V,\ C)-\dim K^{p-1,\,q-1}(S,\ C);$$

$$\dim H^q\left(V,\ dM_S^p\right)=\dim\mathscr{E}_S^{p+1,\,q}=$$

$$=\dim K^{p,\,q+1}(V,\ C)-\dim K^{p-1,\,q}(S,\ C);$$

$$\dim\mathscr{E}_S^{p+1,\,0}=\dim K^{p,\,1}(V,\ C)-\dim H^{p-1,\,0}(S,\ C).$$

И. З. Розенкноп

5162. **Вложение неограниченно продолженного листа Мёбиуса с гиперболической метрикой в евклидовы пространства.** Б л а н у ш а (Die Einbettung des unendlich breiten Möbiusschen Bandes mit hyperbolischer Metrik in euklidischen Räumen. B l a n u š a D.), Bull. scrent. Conseil acad. RPFY, 1956, 3, № 2, 50 (нем.)

Пусть возможно C^r-изометричное ($1\leqslant r\leqslant\infty$) вложение гиперболической плоскости в евклидово n-мерное пространство R_n и C^s-изометричное ($1\leqslant s\leqslant\infty$) вложение неограниченно продолженного листа Мёбиуса (неориентируемого цилиндра) с евклидовой метрикой в R_m. Автор утверждает, что при этих предположениях возможно осуществить C^t-изометричное вложение ($t=\min(r,s)$) неограниченно продолженного листа Мёбиуса с гиперболической метрикой в R_{n+m}. Ранее автором была установлена возможность C^∞-изометричного вложения гиперболической плоскости в R_6 и C^∞-изометричного вложения неограниченно продолженного листа Мёбиуса с евклидовой метрикой в R_4. Отсюда следует возможность C^∞-изометричного вложения неограниченно продолженного листа Мёбиуса с гиперболической метрикой в R_{10}.

Э. Г. Позняк

5163. **Вложение действительно аналитических многообразий.** М а л ь г р а н ж (Plongement des variétés analytiques-réelles. M a l g r a n g e B e r n a r d), Bull. Soc. math. France, 1957, 85, № 1, 101—112 (франц.)

Доказывается теорема: Пусть V — действительно аналитическое многообразие размерности n. Если V компактно или является объединением счетного множества компактных многообразий и на нем определен элемент ds^2 аналитической римановой метрики, то существует аналитическое отображение V внутрь евклидова пространства R^N. Это отображение является 1) простым (т. е. для него прообразы всех компактов из R^N являются компактными); 2) взаимно однозначным; 3) регулярным во всех точках V (т. е. для каждой точки $a\in V$ можно из N функций, определяющих вложение V в R^N, выделить n таких, что их значения могут служить локальными координатами в некоторой окрестности точки a). Б. А. Фукс

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

5164. **Об одной геометрической проблеме П. Эрдёша.** С т р а ш е в и ч (Sur un problème géométrique de P. Erdös. S t r a s z e w i c z S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 1, 39—40 (франц.; рез. русск.)

Дается решение — для случая трехмерного пространства — следующей проблемы Эрдёша (Erdös P., Amer. Math. Monthly, 1946, 53, 248): каково в заданном множестве n точек k-мерного пространства максимальное число $N_k(n)$ пар точек, расстояние между которыми равно диаметру множества. Очевидно, что $N_1(n)=1$; легко устанавливается, что $N_2(n)=n$. Автор доказывает, что $N_3(n)\leqslant 2n-2$. $A=$

$= \{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество из n точек трехмерного пространства диаметра единица. $N(A)$ — число пар (a_i, a_k), для которых $\rho(a_i, a_k) = 1$. При $n = 4$ очевидно $N(A) \leqslant 2n - 2$. Через μ_i обозначается число точек из A, расстояния которых до a_i равно 1. $N(A) = 1/2 \sum_i \mu_i$. Если в A существует точка a_r, для которой $\mu_r \leqslant 2$, предложение легко доказывается по индукции относительно числа элементов множества. В дальнейшем предполагается, что $\mu_i \geqslant 3$ $(i = 1, \ldots, n)$. Из всех точек a_i, как из центров, строятся шары радиуса 1. Поверхность T тела, полученного от пересечения этих шаров, оказывается сферическим n-гранником, число ребер которого — $1/2 \left(\sum_{\mu_i + \nu_i}\right)$, а число вершин $\leqslant n + 1/3 \sum_i \nu_i$ $(\nu_i \geqslant 0)$. Отсюда на основании теоремы Эйлера и вытекает требуемое неравенство. В заключение приводится пример множества, для которого $N_3(n) = 2n - 2$.

А. Г. Школьник

5165. О соосных евклидовых винтовых движениях. Берейс, Браунер (Über koaxiale euklidische Schraubungen. Bereis R., Brauner H.), Monatsh. Math., 1957, 61, № 3, 225—245 (нем.)

В декартовой системе координат $(O; x, y, z)$ ∞^1 винтовых движений $\gamma(p)$ вокруг постоянной оси z, p — параметр винтового движения, определяет ∞^3 винтовых линий:

$$x = r\cos(\varphi + \varphi_0),\ y = r\sin(\varphi + \varphi_0),\ z = p\varphi. \quad (1)$$

Соответствующее каждой винтовой линии (1), как ребру возврата, семейство соприкасающихся плоскостей определяет винтовую поверхность, и ∞^3 таких носителей семейств плоскостей в неоднородных тангенциальных координатах u, v, w определяется равенствами

$$u = -\sin(\varphi + \varphi_0) : r\varphi,\ v = \cos(\varphi + \varphi_0) : r\varphi,$$

$$w = -1 : p\varphi. \quad (2)$$

Авторы строят такие инволюционные корреляции — линейные нулевые системы или полярные системы, которые совокупность соосных винтовых линий (1) заменяют совокупностью соосных винтовых поверхностей, как носителей семейств плоскостей (2), и изучают комплекс касательных винтовых линий $\gamma(p)$, их конгруэнции и некоторые кривые.

Рассматриваются линейные нулевые системы, которые вместе с кубической нулевой системой устанавливают преобразование между точками, являющееся осевой инверсией Мюллера относительно цилиндра $x^2 + y^2 + pp_1 = 0$ и соответственно в пространстве плоскостей осевой инверсией плоскостей Экхарта.

Рассматриваются относительно параболидов полярные системы: P_1 относительно $x^2 + y^2 - 2ez = 0$ и P_2 относительно $xy - ez = 0$, и устанавливается, что P_1, P_2 вместе с соответствующими кубическими нулевыми системами устанавливают в точечном пространстве осевую инверсию Мюллера относительно цилиндра вращения $(z; \sqrt{-ep})$ и аналогичную инверсию в пространстве плоскостей.

Наконец, рассматриваются конгруэнции, образованные общими лучами с одной стороны комплекса винтовых касательных $\gamma(p)$ и с другой стороны комплекса касательных соосных параболоидов вращения и равностороннего гиперболического параболоида.

В. С. Люкшин

5166. О фигурах плоских кривых без параллельных паратинжант. Хаупт (Sur les figures des courbes planes sans paratingentes parallèles. Haupt Otto), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 4, 440—442 (франц.)

Пусть $c(J_0)$ $(J_0 = [0, 1])$ — непрерывная плоская кривая, $t' \neq t''$, P' и P'' — две паратинжанты с точками контакта t', t'', совпадающие как прямые на плоскости. В отличие от своей предыдущей работы (РЖМат, 1957, 8928), автор считает P' и P'' идентичными, если $c(t') = c(t'')$ и существуют такие интервалы $J' \subset J_0$, $J'' \subset J_0$, что $t' \in J'$, $t'' \in J''$ и что $c(J') = c(J)''$ — простая дуга. В противном случае P' и P'' считаются различными и параллельными. Оказывается, что кривые, не имеющие параллельных паратинжант в этом смысле, суть кривые, носителями которых являются выпуклые дуги, не имеющие параллельных парантинжант в обычном смысле и не содержащие прямолинейных интервалов. Далее предлагается считать совпадающими две паратинжанты, для которых $c(t) \neq c(t'')$, если кривая содержит прямолинейный интервал, на котором лежат $c(t')$ и $c(t'')$. Формулируется условие, необходимое для того, чтобы данный континуум был носителем кривой без параллельных паратинжант в этом последнем смысле.

А. Л. Онищик

5167. Пучок первичных квадрик и ассоциированная с ним система. Баббидж (A pencil of quadric primals and its associated system. Babbage D. W.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 1, 1—6 (англ.)

Отправляясь от исследований Тодда (Todd J., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1947, 43), сопоставившего с каждым пучком квадрик в трехмерном проективном пространстве инвариантным путем некоторый другой пучок квадрик, автор сопоставляет с каждым пучком первичных (primals) квадрик $\lambda S + \mu S' = 0$ в n-мерном проективном пространстве инвариантным путем некоторую систему (индекса $n - 2$) квадрик $\sum_{r=0}^{n-2} \lambda^{n-2-r} \mu^r Q_r = 0$, где Q_r — некоторые алгебраические образования из коэффициентов уравнений квадрик $S = 0$ и $S' = 0$. При $n = 3$ получаемое им соответствие оказывается соответствием Тодда.

Н. И. Кованцов

5168. О симметрическом примитивном понятии для евклидовой геометрии. Скотт (A symmetric primitive notion for Euclidean geometry. Scott Dana), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 4, 456—461; Indagationes math., 1956, 18, № 4, 456—461 (англ.)

Пиери (Pieri, Mem. Soc. math. e fis ital. Sienze, 1908, ser. 3, 15, 345—450) показал, что тернарное соотношение $I(x, y, z)$ (точка x равноотстоит от точек y и z) может служить единственным примитивным понятием для логического развертывания евклидовой геометрии размерности $n \geqslant 2$. Автор определяет более симметричное тернарное соотношение $S(x, y, z)$, имеющее место между тремя точками, образующими в произвольном порядке прямоугольный треугольник. Доказывается, что для размерностей выше единицы соотношение $S(x, y, z)$ чисто логически определяется лишь в терминах соотношения $I(x, y, z)$ и, таким образом, может служить единственным примитивным понятием для евклидовой геометрии с $n \geqslant 2$.

При доказательстве существенно используется различие между случаями $n = 2$ и $n > 2$. Вопрос о том, будет ли примитивное понятие, достаточное для развития плоской геометрии, достаточным и для $n > 2$, автор оставляет открытым.

Г. С. Бархин

5169. Об изоморфизме группы вращений октаэдра с группой перестановок из четырех элементов. Вольф (Über die Isomorphie der Oktaederdrehungsgruppe mit der Permutationsgruppe von vier Elementen. Wolff R.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 3, 118—120 (нем.)

Группа вращений (самосовмещений) правильного октаэдра складывается из вращений около 3 осей, соединяющих средины противоположных граней, 6 осей, соединяющих средины противоположных ребер, и тождественного вращения, всего $3\cdot3+2\cdot4+1\cdot6+1=24$ вращений. Для установления изоморфизма этой группы с группой P_4 перестановок из 4 элементов перенумеровываются грани октаэдра. Для этой цели вводится соответствующая система координат; грани, лежащие в верхнем полупространстве, получают номера от 1 до 4 в соответствии с номерами октантов, те же номера приписываются лежащим под ними граням. А. Г. Школьник

5170. Представление групповой операции как отношения. Леви (Darstellung der Komposition in einer Gruppe als Relation. Levi F. W.), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 169—170 (нем.)

Допустим, что на множестве $\mathfrak{M}$ задано тернарное отношение R, подчиненное следующим требованиям: I. Существует элемент 0, для которого $(0, 0, 0)\in R$; II′. Для каждого $a\in\mathfrak{M}$ существует такой элемент $a'\in\mathfrak{M}$, что $(a, 0, a')\in R$; III. Из $(a, 0, b)\in R$ следует $b=a'$, а из $(b, 0, a')\in R-b=a$; IV. Из $(a, b, c)\in R$ вытекает (c', b', a'), (b', a', c'), $(a', c', b')\in R$; V. Из (a, b', γ'), (b, c', a'), $(c, a', \beta')\in R$ следует $(a, \beta, \gamma)\in R$. Устанавливается, что $0'=0$ и $(a')'=a$. Полагая, что $a+b=c'$ имеет место тогда и только тогда, когда $(a, b, c)\in R$, мы превратим $\mathfrak{M}$ в альтернативную лупу G. Если II′ заменить требованием: II. Для всяких $a,b\in\mathfrak{M}$ существует $c\in\mathfrak{M}$ такое, что $(a, b, c)\in R$ (II′ вытекает из I и II), то G оказывается группой. Отношение R может быть восстановлено по операции в G. Л. А. Скорняков

5171. О делении материальных тел на части. Штейнгауз Г., Бюл. Польск. АН, 1956, отд. 3, 4, № 12 801—804

В точках пространства определена плотность — неотрицательная измеримая функция $f(P)$. Характеристическое множество $E=E_{(P\in Q)}\{f(P)>0\}$ тела Q предполагается ограниченным и имеющим положительную меру. (Конечный) интеграл от плотности по характеристическому множеству тела составляет его массу. Тела, плотности которых (с точностью до множества точек меры нуль) совпадают, считаются тождественными. Разбивая характеристическое множество E на подмножества E_i $(i=1, \ldots, n)$, получают деление тела Q на части Q_i, характеристическими множествами которых служат E_i. Рассматривается задача деления данного тела на n частей K_i и выбора n точек A_i так, чтобы сумма моментов инерции этих частей относительно выбранных точек была наименьшей. Устанавливается, что необходимым (но не достаточным) условием является разделение тела на такие части, которые отделялись бы друг от друга плоскостями, равноудаленными от соответствующих центроидов. Доказывается существование решения поставленной задачи. Искомый минимум $m=\sum_{i=1}^{n} I(K_i, A_i)$ является убывающей функцией числа n частей деления, причем $\lim_{n\to\infty} m(n)=0$. При данных Q и n решение обычно единственно; однако существуют тела, для которых поставленная задача имеет конечное или бесконечное множество различных решений (например, однородный шар). А. Г. Школьник

5172. Вывод формул размерности проективной геометрии из ограниченных аксиом соединения. Ленц (Herleitung von Dimensionsformeln der projektiven Geometrie aus eingecsbränkten Verknüpfungsaxiomen. Lenz Hanfried), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953 (1954), 81—87 (нем.)

Показывается, что основные формулы для размерности, относительной размерности и дуальной (ко)размерности, объединения и пересечения подпространств конечно- или бесконечномерного проективного пространства следуют из аксиом A-1,2,3 Веблена (Veblen) и Янга (Young) и из допущения, что каждая линия имеет по крайней мере две точки. A. J. Hoffman

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 4, 395.

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

5173. О геометрическом месте середин хорд, делящих площадь выпуклой фигуры в отношении k. Радзишевский, Левандовский (Sur le lieu géométrique des milieux des cordes divisant l'aire d'un ovale dans le rapport k. Radziszewsk Konstanty, Lewandowski Zdzisław), Ann. Univ. M. Curie Skłodowska, 1955 (1957), A9, № 1-13, 177—180 (франц.; рез. русск., польск.

Показано, что геометрическое место середин хорд, делящих в отношении k площадь плоской выпуклой фигуры, имеющей центр симметрии, есть выпуклая кривая. Существуют выпуклые фигуры, не обладающие этим свойством, например равносторонний треугольник. С. И. Зетель

5174. О хордах выпуклых кривых. Штейнхаус (On chords of convex curves. Steinhaus H.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 6, 595—597 (англ.; рез. русск.)

Пусть K — гладкая замкнутая выпуклая кривая. Если три угла a, b, c удовлетворяют условию $a+b+c=180°$, то существуют такие три хорды кривой K с общей серединой, что последовательные углы между половинами этих хорд равны соответственно a, b, c, a, b, c. Доказательство основывается на предложении: существуют только две хорды линии K горизонтального направления и направления, составляющего угол $0<a<180°$, имеющие общую середину. Это предложение доказывается элементарным путем. Э. Г. Позняк

5175. Выпуклые оболочки простых пространственных кривых. Дерри (Convex hulls of simple space curves. Derry Douglas), Canad. J. Math. 1956, 8, № 3, 383—388 (англ.)

Автор показывает, что если A_n — кривая действительного порядка n в действительном евклидовом n-мерном пространстве, то ее выпуклая оболочка состоит из всех точек r-симплексов, имеющих $r+1$ вершину на A_n, где $r=[n/2]$. Граница выпуклой оболочки A_n состоит из всех точек тех q-симплексов, для которых вершины являются $q+1$ точкой A_n, включая c конечных точек, причем $q\leqslant\frac{1}{2}(n-2+c)$, $c=0, 1, 2$. Если точки $s_0, s_1, \ldots, s_r$, соответственно $s_0', s_1', \ldots, s_r'$, расположены попеременно на кривой A_{2r}, тогда общая точка r-пространств, содержащих $s_0, s_1, \ldots, s_r$, соответственно $s_0', s_1', \ldots, s_r'$, находится внутри выпуклой оболочки A_{2r}. A. Heppes

5176. О теореме Холдича и ее аналогах в неевклидовой геометрии. Сантало (Sobre el teorema de Holditch y analogos en geometria no euclidiana. Santaló L. A.), Math. notae, 1954, 14, № 1-2, 32—49 (исп.)

Пусть точка A_0 описывает в неевклидовой плоскости замкнутую кривую C, ограничивающую площадь F_0; пусть A_1 — точка, сопряженная с A_0 относительно абсолюта, т. е. $(A_0, A_1)=0$, а B_0 и C_0 — точки на прямой A_0A_1, удаленные от A_0 соответ-

ственно на s_1 и s_2 и описывающие при движении A_0 вдоль C кривые, ограничивающие площади F_1 и F_2. Если K — кривизна пространства, а m — число оборотов, совершаемых прямой A_0A_1, когда A_0 описывает C, то

$$\begin{vmatrix} 2\pi m - KF_0 & 0 & 1 \\ 2\pi m - KF_1 & \sin s_1\sqrt{K} & \cos s_1\sqrt{K} \\ 2\pi m - KF_2 & \sin s_2\sqrt{K} & \cos s_2\sqrt{K} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, при $F_0 = F_2$ следует

$$\frac{F_0 - F_1}{2\pi m - KF_0} = \frac{2\sin\frac{(s_2 - s_1)\sqrt{K}}{2}\sin\frac{s_4\sqrt{K}}{2}}{K\cos\frac{s_2\sqrt{K}}{2}}$$

Эта формула, найденная Абаскалем и Родеха (Abascal E. V., Rodeja E. G., Collec. Math., 1952, 5), методами дифференциальной геометрии в теории поверхностей постоянной кривизны, является обобщением на такие поверхности известной теоремы Холдича (Пуссен В., Курс анализа бесконечно малых, т. I, М.—Л., 1933, стр. 380).

Курита (РЖМат, 1955, 6092) обобщил теорему Холдича на случай n-мерного евклидова пространства и высказал утверждение о возможности такого обобщения на случай n-мерного сферического пространства. Автор доказывает теорему: Пусть неевклидово пространство n (n — четно) измерений (или n-мерное пространство постоянной кривизны K) движется в себе так, что точки A_0, A_1, ..., A_n, лежащие на одной прямой, описывают замкнутые гиперповерхности, ограничивающие соответственно объемы V_0, V_1, ..., V_n. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\frac{1}{2} I O_n - K^{\frac{n}{2}} V_i}{\prod\limits_{j(j\neq i)} \sin(S_i - S_j)\sqrt{K}} = 0,$$

где I — число оборотов, совершаемых прямой A_0A_1, когда A_0 описывает V_0, S_i — расстояние между A_0 и A_i, $O_n = 2\pi^n : \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ — объем единичной сферы.

Доказывается также теорема: Если неевклидова плоскость движется в себе так, что она возвращается в исходное положение, то геометрическим местом точек, описывающих кривые, ограничивающие равные площади, являются концентрические окружности.

Это обобщение теоремы Кэмпа (Kampe, Messengers of Mathematics, 1878). Г. И. Дринфельд

5177. Верхняя и нижняя границы площади треугольника, для которого известны две симметрические функции его сторон. Фракт (Upper and lower bounds for the area of a triangle for whose sides two symmetric functions are known. Frucht Robert), Canad. J. Math., 1957, 9, № 2, 227—231 (англ.)

Доказываются неравенства

$$\frac{s(s-q)^2(s+2q)}{27} \geqslant \Delta^2 \geqslant \frac{s(s+q)^2(s-2q)}{27} \qquad (1)$$

для площади Δ треугольника со сторонами a, b, c, причем s и q — симметрические функции сторон треугольника, а именно: $s = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, $q = (a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab)^{\frac{1}{2}}$ или $q = \left(\frac{1}{2}Q\right)^{\frac{1}{2}}$, где $Q = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$ — мера «неравносторонности» треугольника (РЖМат, 1954, 5729).

Неравенства (1) дают более точные (узкие) границы для площади треугольника, чем неравенства Битти (РЖМат, 1956, 6836):

$$\frac{(K-H)^2}{12} \geqslant \Delta^2 \geqslant \frac{(K-H)(3K-5H)}{12}, \qquad (2)$$

где $H = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$; $K = bc + ca + ab$.

Неравенства (2) выражаются через s и q:

$$\frac{(s^2-q^2)^2}{27} \geqslant \Delta^2 \geqslant \frac{(s^2-q^2)(s^2-4q^2)}{27}, \qquad (3)$$

если использовать легко проверяемые формулы:

$$H = \frac{1}{3}(2s^2+q^2); \qquad K = \frac{1}{3}(4s^2-q^2).$$

Доказательство неравенств (1) в реферируемой статье дается с помощью формулы для тригонометрического решения кубического уравнения вида $x^3 + 3Cx + D = 0$ с действительными корнями x_1, x_2, x_3, удовлетворяющими условию:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Конец статьи посвящен нахождению верхней и нижней границ для произведения трех сторон треугольника, когда даны две симметрические функции этих сторон s и q, а также когда даны первые две элементарные симметрические функции $2s$ и K.

Н. А. Колмогоров

5178. Инверсная и конформная выпуклость. Келли, Страус (Inversive and conformal convexity. Kelly P. J., Straus E. G.), Proc. Amer, Math. Soc., 1957, 8, № 3, 572—577 (англ.)

Множество S пространствaа Евклида E_n автор называет инверсно выпуклым относительно точки P, если существует инверсия с центром в точке P, которая переводит S в выпуклое множество. Множество S и его граничная поверхность называются инверсно (конформно) выпуклыми, если найдется такая точка, относительно которой множество S инверсно выпукло. Для поверхности вводится понятие локальной выпуклости. В работе рассматриваются условия (необходимые или достаточные) для инверсной выпуклости множества и поверхности (кривой). Для этого автор вводит понятие опорной гиперсферы множества S в точке x, проходящей через точку x, с одной (отрицательной) стороны от которой нет точек множества S. Показывается, что множество S инверсно выпукло относительно P, если для каждой граничной точки x найдется опорная гиперсфера, проходящая через P. Конструируется множество K_S точек, относительно которых множество S инверсно выпукло, как пересечение множеств K_x, каждое из которых является объединением «отрицательных сторон» всех «максимальных» опорных гиперсфер множества S в точке x. S инверсно выпукло тогда и только тогда, когда K_S не пусто.

Здесь обобщается известное свойство выпуклых областей: каждая ее точка имеет опорную плоскость. В случае плоскости автор, обобщая другое свойство выпуклой области (прямая, не содержащая отрезка границы, пересекает ее не более чем в двух точках), дает второе условие инверсной выпуклости. Здесь рассматривается ориентированная кривая и множество кругов, проходящих через три точки кривой, ориентация которых определяется ориентацией кривой. Все множество этих кругов позволяет конструировать почти так же, как и в общем случае, область K_S. Кривая инверсно выпуклая тогда и только тогда, когда K_S не пусто.

Пользуясь тем, что для дважды дифференцируемой кривой круг кривизны есть предельное положение круга, проходя его через три смежные точки, автор формулирует теоремы, связывающие понятие инверсной выпуклости и понятие кривизны.

В общем случае круг кривизны заменяется предельным кругом, являющимся предельным положением круга, проходящего через три смежные точки кривой. Например, имеет место теорема: Если круг кривизны имеет ограниченный радиус, отличный от нуля, то соответствующая кривая инверсно выпукла относительно точки P, достаточно удаленной от данной кривой.

В. И. Ведерников

5179. Овалы с эквихордальными точками. Линис (Ovals with equichordal points. Linis Viktors), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 6, 420—422 (англ.)

Точка F называется эквихордальной для линии C, если все хорды C, проходящие через F, имеют одну и ту же длину.

Дирак доказал (Dirac, J. London Math. Sos., 1952, 27, 429—437), что если C есть овал (ограниченная замкнутая выпуклая плоская кривая класса C^2), то C не может иметь более двух эквихордальных точек, и что если овал C имеет две таких точки F_1, F_2, то он обладает следующими свойствами: 1) C симметричен относительно прямой F_1F_2; 2) C симметричен относительно прямой, перпендикулярной F_1F_2 и проходящей через середину O отрезка F_1F_2; 3) если $r = r(\alpha)$ есть полярное уравнение C, когда F_1 (или F_2) является полюсом, а F_1F_2 — полярной осью (ориентированной направлением $[F_2F_1]$), то $r(\alpha)$ строго возрастает (соответственно убывает), когда α изменяется в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. В реферируемой статье доказывается, что овал, имеющий две эквихордальные точки и обладающий названными свойствами 1)—3), будет необходимо окружностью.

П. П. Касьянков

5180 К. Выпуклые фигуры и многогранники. Люстерник Л. А., М. Гостехиздат, 1956, 212 стр., илл., 2 р. 95 к.

Книга является переработкой и дополнением старого сочинения автора «Выпуклые тела» (2-е издание, М.—Л., 1941). Лишь написанная А. Д. Александровым гл. V, посвященная теореме Минковского о выпуклых многогранниках и обобщающей ее теореме А. Д. Александрова, осталась без изменений. Все содержание старой книги вошло в новое издание; изменения касаются лишь деталей изложения и поисков более рационального расположения материала. Наряду с этим книга содержит много нового: упомянем, для примера, об интересных свойствах центрально-симметрических выпуклых фигур и тел (§§ 8—9, гл. II), об общей теореме А. Д. Александрова о необходимых и достаточных условиях, характеризующих развертку выпуклого многогранника (§ 18, гл. III), о перечислении правильных (выпуклых и звездчатых) и выпуклых полуправильных многогранников (§ 32, гл. VI, где впервые в литературе отмечается существование 14-го полуправильного архимедова многогранника, указанного В. Г. Ашкинузе), об изящной теореме П. Леви о хордах плоских континуумов (§ 34, гл. VI). Идейное содержание книги возросло от включения параграфов, посвященных точным определениям фигуры и выпуклой фигуры, теоремам Лебега (лебеговское определение размерности) и Боля-Брауера (теорема о неподвижной точке; здесь указаны также пути приложения этой теоремы к доказательству теорем существования в теории уравнений) и нормированным пространствам (§§ 31, 36 и 37, гл. VI). Книга содержит много ссылок на результаты и литературу, появившуюся после 1941 г.; ряд теорем здесь сформулирован без доказательства со ссылками на другие книги или статьи.

Книга рассчитана в первую очередь на студентов младших и средних курсов университетов и пединститутов и будет для этих читателей чрезвычайно полезной. В некоторых случаях можно было бы дополнить или уточнить имеющиеся у автора литературные ссылки (нетрадиционное доказательство леммы Коши автор встретил не в книге референта и В. Г. Болтянского, как он указывает на стр. 86, а в другой книге; в § 34 стоило сослаться на книгу А. М. Яглома и референта «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», М., 1954, содержащую иное изложение того же материала).

И. М. Яглом

См. также: 4425 К, 4573, 4648, 4668, 4673, 4705, 4708, 4769

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

5181. О методах возмущений, включающих разложение по параметру. Беллман (On perturbation methods involving expansions in terms of a parameter. Bellman Richard), Quart. Appl. Math., 1955, 13, 195—200 (англ.)

Указывается, что для многих задач, где решение представлено в виде ряда (сходящегося или асимптотического) по степеням параметра λ, входящего в уравнение, решение становится все менее эффективным с ростом λ. Предлагается способ, применимый во многих случаях, обойти это затруднение тем, что разлагать решение по степеням нового параметра ρ, который подбирается надлежащим образом в виде степенного ряда по λ. Указанный способ поясняется на примерах: 1) $x^2 + x = \lambda$; 2) $x + \lambda Ax = c$, где A — линейный положительно определенный оператор (в частности, положительно определенная матрица). Затем этот способ применяется к задаче о нелинейных колебаниях струны и к уравнению Ван-дер-Поля.

В. А. Магарил

5182. Перенесение теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах на разностные неравенства. Мышкис А. Д., Гринфельд А. Г., Уч. зап. Белорусск. ун-та, 1957, вып. 32, 25—2

Пусть для некоторых n и m числа $x_1, \ldots, x_{n+m}$; $y_1, \ldots, y_{n+m}$; $\delta_1, \ldots, \delta_{n+m}$ удовлетворяют соотношениям

$$y_i = x_i + \delta_i \ (i = 1, \ldots, m),$$

$$x_{m+i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{m+i-j} \quad \text{и} \quad y_{m+i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} y_{m+i-j} \ (i = 1, \ldots, n),$$

где $\|a_{ij}\|$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ — данная матрица. Пусть, далее, числа $\lambda_{k,i}$ $(k, i = 1, \ldots, n+m)$ определяются соотношениями $\lambda_{k,k} = 1$ $(k = 1, \ldots, n+m)$, $\lambda_{k,i} = 0$ $(k = 1, \ldots, n+m;\ 1 \leqslant i < k,\ k < i \leqslant m)$,

$$\lambda_{k,\,m+i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \lambda_{k,\,m+i-j} \ (\max [1, k-m+1] \leqslant i \leqslant n).$$

Тогда

$$y_i = x_i + \sum_{k=1}^{i} \lambda_{k,i} \delta_k \ (i = 1, \ldots, n+m).$$

Отсюда непосредственно вытекает теорема о разностных неравенствах: если $\delta_k \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n+m)$ и $\lambda_{k,i} \geqslant 0$ $(k, i = 1, \ldots, n+m)$, то $y_i \geqslant x_i$ $(i = m+1, \ldots, m+n)$.

Авторы высказывают предположение о возможности обобщения теорем типа теоремы Чаплыгина на основе частично упорядоченных пространств. Некоторые такие обобщения рассмотрены в работах РЖМат, 1956, 9110, З. Б. Цалюк, Уч. зап. Удмуртского пед. ин-та, 1957, вып. 11, 129—130. Н. В. Азбелев и З. Б. Цалюк

5183. Применение конечноразностных уравнений к приближенному решению проблем упругости и сопротивления материалов. Акар-Бенитес (Aplicacion de las ecuaciones en diferencias finitas a la resolucion aproximada de problemas de elasticidad y resistencia de materiales. Hacar Benitez Miguel-Angel), Ciencias, 1957, 22, № 3, 563—599 (исп.)

Элементарное изложение метода конечных разностей на квадратных, треугольных и полярных сетках. Никаких оценок погрешностей метода конечных разностей не имеется. В качестве примеров рассмотрены уравнение Пуассона и бигармоническое уравнение.

В. К. Саульев

5184. Точность разностной аппроксимации плоской задачи Дирихле с кусочно-гладкими граничными значениями. Вазов (The accuracy of difference approximations to plane Dirichlet problems with piecewise analytic boundary values. Wasow Wolfgang R.), Quart. Appl. Math., 1957, 15, № 1, 53—63 (англ.)

Известные оценки Гершгорина разности между точным решением граничной задачи и решением его конечно-разностной аппроксимации содержат модули частных производных от искомой функции, например, до четвертого порядка. В угловых точках контура и в точках, где первая или вторая производная граничной функции терпят разрывы, эти производные, вообще говоря, становятся неограниченными. Автор доказывает, что в случае простейшей аппроксимации задачи Дирихле для уравнения Лапласа и области, ограниченной гладкой замкнутой кривой порядок погрешности не зависит от разрыва первой производной граничной функции вне непосредственной близости точки разрыва.

Рассматривается следующая задача

$$\Delta_h v = \varphi(x, y) \text{ в } R_n, \quad v = 0 \text{ на } C.$$

Решение ее представляется в виде

$$v(P) = h^2 \sum_{Q \in R_n} G_h(P, Q) \varphi(Q),$$

где $G_h(P, Q)$ есть функция Грина для разностного оператора Δ_h. В предположении, что Q отдалена от границы на определенное расстояние, не зависящее от шага сетки h и $\overline{PQ} \geqslant ah^{1/2}$, где a не зависит от h, выводится следующее соотношение: $G_h(P, Q) = G(P, Q) + O(h)$ для $P \in R_n$, $Q \neq P$. Здесь $G(P, Q)$ — функция Грина для оператора Лапласа Δ.

Затем доказывается, что для решения $u(x, y)$ исходной задачи Дирихле в узлах, где $f(Q)$ не аналитична, справедливы соотношения

$$\partial^{p+q} u / \partial x^p \partial^q = \begin{cases} O(\log \rho), & q = 0 \\ O(\rho^{-q}), & q > 0 \end{cases};$$

$$\partial^{p+q} u / \partial y \partial x^{p+q-1} = \begin{cases} O(\log \rho), & q = 0 \\ O(\rho^{-q}), & q > 0 \end{cases}$$

Основной результат формулируется в виде следующей теоремы: погрешность $v(p) = U(P) - u(P)$ имеет $O(h)$ при соблюдении следующих условий: а) граница является простой замкнутой аналитической кривой; б) граничная функция $f(S)$ непрерывная и кусочно-гладкая; в) расстояние от особенной точки до ближайшего узла не меньше, чем $bh (0 < b < 1$, b не зависит от $h)$; г) если $f_h(Q) = f(Q')$, $Q' \in C$, то расстояние от особой точки до сегмента QQ' не должно быть меньше bh.

М. А. Алексидзе

5185. Принцип Сен-Венана и осциллирующие функции. Мельник С. И., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 218—222

Резюме доклада на заседании Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям (январь 1956 г.). Основное содержание доклада опубликовано в работе автора (РЖМат, 1954, 5256).

А. Д. Мышкис

5186. Об итеративных процессах и функциональных уравнениях. Дом, Фишер (On iterative processes and functional equations. Domb C., Fisher M. E.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, 652—662 (англ.)

Рассматривается функциональное уравнение $F(x) = \chi(x) F[\theta(x)]$, где F — искомая, а χ и θ — заданные функции такие, что

$$\chi(1) = \theta(1) = 1. \qquad (1)$$

Вводятся функции $\varphi(u, v) = u\chi(u, v)$, $\psi(u, v) = u\chi(v/u)\theta(v/u)$ и итеративный процесс $u_{n+1} = \varphi(u_n, v_n)$, $v_{n+1} = \psi(u_n, v_n)$. В случае сходимости процесса будет $\lim u_n = \lim v_n$. Если положить $u_0 = F(1)$ и $v_0 = u_0 x$, то $\lim u_n = F(x)$. Сходимость процесса имеет место при $|\theta'(1)| < 1$ (при $|\theta'(1)| < 1$ замена переменной x снова приводит к сходящемуся процессу).

Далее рассматриваются преобразования, позволяющие отказаться от условий (1) и, в некоторых случаях, ускорить сходимость.

В качестве примеров приводятся следующие тождества для гипергеометрических функций

$$F(1/2, 1/2; 1; x) =$$

$$= (1 + x^{1/2})^{-1} F(1/2, 1/2; 1; 4x^{1/2}(1 + x^{1/2})^{-2}),$$

$$F(1, 1; 3/2; x) = (1 - 2x) F(1, 1; 3/2; 4x(1 - x)).$$

Во втором из них условия (1) нарушены.

М. К. Гавурин

5187. Об одной форме решения систем линейных уравнений. Мачинский (Über eine form der Lösung linearer Gleichungsysteme. Matschinski M.), Portugaliae math., 1955, 14, № 3-4, 133—139 (нем.)

Рассматривается решение линейной системы

$$AX = f \qquad (1)$$

с симметричной матрицей A, гауссово треугольное разложение которой имеет вид $BX = F$, где B — верхняя треугольная матрица с элементами b_{ik}, $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, $F_k = \sum_{i=k}^{n} c_{ki} f_i$.

На основании леммы: $\min \Delta^2 = g - \sum_k \sum_i B_{ki} f_k f_i$, где $\Delta^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2f_1x_1 - \ldots - 2f_nx_n + g$, автор выводит для решения системы (1) формулы

$$x_j = \sum_k B_{kj} f_k = \sum_k \sum_i \frac{c_{ik}c_{ij}f_k}{b_{ii}c_{ii}} = \sum_i \frac{c_{ij}F_i}{b_{ii}c_{ii}}.$$

Эти формулы удобны при решении системы с различными правыми частями, а также при решении систем в методах окаймления. В. Н. Кублановская

5188. Усовершенствованная процедура для объединения кусочных решений. Крон (Improved procedure for interconnecting piecewise solutions. Kron Gabriel), J. Franklin Inst., 1956, 262, № 5, 385—395 (англ.)

Описание усовершенствованной вычислительной процедуры для решения специальных систем линейных уравнений методом секций (РЖМат, 1956, 6872), не требующей построения ряда промежуточных матриц, характеризующих расположение разбиений в исходной системе. А. П. Ершов

5189. Расчет очень сложных упругих структур. Крон (Solving highly complex elastic structures in easy stages. Kron Gabriel), J. Appl. Mech., 1955, 22, 235—244 (англ.)

Большие системы линейных алгебраических уравнений, описывающих физические структуры, решаются методом разъединения (tearing), предложенным ранее автором.

5190. Нижняя граница для ранга и расположение собственных значений матрицы. Фань Цюй, Гофман (Lower bounds for the rank and location of the eigenvalues of the eigenvalues of a matrix. Fan Ky, Hoffman A. J.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1954, № 39, 117—130 (англ.)

Авторы доказывают ряд теорем о расположении собственных значений и об оценке ранга матриц с комплексными элементами, уточняющих и обобщающих известные результаты Штейна (Stein P., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, 48, 59—60), С. А. Гершгорина (Изв. АН СССР, 1931, 7, 749—754) и др.

Прямое отношение к указанному кругу вопросов имеют работы Шнейдера и Д. М. Котелянского (РЖМат, 1956, 760, 2787). К. Н. Юрчук

5191. Обобщение схемы Горнера. Эверлинг (Eine Verallgemeinerung der Hornerschen Schemas. Everling W), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 1-2, 74 (нем.)

Пусть $P(x) = \sum_{r=0}^{n} A_r P_r(x)$, где $P_{-1}(x) = 0$; $P_0(x) = a_0$; $P_r(x) = (a_r x - b_r) P_{r-1}(x) + c_r P_{r-2}(x)$ $(r = \overline{1, n})$. Автор дает схему, аналогичную схеме Горнера, для вычисления коэффициентов $B_r(\xi)$ в равенстве

$$P(x) = a_0 \cdot B_0(\xi) + (x - \xi) \sum_{r=1}^{n} a_r P_{r-1}(x).$$

А. П. Доморяд

5192. Быстрый способ решения алгебраических уравнений. Часть I. Олденбергер (Ein schnelles Lösungsverfahren für algebraische Gleichungen. Teil I. Oldenburger Rufus), Regelungstechnik, 1956, 4, № 10, 261—266 (нем.; рез. англ.)

Уравнение n-й степени с действительными коэффициентами подстановкой $z = x + a$ приводится к уравнению $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, все корни которого лежат левее мнимой оси (что проверяется с помощью критерия Рауса), а действительные корни лежат в интервале $(-a_1, 0)$.

Для испытания делимости $f(x)$ на $x + A$ автор рекомендует применять схему Горнера — «справа налево», что облегчает исправление испытуемого числа — A. Тот же способ рекомендуется (при $n = 4$) для выделения множителей 2-й степени в уравнениях, не имеющих действительных корней. Приведены иллюстративные примеры. А. П. Доморяд

5193. Быстрый способ решения алгебраических уравнений. Часть 2. Олденбергер (Ein schnelles Lösungsverfahren für algebraische Gleichungen. Teil II. Oldenburger R.), Regelungstechnik, 1957, 5, № 1, 15—19 (нем.)

Часть 1 см. реф. 5192.

Пусть уравнение

$$x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0 \qquad (1)$$

устойчиво и имеет комплексные корни. Тогда утверждается, что один из множителей

$$x^2 + a_1x + a_2; \quad a_2x^2 + a_3x + a_4; \quad a_4x^2 + a_5x + a_6$$

приблизительно совпадает с квадратичным множителем левой части уравнения (1), который обладает максимальной по модулю суммой корней.

В. К. Саульев

5194. Один способ приближенного решения алгебраических уравнений высших степеней. Бельтюков Б. А., Уч. зап. Иркутского гос. пед. ин-та, 1957, вып. 13, 115—127

Описываются способы приближенного нахождения действительных корней уравнений 6-й и 8-й степеней при помощи заранее вычерченных вспомогательных графиков.

Уравнение шестой степени

$$\sum_{n=0}^{n=6} b_k p^{6-k} = 0 \qquad (1)$$

подстановкой $p = \sqrt{\pm k} \cdot x - b_1/6$, $(k = b_2 - 5b_1^2/1210)$ преобразуется к виду

$$x^6 \pm x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0, \qquad (2)$$

коэффициенты которого получаются по схеме Горнера и последующим делением на коэффициент при x^6. Затем вычисляются величины

$$\alpha = \mp a_3/4, \quad \beta = (1 + 6\alpha^2 \mp a_4)/2, \quad \gamma = [4\alpha(\beta - \alpha^2) \mp a_5]/2,$$

$$\rho = (\beta - \alpha^2)^2 + \gamma^2 \mp a_6. \qquad (3)$$

Заранее заготовляются три чертежа: 1) положительные ветви кубических парабол $y = x^3$ и $y = -x^3$, вычерченные на одном листе миллиметровки, 2) квадратная парабола $y' = x'^2$, начерченная на кальке и 3) пря-

мой угол BAD, тоже начерченный на кальке. Ход решения зависит от знака перед x^4 в (2).

Случай знака минус. На первом чертеже помечаются точки $(\alpha, 0)$ и (γ, β). Второй чертеж накладывается на первый так, чтобы x-ось совпадала с x'-осью, а вершина параболы $y' = x'^2$ совпала с точкой $(\alpha, 0)$. На стороне AB угла BAD откладывается $AC = \sqrt{\rho}$ (если $\rho \geqslant 0$), после чего третий чертеж накладывается на два первых так, чтобы точка C совпала с ранее помеченной точкой (γ, β) на первом чертеже. Сторона AD угла BAD пересекает квадратную параболу в некоторой точке M. Ордината последней пересекает x-ось в точке Q, а продолжение ее пересекает ветвь кубической параболы в точке P. Вращая третий чертеж вокруг центра C, ищут такие положения его, при которых $AM = PQ$. Абсциссы $OQ = x$ точки M, «скользящей» по квадратной параболе, равны в этих положениях действительным корням уравнения (2). Если $\rho > 0$, то третий чертеж накладывается на первые два так, чтобы с точкой (γ, β) совпадала вершина A прямого угла BAD, на стороне AD которого откладывается $AC = \sqrt{-\rho}$.

В случае знака плюс перед x^4 в (2) на третий чертеж вместо угла BAD наносится полуокружность диаметра $AB = \sqrt{\rho}$. Точка A совмещается с точкой (γ, β) и вокруг нее производится вращение. Окружность пересекает квадратную параболу в точке M. Искомые значения $OQ = x$ соответствуют положениям, при которых $BM = PQ$.

Уравнение восьмой степени

$$\sum_{n=0}^{n=8} b_n p^{8-n} = 0 \qquad (4)$$

подстановкой $p = \sqrt{\pm k} \cdot x - b_1/8 \left(k = b_2 - 7b_1^2/16 \neq 0\right)$ аналогично предыдущему преобразуется к виду

$$x^8 \pm x^6 + a_3 x^5 + a_4 x^4 + a_5 x^3 + a_6 x^2 + a_7 x + a_8 = 0$$

По-прежнему заготовляются три чертежа, несколько отличные от описанных. Взаимное их расположение определяется координатами, находимыми по формулам, аналогичным формулам (3). Дальнейшее осуществляется способом, сходным с таковым для уравнений шестой степени, но несколько более сложным.

Уравнения пятой степени рекомендуется привести к виду (1), а уравнения седьмой степени — к виду (4) умножением их на p.

Приведен числовой пример. Автор предполагает на основе данного способа сконструировать прибор, механизирующий процесс решения. А. Б. Штыкан

5195. **Определение действительных корней алгебраических уравнений на малых электронных вычислительных машинах. Шпиндельбергер** (Bestimmung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen auf elektronischen Kleinrechenanlagen. Spindelberger W.), MTW-Mitt., 1957, 4, № 5, 305—310 (нем.)

Для решения на электронной машине ИБМ 604/1 алгебраическое уравнение без кратных корней подстановкой $z = \tau \cdot x$ (τ — верхняя граница абсолютных значений действительных корней) приводится к уравнению $f(x) = 0$, у которого все действительные корни лежат в интервале $(-1, 1)$. Выбрав, например, $\Delta x = 2^{16} \cdot 10^{-7}$, для $x_k = 1 - k \cdot \Delta x$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ на машине вычисляются по схеме Горнера значения $f(x_k)$. При $f(x_{s-1}) > 0$ и $f(x_s) < 0$ программой предусматриваются дальнейшие вычисления $f(x)$ при $x'_{s+1} = x_s + \Delta x 2^{-1}$, при $x'_{s+2} = x'_{s+1} - \operatorname{sign} f(x'_{s+1}) \Delta x \cdot 2^{-2}$ и т. д.

Коэффициенты данного уравнения задаются на перфокартах, коэффициенты $f(x)/(x - X)$ (X — найденное значение корня) также переносятся на перфокарты для дальнейших вычислений. А. П. Доморяд

5196. **Численное интегрирование одного класса интегралов.** Дас (The numerical evaluation of a class of integrals. Das S. C.), Proc. Cambrigde Philos. Soc., 1956, 52, № 3, 442—448 (англ.)

Рассматривается интеграл

$$I = \int_h^\infty \ldots \int_k^\infty f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1 dx_2, \ldots, dx_N, \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — случайные величины, имеющие нормальный закон распределения $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, с заданной корреляционной матрицей (ρ_{ij}). Численные квадратуры для таких интегралов очень трудоемки при $N \geqslant 2$. Автор предлагает специальный прием вычисления интеграла (1), состоящий в сведении интеграла (1) к одномерному интегралу от табулированной функции в случае $N = 2$ и $N = 3$, а в случае произвольного измерения N — к интегралу от табулированных функций измерения $k > (N-1)/2$. При $N = 2$,

$$I = \frac{1}{2\pi (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \times \qquad (1)$$

$$\times \int_h^\infty \int_k^\infty \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(y_1^2 + y_2^2 - 2\rho y_1 y_2\right)\right] dy_1 dy_2,$$

и для рассматриваемого интеграла (1) получается выражение

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(a_1 x + b_1)\, P(a_2 x + b_2)\, e^{-x^2} dx, \qquad (2)$$

где $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) dt$, а постоянные a_1, b_1, a_2 и b_2 находятся из условий:

$$\rho = \frac{a_1 a_2}{\sqrt{(2 + a_1^2)(2 + a_2^2)}}; \quad h = \frac{b_1 \sqrt{2}}{\sqrt{2 + a_1^2}}, \quad k = \frac{b_2 \sqrt{2}}{\sqrt{2 + a_2^2}},$$

где можно положить $a_1 = a_2$, если $\rho > 0$, или $a_1 = -a_2$, если $\rho < 0$. Затем интеграл (2) заменяется приближенно суммой

$$J = h \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 h^2} P(anh + b_1)\, P(\pm anh + b_2) + E(h).$$

Оценивается погрешность $E(h)$.

Метод дает хорошую точность при небольшом объеме вычислений. Приводится ряд числовых примеров. Исследован случай произвольной размерности N. Рассматриваемый метод применяется к вычислению интеграла

$$\operatorname{tg}(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)\, dx}{x^2 + t^2}.$$

А. Н. Иванова

5197. **Оптимальные квадратурные формулы в пространствах s измерений.** Тачер (Optimum quadrature formulas in s dimensions. Thacher Henry C., Jr.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, 11, № 59, 189—194 (англ.)

Говорят, что формула $\int\dots\int_s \varphi(x^{(1)},\dots,x^{(s)})\times dx^{(1)}\dots dx^{(s)} = \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi(\varphi_i^{(1)},\dots,x_i^{(s)}) - R$, имеет степень точности n, если она верна, без остатка R, для всех многочленов степени $\leqq n$ от переменных $x^{(j)}$ $(j=1,\dots,s)$. Построение ее равносильно решению относительно c_i и $x_i^{(j)}$ алгебраической системы

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \prod_{j=1}^{s}[x_i^{(j)}]^{n_j} = \int\dots\int_s \prod_{j=1}^{s}[x^{(j)}]^{n_j}\,dx^{(j)} = I_{n_1,\dots,n_s}\left(\sum_{j=1}^{s} n_j \leqq n\right). \quad (1)$$

Анализ системы, ввиду ее нелинейности, как правило, труден. Для облегчения анализа автор рекомендует воспользоваться матричным и векторным аппаратом. Определяются $m\times m$ диагональные матрицы $G=[\sqrt{c_i}\,\delta_{hi}]$, $X^{(j)}[x_i^{(j)}\delta_{hi}]$ (δ_{hi} — символ Кронекера). Уравнения (1) запишутся в виде

$$\mathrm{tr}\left\{G\prod_{j=1}^{s}(X^{(j)})G\right\} = I_{n_1,\dots,n_s}. \quad (2)$$

Вводится также m-мерный вектор — колонка ε с элементами, равными единице, и векторы $\xi=G\varepsilon$, $\xi_j = X^{(j)}G\varepsilon$, $\xi_{jk} = X^{(j)}X^{(k)}G\varepsilon$. Для формул второй степени точности, например, условия (2) запишутся тогда как $\xi^T\xi = I_0$, $\xi^T\xi_j = I_j$, $\xi_{jk}^T\xi = I_{jk}$ (индексом T в A^T обозначена операция транспонирования матрицы A).

Векторная запись позволяет внести в анализ системы (1) элемент геометрической наглядности.

Система (1) решена для квадратной области интегрирования $-1\leqq\xi^{(j)}\leqq+1$, равных весовых коэффициентов c_i и формул второй и третьей степени точности в случае плоскости. В. И. Крылов

5198. **Приближенное решение уравнений ламинарного пограничного слоя посредством полиномов. Росциszewский** (An approximate solution of laminar boundary layer equations by means of polynomials. Rościszewski Jan), Arch. mech. stosowanej, 1957, 9, № 4, 381—393 (англ.; рез. русск., польск.)

Пусть ось y направлена по нормали к поверхности тела, обтекаемого вязкой жидкостью, ось x по касательной к этой поверхности и $u(x, y)$ есть компонента скорости вдоль оси x. Автор предлагает приближенный метод расчета пограничного слоя, задавая $u(x, y)$ в виде полинома 5-й и 6-й степени по степеням $y/\delta(x)$ ($\delta(x)$ — толщина пограничного слоя). Коэффициенты этого полинома предполагаются функциями x. Используя интегральное соотношение Кармана, граничные условия и условия на границах, вытекающие из дифференциальных уравнений Прандтля, автор определяет коэффициенты полинома, а для $\delta(x)$ получает обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение. Это дифференциальное уравнение решается приближенно, методом линеаризации.

Основное внимание автор уделяет определению координаты точки отрыва пограничного слоя. На основании сравнения расчетных данных с экспериментами утверждается, что предложенный метод расчета пограничного слоя и параметров точки отрыва является более точным, чем метод Польгаузена (см., например, Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 2, 1948, гл. 2, стр. 482—483), в котором используется полином 4-й степени.

Даны примеры определения координат точек отрыва для различных профилей. В. П. Коробейникова

5199. **К вопросу об оценке погрешности интерполяционного многочлена. Ульман** (Zur Fehlerabschätzung bei Interpolationspolynomen. Uhlmann Werner), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 1-2, 73—74 (нем.)

Пусть $x_i = x_0 + ih$, $f(x)-(r+1)$ раз непрерывно дифференцируемая на $[x_0, x_{r+1}]$ функция, $P(x)$ — интерполяционный многочлен r-й степени, для которого $P(x_k) = f_k$ $(k=\overline{0,\ r})$. Доказана теорема: Если $f^{r+1}(x)$ на сегменте $[x_0, x_{r+1}]$ не меняет знака, то для $x_1\leqq x\leqq x_r$ имеет место

$$|f(x)-P(x)| \leqq \left|\frac{(x-x_1),\dots,(x-x_r)}{r!h^2}\nabla^{r+1}f_{r+1}\right|,$$

где ∇^k — k-я разность. Дана оценка погрешности формулы Симпсона:

$$\left|\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx - \frac{h}{3}(f_1+4f_2+f_3)\right| \leqq \frac{h}{24}\cdot|\nabla^4 f_4|$$

(если $f^{IV}(x)$ сохраняет знак на $[x_0, x_4]$).

А. П. Доморяд

5200. **Замечание к работе «Метод вычисления некоторых обратных функций». Уилкс, Уилер** (Note on «A method for computing certain inverse functions». Wilkes M. V., Wheeler D. J.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, 11, № 59, 204 (англ.)

Отмечается, что при некоторых обстоятельствах метод Моррисона (РЖМат, 1958, 4274) для вычисления обратных функций, например x=arc cos y дает примерно в два раза меньше верных знаков, чем указано Моррисоном. В. К. Саульев

5201. **Логарифмы. Д'Эвант** (I logaritmi. D'Evant Alessandro), Riv. mecc., 1957, 8, № 172, 11—16 (итал.)

5202. **Приближенное вычисление корней** (Numerical extraction of roots), Electronic and Radio Engr., 1958, 35, № 1, 25 (англ.)

Если $\sqrt[n]{N} = a+x$, где x мало по сравнению с a, то лучшим приближением к $\sqrt[n]{N}$ будет

$$b = \frac{1}{n}\left[(n-1)\,a + \frac{N}{a^{n-1}}\right].$$

В. К. Саульев

5203. **Выравнивание и гиперциклы. Лёйхли** (Ausgleichsrechnung und Hypercircle. Läuchli P.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 7-8, 259 (нем.)

5204. **К вопросу о решении осредненных задач типа Делоне—Хилла. Штейнс К. А.**, Уч. зап. Латв. ун-та, 1956, 8, № 2, 109—119 (рез. лат.)

5205. **Метод математической оценки результатов вычислений. Бахман** (Ein Verfahren zur mathematischen Auswertung von Meßergebnissen. Bachmann H. R.), Technik, 1957, 12, № 11, 725—728 (нем.)

5206. **О точности графического дифференцирования. Буймола Г. Л.**, Научн. тр. Львовск. лесотехн. ин-та, 1957, 3, 147—153

Описан известный способ графического построения производной кривой $y'=f'(x)$ по данной кривой $y=f(x)$, сводящийся к нахождению ординат $y_i'=f'(x_i)$ равных или пропорциональных значениям тангенсов

углов наклона касательных к кривой $f(x)$ в соответствующих точках $f(x_t)$. Источником погрешностей считается то, что все линии на чертеже имеют конечную ширину и фактически изображаются «полосами», а точки «пятнами». Выведена формула

$$|\Delta S| = \left|4\omega_0 \sqrt{(l^2/2)+\omega_0^2}\,(1+\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. +\left((l^2/2)+\omega_0^2\right)\cdot \sin 2\psi\right|$$

«площади возможных ошибок», в пределах которой должна находиться точка искомого графика, где φ — угол между касательной в соответствующей точке M кривой $f(x)$ и x-осью, находимый как среднее арифметическое ряда измерений (предполагается, что касательная проводится с помощью линейки, а направление ее определяется на глаз); ω_0 — ширина линии (полосы) на чертеже; $2l$ — среднее арифметическое ряда измерений длины основания сегмента, отсекаемого касательной «полосой» ширины ω_0 от «полосы» кривой $f(x)$ той же ширины ω_0.

Площадь ΔS изображается прямоугольником, длина основания которого, параллельного x-оси, зависит от величин φ и ω_0 и определяется по чертежу.

Название статьи не вполне точно соответствует содержанию, поскольку в выведенной формуле не учитывается погрешность определения угла φ, являющаяся наиболее существенной при графическом дифференцировании. А. Б. Штыкан

5207. **Метод фазовой плоскости с ускорением в качестве одной из координат для изучения нелинейных колебаний. Гу** (Acceleration plane method for nonlinear oscillations. K u Y. H.), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, 1953, 2, 129—153 (англ.)

Для графического решения уравнений вида $x_t'' = \varphi(x, x_t')$ применяется метод построения графика решения в фазовой плоскости Oxx_t', основанный на равенстве

$$dx_t'/dx = x_t''/x_t' \qquad (1)$$

(см., например, РЖМат, 1957, 6065 К). В работе излагается видоизмененный метод, в котором по оси ординат откладывается как x_t', так и x_t'', и строятся одновременно траектории $F(x, x_t') = 0$ (обычная) и $F_1(x, x_t'') = 0$. Предварительно наносится система линий

$$x_t'' = \varphi(x, x_t'^0), \qquad (2)$$

соответствующих различным фиксированным значениям x_t'. Величина x изменяется «шагами», причем при каждом значении x величина x_t'' определяется путем графической интерполяции по сетке (2), а по (1) графически определяется наклон линии $F(x, x_t') = 0$ при данном x, так что обе линии строятся дальше. В частности, для уравнения Ван-дер-Поля $x_t'' - k(1-x^2)x_t' + x = 0$, кроме предельного цикла на плоскости (x, x_t'), впервые получены предельные циклы на плоскости (x, x_t''), а также на плоскости (x_t', x_t''); рассмотрены другие нелинейные механические и электродинамические задачи, например, уравнение колебаний маятника в сопротивляющейся среде. Метод допускает обобщение на уравнения n-го порядка, причем строятся графики одновременно на фазовых плоскостях

$$(x, x_t'), (x_t', x_t''), \ldots, (x_t^{n-1}, x_t^n).$$

М. Л. Бродский

5208. **Номограммы для решения общего треугольника. Ацель, Беда, Гати, Тёрёк** (Nomogrammok az általános háromszög megoldásához. Aczél János, Béda Gyula, Gáti József, Török Sándor), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 383—394 (венг.; рез. русск., франц.)

Описано несколько составных номограмм и номограмм с подвижными элементами для определения неизвестных характеристик общего треугольника, если даны: одна сторона и два угла, или же две стороны и один угол.

В литературе описано несколько типов номограмм для решения проблем, перечисленных в этой работе, но эти номограммы, в отличие от номограмм, приведенных авторами, могут быть использованы только в более частных случаях или требуют сложную чертежную работу.

При помощи 2-й и 3-й номограмм, кроме перечисленных авторами решений, можно по трем сторонам общего треугольника определить все остальные.

K. Tot

5209 Д. **Решение задачи Стефана сведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Меламед В. Г.,** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

ТАБЛИЦЫ

5210. **Замечание к таблице для вычисления коэффициентов квадратической регрессии. Фюрст** (Nota alla tabella per il calcolo dei coefficienti di regressione quadratica. F ü r s t D a r i o), Statistica, 1955, 15, № 3, 492—495 (итал.)

5211. **Новые таблицы для быстрого гармонического анализа диаграмм. Ч. II. Манунца** (Nuove tabelle per rapide analisi armoniche dei diagrammi. Parte II. M a n u n z a F i l i p p o), Ingegneria mecc., 1956, 5, № 5, 51—61 (итал.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 934.

5212. **Вычисление постоянной диффузии по известному распределению вещества в многослойных системах. Глюк** (Diffúzióállandó meghatározása többrétegu diffúziós rendszer anyageloszlásának ismeretében. G l ü c k V e r a), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 361—366 (венг.; рез. русск., нем.)

Приведены таблицы для определения вещества при линейной диффузии, в случае специального начального распределения концентрации, и сообщается метод вычисления этих таблиц. Таблицы являются более подробными, чем до сих пор существующие.

G. Adler

5213 К. **Таблица умножения. Демень** (Villámszorzó. D e m é n y G y ö r g y), Budapest, Müszaki, Kiadó, 1955, 100 l., 30 Ft.), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 4, 118 (венг.)

5214 К. **Функции Бесселя и родственные им функции, встречающиеся в гидромагнетизме. Элберт** (Bessel and related functions which occur in hydromagnetics. E l b e r t D o n n a D. Astrophys. J. Suppl., 1957, 3, № 28, pp. 77—106) (англ.)

Протабулированы с 4—6 десятичными знаками сле-

дующие шесть функций:

$$\overline{J}_{n+1/2}(\alpha_{i,j}r)=\left(\frac{\pi}{2\alpha_{i,j}r}\right)^{1/2}J_{n+1/2}(\alpha_{i,j}r),$$

$$\overline{J}'_{n+1/2}(\alpha_{i,j}r)=\frac{1}{2}\left[\overline{J}_{n-1/2}(\alpha_{i,j}r)-\overline{J}_{n+3/2}(\alpha_{i,j}r)\right],$$

$$F_{n,j}=\left(\frac{\pi}{2\alpha_{j,n}r}\right)^{1/2}\overline{F}_{n,j},\quad G_{n,j}=\left(\frac{\pi}{2\alpha_{j,n}r}\right)^{1/2}S_{n,j},$$

$$L_{n,j}=-\frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi}{2\alpha_{j,n}r}\right)^{1/2}\overline{L}_{n,j},$$

$$N_{n,j}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{2\alpha_{j,n}r}\right)^{1/2}\overline{R}_{n,j},$$

где

$$\overline{F}_{n,j}=\frac{n+1}{(2n+3)^2}\{(\alpha_{j,n}r)[nJ_{n+1/2}(\alpha_{j,n}r)-$$

$$-(n+3)J_{n+5,2}(\alpha_{j,n}r)]-n(2n+3)J_{n+3/2}(\alpha_{j,n}r)\},$$

$$S_{n,j}=\frac{n+2}{(2n+3)^2}\{(\alpha_{j,n}r)[nJ_{n+1/2}(\alpha_{j,n}r)-$$

$$-(n+3)J_{n+5/2}(\alpha_{j,n}r)]+(n+3)(2n+3)J_{n+3/2}(\alpha_{j,n}r)\},$$

$$\overline{L}_{n,j}=-(n+2)\left[\overline{F}_{n,j}+\frac{n+1}{(2n+3)(2n+5)}\times\right.$$

$$\left.\times(\alpha_{j,n}r)^2J_{n+3/2}(\alpha_{j,n}r)\right],$$

$$\overline{R}_{n,j}=(n+1)\left[S_{n,j}-\frac{n+2}{(2n+1)(2n+3)}\times\right.$$

$$\left.\times(\alpha_{j,n}r)^2J_{n+3/2}(\alpha_{j,n}r)\right],$$

$\alpha_{i,j}$ — i-й нуль сферической функции Бесселя $J_{3/2+j}(x)$. Аргументы изменяются в пределах: $r=0\,(0{,}01)\,1$, $n=0\,(1)\,4$, $i=1\,(1)\,4$, $j=-1\,(1)\,2$. В. К. Саульев

5215 К. Таблицы интегрального логарифма. Карпов К. А., Разумовский С. Н., М., АН СССР, 1956, 319 стр., 33 р. 30 к.

Приведены значения интегрального логарифма

$$lix=\int_0^x\frac{dn}{\ln x}\,(x\geqslant 0)$$

с семью значащими цифрами для $0\leqslant x\leqslant 25\,000$. Шаг таблицы переменный и выбран таким, чтобы в основном было возможно линейное интерполирование с общей ошибкой, не превосходящей 1,6 единицы последнего знака. Ошибка вычислений таблиц, которые проводились на Быстродействующей электронной счетной машине (БЭСМ) АН СССР, по утверждению авторов не превосходит 0,6 единицы последнего знака. Здесь же приведены вспомогательные таблицы значений функции $lix-\ln|1-x|$ с шестью десятичными знаками для $x=0{,}95\,(0.0001)\,1{,}05$. К. Е. Черних

5216 К. Таблицы интерполяционных коэффициентов Кармазина Л. Н., Курочкина Л. В. М., АН СССР, 1956, 366 (7) стр. илл., 37 р. 65 к.

Приведены таблицы коэффициентов интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона, Бесселя, Стирлинга и Эверетта. Коэффициенты даны с десятью знаками после запятой с шагом 0,0001 для формулы Бесселя и 0,001 для остальных формул. Промежуточные значения коэффициентов могут быть получены применением интерполяции. Коэффициенты формул Лагранжа даны для n=3(1)8, а для остальных формул они точны для многочленов, степень которых не превосходит 7.

Общая ошибка в табличных значениях не превосходит $1\cdot 10^{-10}$ К. Е. Черних

5217 К. Таблицы для расчета процентов. Рао (Tablice za postotni i kamatni račun. Raos Nikola. Zagreb, «Birotehnika», 1955, 139 str.), Bibliogr. jugosl., 1955, 6, № 18, 629 (хорв.)

5218 К. Таблицы интегралов и других математических функций. Дуайт (Tables of integrals and other mathematical data. 3rd ed. Dwight Herbert Bristol. New York—London, Macmillan, 1957, XI, 288 pp., ill., 21 sh.), Brit. Nat. Bibliogr. 1957, № 398, 8 (англ.)

5219 К. Статистические таблицы. Ред. Садовский (Tablice statystyczne. Red. Sadowski Wiestaw. Warszawa, PWN, 1957, 160 s., il. 32 zł), Przew. bibliogr., 1957, 13, № 28, 392 (польск.

5220 К. Таблица убывающей показательной функции для x=2,5—10. (Table of the descending exponential x=2.5 to x=10, Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1955, № 46, 76 pp.) (англ.)

Двадцатизначная таблица e^{-x} для x=2,5 (0,001)10

См. также: 4750, 4854

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

5221. Логический синтез простой вычислительной машины общего назначения. Франкел (The logical design of a simple general purpose computer. Frankel Stanley P.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 1, 5—14, 60 (англ.)

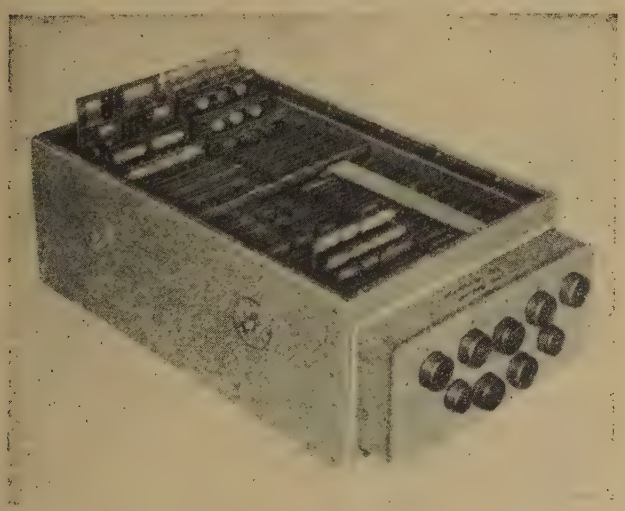
Рассматривается машина МИНАК (MINAC), разработанная в Калифорнийском технологическом институте в 1954 г., и машина LGP-30 фирмы «Либраскоп», являющаяся производственным вариантом машины МИНАК. Логический синтез LGP-30 сводится к логическому синтезу машины МИНАК.

МИНАК представляет собой простую по оборудованию последовательную машину. Ввод и вывод данных производится устройством «Флексорайтер», работающим с перфолентой. Запоминающим устройством машины служит магнитный барабан, на котором запи сывается три вида информации. Основной массив чисе хранится на 64 дорожках барабана. На каждой дорожк записано 64 32-разрядных двоичных числа, для запис и считывания которых служит одна головка. Инфор мации второго вида, с меньшим временем выборки записывается на 3 дорожках, на каждой из которы имеется одна записывающая головка и одна или боле считывающих головок. Эти дорожки называются «цир куляционными регистрами». В одном из циркуляцион ных регистров («счетчика») циркулируется адрес сл

дующей по порядку инструкции. Как только инструкция выбрана по адресу, она записывается в другой циркуляционный регистр («регистр инструкции») для управления данной операцией. Третий циркуляционный регистр («накопитель») обычно содержит результат последней арифметической операции. Информацию третьего вида несут синхронизационные дорожки, на которых записаны серии импульсов, служащие для управления машины. На каждой из этих дорожек имеется одна считывающая головка. Для управления выборкой чисел из запоминающего устройства, а также для управления операциями служат 15 триггеров. Логические схемы машины МИНАК выполнены главным образом на сопротивлениях и кристаллических диодах. Входные данные подаются в машину с перфоленты. Выходные данные поступают на триггерные схемы, которые управляют зажиганием тиратронов, приводящих в действие реле печатающего устройства. Приводится список 16 операций, которые выполняет МИНАК. Время выполнения одной операции равно времени прохождения 32 разрядов числа под считывающей головкой. Исключение представляют операции умножения и деления, когда в результате применения второй считывающей головки емкость регистра-накопителя увеличивается вдвое; при этом время выполнения операции тоже увеличивается в два раза. Составляются булевы уравнения работы каждого из 15 триггеров, управляющих машиной. Находятся булевы функции, определяющие состояние входов трех циркуляционных регистров при выполнении различных операций. Далее выводятся булевы функции, определяющие состояние входов логических цепей машины. А. Н. Чуйкин

5222. **Портативная самолетная вычислительная машина на транзисторах** (Portable airborne transistor computer), Automat. Control, 1957, 7, № 2, 49 (англ.)

Краткое сообщение о вычислительной машине на транзисторах (см. фото), построенной фирмой «Филко»



К реф. 5222

(Philco Corp.) для установки на реактивных истребителях военно-морских сил США. Объем машины около 0,1 $м^3$. Она выполняет сложные навигационные расчеты каждые 60 сек.

5223. **Вычислительная машина Датаматик-1000.** Шримпф (The Datamatic 1000 computer. Schrimpf Henry W.), Computers and Automat., 1957, 6, № 4, 8 (англ.)

Сообщается, что фирма «Датаматик» (Datamatic Corp.). строит цифровые вычислительные машины Датаматик-1000. Первая машина готова более чем на 85%. Приводятся основные характеристики машины. Входной преобразователь обрабатывает 80-колонные перфокарты со скоростью 90 карт в 1 мин.; данные с карт считываются дважды, сравниваются, упорядочиваются и переносятся на магнитную ленту. Данные с карты преобразуются в 4- или 6-значный код, образуя машинные слова в 52 двоичных разряда или 12 десятичных разрядов. Главная память выполнена на ленте в 75,6 *мм* (31 канал) с длиной рулона 824 *м* и максимальной емкостью 37,2 млн. десятичных разрядов. Скорость считывания и записи равна 60 тыс. десятичных разрядов в 1 сек. Данные могут считываться одновременно с 10 лент, максимальная скорость поиска равна 600 тыс. десятичных разрядов в 1 сек.

Промежуточный входной регистр выполнен на магнитных сердечниках общей емкостью 1488 десятичных разрядов, принимает данные со скоростью 60 тыс. десятичных разрядов в 1 сек., выдает в быстродействующую память 420 тыс. десятичных разрядов в 1 сек. Такой же регистр имеется на выходе машины. Быстродействующая память на магнитных сердечниках имеет емкость 24 тыс. десятичных разрядов (выборка чисел параллельная); время выборки 12-разрядного десятичного числа 10 мксек. Машина выполняет в 1 сек. 4000 сложений, 1000 умножений, сортирует 5 тыс. 12-разрядных десятичных чисел в 1 сек.

Выходной преобразователь считывает данные с магнитной ленты со скоростью 60 тыс. десятичных разрядов в 1 сек. и выдает 100 80-колонных карт в 1 мин., печатает в 1 мин. или 150, или 900 строк по 120 знаков в каждой.

Машина имеет внутренний контроль и исключительно гибкую систему команд. М. С. Саплин

5224. **Последняя цифровая машина серии УНИВАК, построенная фирмой «Ремингтон»** (Newest Univac digital devised by Remington), West. Aviat., 1957, 37, № 7, 31 (англ.)

Сообщается о создании фирмой «Ремингтон Рэнд» новой цифровой вычислительной машины общего назначения ЛАРК (LARC—Livermore Automatic Research Computer, РЖМат, 1957, 3593). Первый ее экземпляр установлен в лаборатории рациации Калифорнийского университета и предназначен для рещения задач, связанных с ядерными реакторами. Второй экземпляр предназначен для военно-морского флота. Машина почти на 100% построена на полупроводниковых триодах и выполняет 100 тыс. умножений в 1 сек. ЛАРК состоит из 2 отдельных вычислительных установок: одна выполняет арифметические операции, другая управляет потоком данных, поступающих в первую. Для увеличения скорости вычислений и емкости запоминающего устройства к ЛАРК могут быть подсоединены машины, выполняющие арифметические операции, и дополнительные блоки памяти. Машина может решать одновременно несколько задач. Сообщается также о новом выводном устройстве «Характрон» фирмы «Стромберг-Карлсон» (Stromberg—Carlson), приданном ЛАРК для обеспечения большей гибкости. «Характрон» выводит данные из машины на пленку со скоростью 15 тыс. знаков в 1 сек., что в 12 раз выше скорости быстродействующих механических печатающих устройств. З. Д. Доброхотова

5225. **Развитие вычислительных устройств в 1956 г.** Вальтер, Гофман (Entwicklung der Rechenanlagen. 1956. Walther Alwin, Hoffmann Walter), VDI-Zeitschrift, 1957, 99, № 16, 731—737 (нем.)

Сообщается, что в ФРГ, наряду с электронными вычислительными машинами типа ИБМ-604, УНИВАК-120

и БУЛЛ-ГАММА, нашла широкое применение электронная вычислительная машина ИБМ-650 с запоминающим устройством на магнитном барабане, выпускаемая западногерманским отделением фирмы «ИБМ» и работающая совместно с перфокарточными машинами. Релейные вычислительные машины фирмы «Цузе КГ» используются оптическими фирмами и предприятиями измерительной аппаратуры. «Цузе» строит также и электронные вычислительные машины Z-22. Фирмы «Сименс-Гальске» (Мюнхен) и «Стандарт Электрик» (Штутгарт) широко применяют кристаллические триоды в конструируемых ими вычислительных устройствах. Сообщается о следующих вычислительных центрах» в ФРГ: 1) в Дармштадте (Институт практической математики Высшей технической школы; машины ДЕРА и ИБМ-650); 2) во Франкфурте-на-Майне (вычислительный центр фирмы «Ремингтон Рэнд»; машина УНИВАК-ФАКТРОНИК 1); 3) в Гёттингене (Институт физики Макса Планка; машины Г-1, Г-2 и в постройке Г-3); 4) в Мюнхене (Высшая техническая школа, машина ПЭРМ); 5) в Зиндельфингене близ Штутгарта (Вычислительный центр фирмы ИБМ; машины ИБМ-КПК и ИБМ-650). Приводится перечень вычислительных центров в Европе: 1) в Дании (Копенгаген: машина ДАСК); 2) в Голландии (Амстердам; машины АРРА и АРМАК); 3) в Италии (Рим; машина ФИНАК); 4) в Норвегии (г. Блиндерн; машина НУССЕ; г. Келлер, вычислительная машина фирмы «Ферранти»); 5) в Австрии (Вена); 6) в Швейцарии (Цюрих; машина ЭРМЕТХ), 7) в СССР (Москва, 2 центра; машины «Стрела», «Урал», БЭСМ).

Даётся обзор современного состояния вычислительной техники. Указывается, что развитие моделирующих устройств характеризуется широким применением схем на кристаллических диодах (в функциональных генераторах) и транзисторных схем. Указывается, что в области цифровой техники характерным является все возрастающее использование транзисторов (ТРИДАК и ИБМ-608), повышающих надежность и быстродействие машин. Проводится следующее сравнение: машина НОРК (на вакуумных лампах фирмы ИБМ) имеет время сложения 15 *мксек* и время умножения 31 *мксек*; машина ЛАРК (на транзисторах, фирмы «Ремингтон Рэнд») имеет время сложения 4 *мксек*, время умножения 8 *мксек*; машина СТРЕТЧ (STRETCH), на транзисторах, фирмы ИБМ имеет время сложения 0.5 *мксек*, время умножения 2 *мксек*. Указывается, что имеются реальные возможности осуществить умножение 12-разрядных десятичных чисел за 1 *мксек*. Кратко рассматриваются новые тенденции в развитии запоминающих устройств, устройства ввода и вывода данных, принципов программирования. Библ. 198 назв. Г. М. Грязнов

5226. **Пять достижений в области цифровой техники на Западе США** (Five digital advances from the West), Control Engng, 1956, 3, № 1, 24—25 (англ.)

Кратко перечисляются разработки в области цифровой вычислительной техники на Западе США:

1) Малогабаритный цифровой дифференциальный анализатор фирмы «Литтон» (Litton Industries) (РЖМат, 1956, 2502, 9169).

2) Использование цифровой вычислительной машины АЛЬВАК (РЖМат, 1955, 5357), установленной в Калифорнии, для обслуживания заказчика из Чикаго. Данные для решения задачи поступают в Калифорнию по телеграфу. Решив задачу, машина передает ответ по телеграфу в Чикаго. Между телеграфом и машиной работает промежуточное оборудование.

3) Новый магнитный элемент — ферристор, представляющий собой миниатюрный магнитный усилитель. Его можно использовать в качестве усилителя, элемента памяти, вентиля и счетной ячейки.

4) Цифровая вычислительная машина фирмы «Либраскоп» (РЖМат, 1956, 8405). Скорость машины 3600 операций в 1 мин.; емкость запоминающего устройства (магнитный барабан) — 4098 30-разрядных двоичных чисел; среднее время выборки 8 *мсек*. Машина содержит 100 ламп и 1300 диодов.

5) Самолетная цифровая вычислительная машина МАКЕ (МАСЕ) фирмы «Норт Американ Авиэйшн» (РЖМат, 1956, 8393). Б. Н. Малиновский

5227. **«Мозг-малютка» прибывает в Британию** (The «baby brain» arrives in Britain), Automat. and Automatic *Equipm.* News, 1957, 2, № 5, 255—258 (англ.)

Краткое описание областей применения и конструкции цифрового вычислительного устройства Берроус Е-101 американской фирмы «Берроус» (Burroughs), которое после показа на выставке в Париже привезено для демонстрации в Лондон и скоро поступит в продажу. Вычислительное устройство Берроус Е-101 (РЖМат, 1958, 4269) относится к средним по размерам и стоимости устройствам и занимает промежуточное положение между относительно недорогими ручными вычислительными машинками и очень дорогими большими электронными вычислительными машинами. Цена устройства в США 35—45 тыс. долл. Отмечается простота устройства и легкость управления им. Все устройство (имеющее размеры письменного стола) приводится в действие одним оператором. Ввод — с клавиатуры, вывод — с рулонного печатающего устройства. Возможен контроль промежуточных результатов вычислений. Программирование осуществляется при помощи 8 коммутационных досок и шаговых переключателей. Запоминающее устройство с магнитным барабаном позволяет накапливать от 100 до 220 чисел. Устройство работает на частоте 75 *кгц*.

Вычислительное устройство Берроус-Е-101 применимо: 1) в авиации — при расчете характеристик авиационных конструкций, конструировании лопастей роторов и отдельных деталей авиационных моторов, вычислении траекторий подъема и спуска авиаконструкций, для изучения квадратического сглаживания и при коническом креплении узлов; 2) в инженерных расчетах — при определении характеристик моторов, вычислении профиля кулачков, изучении прохождения лучей через систему линз; 3) при подготовке и контроле данных, передаваемых с управляемых снарядов и реактивных самолетов, и для вычисления таблиц ведения артиллерийского огня; 4) в статистических расчетах — для вычисления корреляции, анализа дисперсий и решения систем однородных линейных уравнений; 5) в химической и фармацевтической промышленности — при конструировании дистилляционных колонок, испытаниях характеристик медикаментов, определении температуры вспышки; 6) в исследовании операций. В. С. Бородин

5228. **Цифровая вычислительная машина специального назначения** (The special purpose digital computer), Saro Progr., 1956, № 2, 8—10 (англ.)

Дается описание небольшой вычислительной машины для обработки данных, получаемых при испытаниях управляемых снарядов в записи на фотопленку. С пленки считываются данные, определяющие азимут, высоту и их поправки. Машина разработана в Национальной физической лаборатории (Англия) и состоит из трех узлов: главной стойки, вычислительного блока и электрической пишущей машинки с соленоидным приводом. Главная стойка получает числа с одного кадра пленки и записывает их в свое запоминающее устройство, вычислительный блок производит над этими числами арифметические операции и результаты печатаются на пишущей машинке. К машине может быть подсоединен перфоратор. Главная стойка вклю-

чает в себя панель управления и соединенную с ней небольшую коммутационную панель. Некоторые числа могут быть введены в машину при помощи ключей на панели управления, другие — с коммутационной панели. Эти последние запоминаются на группах реле и могут быть визуально проконтролированы по лампочкам на панели управления. Вычислительный блок состоит из двух десятичных регистров (по 6 разрядов в каждом), панели управления и устройства вывода данных с импульсным генератором. Регистры выполнены на шаговых искателях. Имеется возможность вводить числа в регистры вручную. В. П. Кузнецова

5229. **О равносильности и преобразованиях схем программ. Янов Ю. И.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1. М., АН СССР, 1956, 197—198

Тезисы доклада на 3-м Всесоюзном математическом съезде. Дается определение схемы программы, значения схемы программы, понятия равносильности двух схем. Ставятся задачи: 1) об отыскании алгоритма, который для любой пары схем проверял бы их равносильность; 2) о нахождении полной системы элементарных преобразований, с помощью которых можно произвольную схему программы перевести в любую ей равносильную. Указывается, что получено решение этих задач для случая, когда все операторы в схеме индивидуализированы и каждый оператор может произвольным образом изменять значения отнесенных ему логических переменных. О. С. Кулагина

5230. **Программирование вычислительной машины. Клейн, Вильямс, Морган** (Programming a computer. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1957, 30, № 4, 671—676 (англ.)

Излагаются элементарные сведения о принципах программирования применительно к одноадресной машине АЛЬВАК-III-E (ALWAC-III-E). У нее фиксированная запятая и память на магнитном барабане. Типичным применением для этой машины являются расчеты по начислению заработной платы. Ф. С. Лось

5231. **Гибридные вычислительные машины** (Computer hybrids), Automat. Control, 1957, 6, № 1, 54—55 (англ.)

Фирмы «Бекман», «Электроник Ассошиэйтед», «Ривс Инструмент» и «Гудьир Эйркрафт» выпускают аналогичные вычислительные машины с цифровыми входными и выходными преобразователями, что позволяет значительно повысить точность постановки задачи и снизить время, требуемое для установки исходных данных, а также дает возможность программирования задачи и получения на выходе семейства кривых для различных вариантов установки входных величин. Подобные устройства приблизительно удваивают стоимость машины. Вычислительная машина EASE-1100 фирмы «Бекман», имеющая 60 усилителей, 10 умножителей, 3 генератора функций, стоит вместе с цифровыми устройствами входа и выхода от 90 до 100 тыс. долл. О. В. Бачин

5232. **Первая муниципальная вычислительная машина в Англии. Кокс** (Britain's first municipal computer. Cox J. W.), New Scientist, 1957, № 20, 30—31 (англ.)

Сообщается о вычислительной машине, установленной в г. Норвиче и выполняющей финансовые расчеты для муниципалитета. Машина составляет требования по уплате налогов и ведет счета налогоплательщиков. Ее можно использовать также для контроля за акционерным капиталом, для ведения счетов кредитов по займам и закладным и для других целей. Данные вводятся в машину с перфоленты. Используются три запоминающих устройства: 1) машинные ленты; 2) магнитный барабан емкостью 4096 кодов (один код эквивалентен 9-разрядному числу или 6 буквам алфавита); 3) быстродействующее запоминающее устройство емкостью 320 кодов. На выходе машины стоит электрическое печатающее устройство.

Для ведения финансовых счетов в конце каждой недели в машину вводится перфолента с данными платежей, произведенных по счетам за неделю. Большая емкость запоминающего устройства на магнитной ленте позволяет накапливать и хранить все расчеты по 50 тыс. счетам в течение полугода. А. Н. Чуйкин

5233. **Университетский вычислительный центр** (University computer center), Mech. Engng, 1957, 79, № 1, 40—41 (англ.)

Сообщается об организации в Калифорнийском университете (Лос-Анжелос) нового вычислительного центра. Его основной машиной будет ИБМ-705. В задачу центра, созданного на средства фирмы ИБМ, входит обучение студентов методам решения сложных проблем управления предприятиями, а также подготовка для колледжей инструкторов по электронным вычислительным машинам. В новом центре будут работать сотрудники и студенты университетов и колледжей 11 западных штатов. Очередность решения задач на машине будет определяться советом представителей колледжей.

Отмечается, что организация нового центра является частью программы, по которой в Калифорнии должно быть создано два крупных вычислительных центра разных типов. Второй вычислительный центр предполагается организовать в университете в г. Беркли, и его назначением будет решение научных задач. Он будет оборудован машиной ИБМ-701.

Сообщается также, что в Массачусетском технологическом институте будет установлена большая электронная машина ИБМ-704 для обслуживания студентов Новой Англии. Кроме того, фирма ИБМ предоставляет университетам и колледжам по сниженной стоимости вычислительные машины средних размеров ИБМ-650 с запоминающими устройствами на магнитных барабанах. 18 таких машин уже установлено, заказано еще 14. З. Д. Доброхотова

5234. **Дискуссия по статье Гранди и Мак-Грегора «Проектирование, постройка и применение электронных цифровых вычислительных машин»** (Discussion on «The design, construction and applications of electronic digital computers» by E. Grundy, H. McGregor Ross), Trans.S.Afric. Inst. Electr. Engrs, 1956, 47, № 2, 67—74 (англ.)

См. РЖМат, 1957, 1920.

Приводится ряд выступлений, затрагивающих различные вопросы, связанные с внедрением вычислительных машин в научные, промышленные и коммерческие организации Южно-Африканского Союза. Б. И. Шитиков

5235. **Надежность и ее отношение к пригодности и предсказуемости. Феррел** (Reliability and its relation to suitability and predictability. Ferrell E. B.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 113—116 (англ.)

Понятие надежности оборудования расчленяется на понятие предсказуемости поведения и старения оборудования и понятие пригодности оборудования для определенной работы. По мнению автора, поставщики должны прежде всего заботиться о предсказуемости поведения и старения выпускаемого ими оборудования. Отмечается значение методов статистического контроля в достижении этой цели. Как пример приводится методика проверки реле, выпускавшихся в США в 1942 г. Г. Н. Поваров

5236. **Ферритовая плата с отверстиями для запоминающего устройства с произвольной выборкой. Рейхман** (Ferrite apertured plate for random access memory. Rajchman Jan A.), Proc. I. R. E., 1957, 45, № 3, 325—334, 369 (англ.)

Применение магнитных сердечников для построения запоминающих устройств цифровых вычислительных машин становится трудоемким и дорогим в связи с увеличением емкости таких устройств. Описывается решение этой проблемы путем использования в качестве матричного запоминающего устройства ферритовой платы с отверстиями, выполненного из материала с прямоугольной петлей гистерезиса. Каждое отверстие платы заменяет сердечник обычной матрицы на магнитных сердечниках. Размеры отверстий и расстояние между ними настолько малы, что становится возможным построить очень компактное запоминающее устройство емкостью в несколько миллионов цифр. Такое запоминающее устройство требует значительно меньшей мощности для его управления, что упрощает соответствующее электронное оборудование.

Принцип работы ферритовой платы с отверстиями заключается в том, что при прохождении тока, пронизывающего какое-либо отверстие, происходит намагничивание магнитного материала, окружающего это отверстие; степень намагничивания обратно пропорциональна расстоянию от центра отверстия. При данном токе намагничивания граница между перемагниченной и неперемагниченной зонами материала с прямоугольной петлей гистерезиса, окружающего отверстие, характеризуется определенным радиусом. Таким образом, каждое отверстие можно рассматривать как отдельный магнитный сердечник, толщина стенок которого может быть сделана весьма малой путем выбора соответствующего тока намагничивания. Показано, что оптимальное соотношение между диаметром отверстий и расстоянием между их центрами равно $^1/_2$.

Отверстия связаны для образования матричной структуры с помощью токопроводящего покрытия платы, нанесенного таким образом, что все отверстия платы обходятся током последовательно. Приводятся экспериментальные результаты исследования ферритовой платы 21×21 *мм* с 256=16×16 отверстиями, диаметром 0,635 *мм* каждое. Для переключения состояния намагниченности вокруг отверстия в течение 2,0 *мксек* требуется ток 330 *ма*. Полезный выходной сигнал в этом случае равен 30 *мв*.

Описываемые платы изготовляются путем формовки. Указывается, что отжиг ферритовых плат более труден, чем отжиг отдельных ферритовых сердечников, ввиду трудности обеспечения одинаковой температуры по всей поверхности платы, что необходимо для однородности магнитных свойств последней. Отжиг в регулируемой атмосфере с предварительным отжигом в печах туннельного типа обеспечивает однородность свойств отверстий и хорошую прямоугольность петель гистерезиса с отклонением $\pm 5\%$.

Предлагается оригинальная система управления запоминающими платами с помощью переключателей, являющихся такими же платами, но без печатной прошивки отверстий. Работа такой системы основывается на некоторых новых методах переключения, которые делают возможным достижение большей емкости запоминающего устройства и меньшего времени выборки, а также обеспечивают отсутствие ложного сигнала в полезном выходном сигнале при широких допусках на амплитуды токов возбуждения. Сущность предлагаемого нового метода записи и считывания информации в запоминающем устройстве на ферритовых платах с отверстиями заключается в том, что переключающее устройство записи и считывания возбуждает только ячейки данного адреса без половинного возбуждения других адресов. При этом методе функция выборки адресов выполняется переключателем выборки адресов, а функция запоминания — пакетом ферритовых плат. Запись и считывание в выбранном адресе происходит одновременно во всех разрядах путем возбуждения адресной шины данного адреса с помощью переключателя, работающего по принципу суммирования токов переключения невыбираемых адресов данного ряда в адресной шине выбираемого адреса. При таком методе выбора с увеличением количества n рядов и столбцов увеличивается отношение сигнал/шум, равное $(n-1):1$. Благодаря большим суммарным токам переключения в выбранных адресах скорость выборки зависит в основном от скорости работы переключателя, которая может быть значительно форсирована без практически заметного ухудшения отношения сигнал/шум.

Использование такого метода записи и считывания, а также спаренных ферритовых плат для каждого разряда значительно упрощает схемы усилителей записи и считывания. Для записи используется ламповый генератор импульсов тока, а для считывания может быть использован усилитель на полупроводниковых триодах. Указывается, что применение ферритовых плат с отверстиями для запоминающего устройства, работающего по принципу совпадения токов, снижает мощность возбуждения во много раз по сравнению с таким же устройством на магнитных сердечниках. Применение принципа записи и считывания, описанного здесь, требует большей мощности. Б. И. Стрелков

5237. Оценка ферритов с прямоугольной петлей гистерезиса с точки зрения применимости в запоминающих и переключающих устройствах электронных вычислительных машин. Э к к е р т (Die Beurteilung von Rechteckferriten hinsichtlich ihrer Verwendbarkeit als Speicherkerne oder Schaltkerne in elektronischen Rechenmaschinen. E c k e r t O s k a r), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 105—109, 222. Diskuss., 109—110 (нем.; рез. англ.)

Рассматриваются категории применимости ферритов в электронных вычислительных машинах. Обсуждены методы измерений характеристик ферритов.

Особое внимание уделено методу огибающей для снятия петли гистерезиса сердечника. Суть метода заключается в том, что в сердечник производится запись серией импульсов, постепенно увеличивающихся по амплитуде. Огибающая амплитуд считанных сигналов будет характеризовать характеристику намагничивания сердечника. Т. А. Шмаонов

5238. Кварцевое стекло для применений в ультраакустической линии задержки. П е н н е л л (Vitreous silics for ultrasonic delay line applications. P e n n e l l E v e r e t t S.), Proc. Nat. Electronics Confer., vol. 8, Chicago, 1953, 799—810 (англ.)

5239. Кое-что о механическом человеке и чудо-машинах. Э й н а р и (Hieman koneihmisestä ja ihmekoneista. E i n a r i), Teollisuuslehti, 1955, 36, № 1, 20—23 (фин.)

Популярная статья о роботах и автоматике.

5240. Частотное запоминающее устройство. Г о п е г и (Memorias de frecuencias. G o p e g u i L. R. de), Rev. cienc. apl., 1956, 10, № 5, 403—412 (исп.)

Описываются работы по созданию нового сверхбыстродействующего запоминающего устройства в Стэнфордском университете (США). В качестве запоминающего элемента предлагается схема, способная поддерживать поданные на нее колебания различных частот. Таких частот, по утверждению автора, может быть больше 100; запоминающее устройство должно быть способно работать на любой системе счисления. Для перехода схемы из одного состояния в другое на нее требуется подать от 5 до 10 периодов колебаний устанавливаемой частоты, что дает, при использовании частот в десятки тысяч мегагерц, время записи порядка 100 *псек*.

Рассматриваются два вида многорезонансных колебательных контуров: четырехполюсники, например усилитель с положительной обратной связью, и двух-

полюсники, например транзитронный генератор. Расчет систем на устойчивость предлагается проводить при помощи передаточных функций системы по диаграмме Найквиста, причем четырехполюсник рассматривается как усилитель с обратной связью, а для суждения об устойчивости работы двухполюсника требуются более сложные методы. Более подробный анализ проводится отдельно для устойчивости амплитуды колебаний и устойчивости частоты.

Наиболее действенным методом для обеспечения устойчивости амплитуды является введение в систему нелинейного элемента в качестве ограничителя. В случае двухполюсников этот элемент часто содержится в самой схеме устройства и его нельзя четко выделить.

Устойчивость частоты зависит от двух основных факторов: 1) изменения параметров схемы из-за старения либо температурных изменений; 2) влияния паразитных сигналов. От первого фактора избавляются общеизвестными методами, но второй характерен для частотной памяти. Рассматриваются два возможных случая выбора запоминаемых частот.

В первом случае запоминаемые частоты независимы друг от друга, т. е. ни одна из них не является средним арифметическим двух других. В этом случае для исключения влияния паразитных сигналов достаточно бывает наличие ограничителя амплитуды.

Но обычно запоминаемые частоты кратны друг другу, что вызывается условиями работы других элементов, например линии передачи. Тогда при сложении частоты, генерируемой на элементе, с частотой, подаваемой для запоминания, возникают комбинационные частоты, являющиеся паразитными сигналами. Для устранения их либо характеристика усилителей подгоняется так, чтобы паразитная частота приходилась на спад характеристик, либо вводится специальная обратная связь.

Автор предполагает дать в следующей работе параметры и характеристики действующих макетов подобных устройств, находящихся сейчас в стадии разработки и эксперимента. Библ. 17 назв. О. В. Бачин

5241. Частотное запоминающее устройство. 2. Гопеги (Memorias de frecuencias. 2. Gopegui L. R. de), Rev. cienc. apl., 1956, 10, № 6, 502—513 (исп.)

Начало см. реф. 5240.

Рассматриваются элементы, на которых можно выполнять запоминающие и арифметические устройства, работающие на частотных принципах.

Наиболее простым устройством, способным запоминать несколько частот, является цепь рециркуляции. Проводится анализ такой цепи, состоящей из линии задержки, усилителя и ограничителя. Выводятся соотношения между временем задержки линии, ослаблением на ней и усилением усилителя, которые следует соблюдать для обеспечения надежной работы системы. Рассматривается система, использующая в качестве линии задержки магнитофонную ленту. При задержке порядка $^1/_8$ сек. на такой системе записывалось до 250 различных частот в диапазоне от 2 до 4 *кгц*. Это устройство использовалось для изучения влияния нестабильности амплитуды и частоты и методов устранения этой нестабильности (реф. 5240). При работе на частотах порядка 1 *мгц* использовались твердые линии задержки из плавленого кварца, которые позволяли запоминать до 1000 различных частот.

Другим основным типом запоминающих элементов являются многорезонансные генераторы. Упоминается возможность создания подобного устройства с помощью генератора Франклина, возможно также создание кварцевых генераторов на несколько положений. В основном же описывается многорезонансный транзитронный генератор. Сообщается об использовании транзитронного генератора на 10 положений, на основе которого создан десятичный счетчик и сумматор.

Первый тип такого счетчика показан на рис. 1. При включении транзитронного генератора на нем генерируется частота f_0; на контуре, настроенном на эту частоту, выделяется напряжение, которое трансформируется в соседний контур, выпрямляется, замыкает реле *1* и подсоединяет цифровой генератор, дающий частоту f_1, к разомкнутому контакту реле *M*. При подаче импульса управления реле *M* срабатывает и

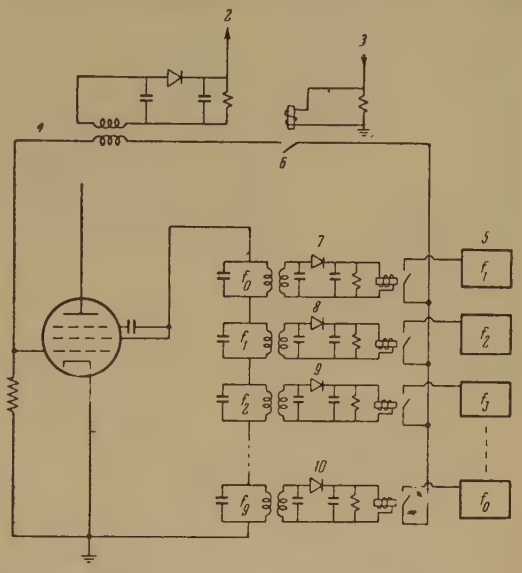


Рис. 1. Счетчик типа А. 1—Транзитронный генератор. 2— В разряд десятков. 3 — Импульс управления. 4 — Контур, настроенный на частоту f_0. 5 — Цифровые генераторы. 6 — Реле «М». 7 — Реле «I». 8—Реле «2». 9 — Реле «3». 10 — Реле «10».

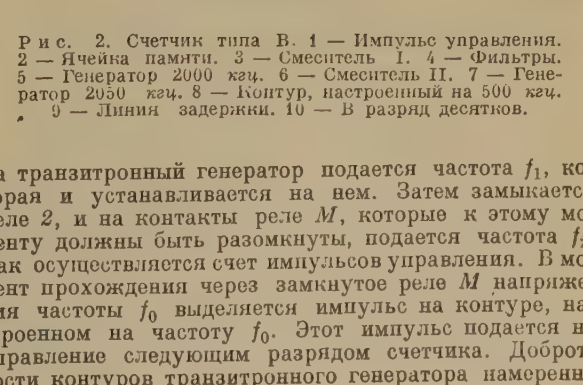


Рис. 2. Счетчик типа В. 1 — Импульс управления. 2 — Ячейка памяти. 3 — Смеситель I. 4 — Фильтры. 5 — Генератор 2000 *кгц*. 6 — Смеситель II. 7 — Генератор 2050 *кгц*. 8 — Контур, настроенный на 500 *кгц*. 9 — Линия задержки. 10 — В разряд десятков.

на транзитронный генератор подается частота f_1, которая и устанавливается на нем. Затем замыкается реле *2*, и на контакты реле *M*, которые к этому моменту должны быть разомкнуты, подается частота f_2. Так осуществляется счет импульсов управления. В момент прохождения через замкнутое реле *M* напряжения частоты f_0 выделяется импульс на контуре, настроенном на частоту f_0. Этот импульс подается на управление следующим разрядом счетчика. Добротности контуров транзитронного генератора намеренно

ухудшают введением шунтирующих сопротивлений, чем снижают остроту резонанса, облегчая переключение частот. Хотя на схеме изображены электромеханические реле, они могут быть и электронными. Достоинством схемы является независимость частот, генерируемых в контурах.

На рис. 2 приведен другой тип десятичного счетчика, работающего на частотных принципах. Запоминающая ячейка способна генерировать 10 частот от 1000 *кгц*, что соответствует цифре 0, до 550 *кгц*, что соответствует цифре 9; интервал — 50 *кгц*. На смесителе производится сложение частоты, генерируемой в ячейке, и частоты 2 *мгц*. Сумма частот пропускается фильтром, а разность гасится. В смесителе *11* из полученной частоты вычитается частота 2050 *кгц*, ибо через последующий фильтр не проходят высокие ча-

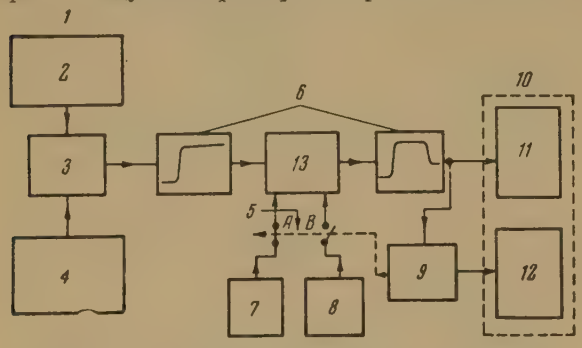


Рис. 3. Сумматор. 1 — Слагаемые. 2 — Ячейка памяти I. 3 — Смеситель I. 4 — Ячейка памяти II. 5 — Коммутатор *C*. 6 — Фильтры. 7 — Генератор 1000 *кгц*. 8 — Генератор 500 *кгц*. 9 — Детектор. 10 — Сумма. 11 — Ячейка памяти III. 12 — Ячейка памяти IV. 13 — Смеситель II.

стоты. В результате на линию задержки приходит частота, которая на 50 *кгц* ниже частоты ячейки, что соответствует цифре, на единицу большей цифры, записанной в ячейке. При подаче импульса управления новая частота устанавливается в ячейке. Время задержки линии должно быть больше длительности импульса управления. При прохождении через настроенный контур частоты 500 *кгц* подается сигнал переноса в следующий разряд, а схема ячейки памяти должна быть такова, чтобы при подаче на вход ее частоты 500 *кгц* в ней генерировалась частота 1000 *кгц*.

На рис. 3 показан сумматор, работающий аналогично. Смеситель I суммирует частоты, генерируемые обеими запоминающими ячейками. Смеситель II вычитает из полученной частоты либо 1000 *кгц*, либо 500 *кгц*, в зависимости от положения коммутатора *C*, управляемого детектором. Нормальное положение коммутатора в точке *A*. Если сумма цифр больше 9, чему соответствует суммарная частота более 1550 *кгц*, то разность частот после смесителя II проходит через полосовой фильтр и поступает в разряд единиц суммы. При сумме, равной или большей 10, и при частоте, равной или меньшей 1500 *кгц*, разность не пройдет через полосовой фильтр. Отсутствие сигнала на выходе фильтра заставит детектор послать единицу в разряд десятков суммы и перевести коммутатор *C* в положение *B*, и на смесителе II из суммарной частоты будет вычитаться не 1000, а 500 *кгц*, что соответствует уменьшению на 10-той цифре, которая передается в разряд единиц суммы. Библ. 37 назв.

Примечание референта. Подобные схемы, несмотря на их громоздкость, дают возможность применять в технике вычислительных машин радиотехнические методы высоких частот и при дальнейшей разработке могут существенно повысить быстродействие вычислительных машин. О. В. Бачин

5242. **Запоминающие устройства для машин-орудий.** Каплан (Memories for machine tools. Kaplan Julius Y.), Electr. Manufact., 1954, 54, № 1, 274, 276, 278, 280 (англ.)

5243. **Охлаждение электронного «мозга»** (Cooling an electronic brain), Flight, 1954, 66, № 2388, 651 (англ.)

5244. **Переключательные схемы на контактных транзисторах для применений в быстродействующих вычислительных машинах.** Пром, Кросби (Junction transistor switching circuits for high—speed digital computer applications. Prom G. J., Crosby R. L.), IRE Trans. Electronic. Comput., 1956, 5, № 4, 192—196, 256—257 (англ.)

5245. **Импульсный генератор и быстродействующая запоминающая схема.** Бей, Грисамор (Pulse generator and high—speed memory circuit. Bay Z., Grisamore N. T.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, 5, № 4, 213—218, 256 (англ.)

5246. **Входные и выходные устройства и пульт управления машины ЭРМЕТХ.** Шпейзер (Eingangs und Ausgangsorgane, sowie Schaltpulte der ERMETH. Speiser Ambros P.), Nachrichtechn. Fachber., 1956, 4, 87—89, 226 (нем.; рез. англ.)

Рассматриваются входные и выходные устройства и пульт управления электронной вычислительной машины ЭРМЕТХ Швейцарской высшей технической школы (РЖМат, 1956, 1710). Указывается, что, кроме непосредственно связанных с вычислительной машиной двух перфораторов, печатающего устройства и пульта управления, имеется еще специальное устройство для программирования («кодирующая машина»), состоящее из пульта обслуживания, специального печатающего устройства и двух перфораторов. Используются перфораторы, изготовленные фирмой MITHRA AG в Цюрихе (дочерним предприятием фирмы «Ремингтон Рэнд») и работающие в обычном коде фирмы «Ремингтон Рэнд». Скорость обработки (набивка или считывание) 2 карты в 1 сек. На карте может быть помещено пять 16-разрядных кодов. Так как на карте набивается таким перфоратором одновременно 400 двоичных цифр, то применяется промежуточное запоминающее устройство для перфоратора — электромеханический координатный переключатель телефонного типа. Всего в машине ЭРМЕТХ используется 7 таких координатных переключателей. Пульт управления использует клавиатуру вычислительной машины МАДАС, печатающее устройство фирмы ИБМ и специальную коммутационную доску, на которой могут быть набраны различные схемы печатания выходных данных, проводимого полностью автоматически. Так, возможно печатание аргумента с сокращенным числом разрядов, с опусканием лишних нулей, знаков и печатание специальных символов и обозначений. Для быстрой регистрации промежуточных результатов, когда нет возможности использовать обычную схему печатания, применяется специально разработанное устройство, печатающее за 1 сек. два 16-разрядных кода. Указывается, что общая стоимость входных и выходных устройств составляет около 50% стоимости всех остальных устройств машины ЭРМЕТХ. Г. М. Грязнов

Примечание редакции. В реф. 1710 (РЖМат, 1956) допущена неточность в наименовании места разработки машины ЭРМЕТХ: вместо «Высшей электротехнической школы» следует считать «Швейцарской высшей технической школы» (Eidgenossische Technische Hochschule).

5247. **Печатающее устройство для вычислительной машины или магнитной ленты** (Printer for compute

or magnetic tape), Instruments, 1953, 26, № 8, 1137 (англ.)

Краткое сообщение о быстродействующем печатающем устройстве фирмы Шепард (Shepard Laboratories) (США) для вывода информации из вычислительных машин или с магнитной ленты. Скорость до 1800 строк и 108 тыс. знаков в 1 мин.

5248. **Устройство преобразования данных с перфокарт на ленту для Вены** (Ein Card-to-Tape-Converter für Wien), MTW-Mitt., 1957, 4, № 1, 62—63 (нем.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Рэнд» об устройстве преобразования данных с перфокарт на магнитную ленту для вычислительного устройства УНИВАК (240 перфокарт в 1 мин.). Устройство преобразования данных состоит из 3 частей: 1) блока считывания данных с перфокарт, 2) главной электронной части, накапливающей преобразуемые данные в виде импульсов, 3) узла записи, на котором заполняется записываемой информацией магнитная лента.

Правильность преобразования данных обеспечивается сравнением данных на перфокартах с данными, записанными на ленту. Только после абсолютно точного совпадения этих данных возможно преобразование данных следующей по порядку перфокарты. Программирование последовательности нанесения данных на ленту производится с помощью коммутационной доски.

Фирма «Ремингтон Рэнд» имела такое устройство в своем вычислительном центре во Франкфурте-на-Майне. Планируемая установка второго устройства преобразования данных в Вене облегчит выполнение в этом центре заказов из Австрии, так как на вычислительный центр будут посылаться только кассеты с лентой. В. С. Бородин

5249. **Цифровая техника в моделирующих системах. Мейер** (Digital techniques in analog systems. Meyer M. A.), Trans. I. R. E., 1954, EC-3 № 2, 23—29 (англ.)

Описывается метод построения моделирующих систем с дискретным представлением непрерывных величин через частоту следования импульсов. Входные преобразователи преобразуют напряжения, углы поворота и другие величины в параллельный двоичный код. Для перевода двоичного кода в последовательность импульсов необходимой частоты применяется умножитель частоты, состоящий из двоичного счетчика и переключательной схемы. Этот же умножитель используется для перемножения чисел. Сложение и вычитание осуществляются с помощью реверсивного счетчика. Если тактовый генератор дает для каждой переменной свою последовательность импульсов, то суммирование величин, заданных частотами, выполняется с помощью смесителей, где импульсы одной последовательности попадают в промежутки между импульсами других последовательностей. Для интегрирования по времени достаточно подсчитать число импульсов за период интегрирования. Для определения X/Y решается уравнение $ZY - X = 0$. Описываются также синусно-косинусные двоичные преобразователи, синхронизаторы, электромеханический реверсивный регистр и др. Все схемы могут быть выполнены на магнитных сердечниках. Описаны примеры решения дифференциальных уравнений. Г. Ф. Типалин

5250. **Развитие моделирующих вычислительных устройств в связи с проектированием вертолетов. Веннинг** (Analogue computer development with reference to helicopter applications. Venning B. H. J. Helicopter Assoc., 1957, 11, № 2, 77—96. Discuss. 96—103 (англ.)

Семь разделов статьи излагают хорошо известные принципы электронного моделирования. Описаны схемы с диодами и потенциометрами, позволяющие воспроизводить в модели различные нелинейности и прерывности, подобные биениям, люфтам, демпфированию. Приводятся данные о точности и быстроте вычислений на подобных машинах.

В одном разделе изложены материалы Саутгемптонского университета, касающиеся использования электронных моделирующих устройств при изучении резонанса вертолета в земных условиях. Возникновение вибраций было обнаружено на некоторых вертолетах при посадке и взлете. Приемлемый расчет условий возникновения вибраций с учетом различных факторов (демпфирования от вязкости и трения в ступице и лопасти, вертикального движения) весьма трудоемок. Работа значительно сокращается при использовании моделирующих вычислительных устройств, которые при некоторых упрощающих предположениях сокращают не только время вычисления, но и требуют незначительного оборудования (около 4 усилителей).

Отдельный раздел посвящен описанию принципов использования подобных устройств в инженерных задачах. Приводится дискуссия по статье. Библ. 8 назв. А. В. Комаров

5251. **Электрические моделирующие устройства. Берг** (Elektrische analogon-machines. Bergh Jan van den), Polytechn. tijdschr., 1957, A12, № 11-12, 250—254 (гол.)

Кратко рассматриваются принципы моделирования и работы основных решающих блоков электрических моделирующих устройств. Дается описание моделирующей установки переменного тока, построенной артиллерийской лабораторией в Дельфте (Голландия) и предназначенной для изучения специальных систем регулирования. Устройство состоит из 4 основных шкафов, 2 из которых предназначены для имитации изучаемых процессов, один для моделирования систем регулирования, а четвертый содержит вспомогательную аппаратуру и генераторы. Моделирующая установка имеет 6 суммирующих устройств, 6 усилителей с регулируемым коэффициентом усиления от +10 до —10, 9 операционных усилителей, набор регулируемых сопротивлений и конденсаторов, генератор частоты 50 *гц*, синусоидальный генератор с диапазоном 20—20 000 *гц*, 4 осциллографа, 3 вольтметра, специальный импульсный генератор для реализации 12 видов различных одиночных внешних воздействий и особое устройство («универсальный имитатор») для синтеза различных функций. Это устройство имеет линию задержки с 21 ступенью (полное время задержки регулируется от 0,525 до 2,1 *мсек*), на которую подаются периодически импульсы. Сигналы, отбираемые с выхода каждой ступени, с определенным весом подаются по 21 каналу на суммирующий усилитель, выходное напряжение которого является ступенчатой функцией времени. Эта ступенчатая функция после интегрирования превращается в требуемую гладкую функцию времени $f(t)$. Г. М. Грязнов

5252. **Принципы построения и использования моделирующих устройств. Часть 2. Как использовать моделирующее устройство при анализе колебаний. Макдафф** (Analog simulators. Part. 2. How to use the simulator in vibration analysis. Macduff J. N.), Mach. Design, 1956, 28, № 18, 106—113 (англ.)

Часть 1 см. РЖМат, 1957, 6746.

Рассматривается изучение линеаризированных колебательных систем с одной и несколькими степенями свободы методом прямого моделирования. В обратную связь решающего усилителя включается пассивная цепь из сопротивлений и конденсаторов, которая делает передаточный коэффициент решающего усилителя равным передаточной функции моделируемого объекта. Таким образом значительно снижается число решающих усилителей на задачу по сравнению с методом математического моделирования. Дана номограмма для определения параметров пассивной цепи и со-

противления на входе усилителя для воспроизведения передаточной функции вида $z=\frac{1+T_1p}{1+T_1p+T_1T_2p_2}$, т. е. для моделирования колебательной системы с одной степенью свободы и жидкостным демпфированием. Рассматривается методика моделирования систем со многими степенями свободы. Приводятся решения колебательных систем с одной и тремя степенями свободы. Библ. 16 назв. П. В. Тихонов

5253. **QUEUIAC — электромеханическое моделирующее устройство для решения проблем ждущей линии. Данн, Флагл, Хикс** (The QUEUIAC: an electromechanical analod for the simulation of waiting-line problems. Dunn Paul F., Flagle Charles D., Hicks Philip A.), Operat. Res., 1956, 4, № 6, 648—662 (англ.)

Описывается моделирующее устройство QUEUIAC, предназначенное для эмпирического решения задач ждущих линий в проводной связи и оргтехнике. Устройство программирует произвольное распределение вызовов и соединений, ведет непрерывный учет вызовов и соединений, вычисляет вероятность возможных состояний системы и автоматически воспроизводит различные порядки очередности соединений. Оно состоит из блока вызовов и соединений и блока регистра. Первый блок программирует информацию о вызовах и соединениях на перфоленте и вводит ее в соответствующие узлы сети посредством игольчатых трансмиттеров.

Блок регистра принимает информацию, запоминает ее, суммирует времена ожидания соединения поступившими вызовами, в соответствующее время передает обслуживаемый вызов к следующему узлу сети и сообщает информацию управления на пульт управления. Блок регистра состоит из двух одинаковых ждущих линий и устройства пропорционального обслуживания. Основой ждущей линии является реверсивный шаговый переключатель, контактные поля которого обеспечивают указанные выше функции регистра. Дана схема устройства пропорционального обслуживания, которое служит для управления соединениями при обслуживании двух параллельных линий равного порядка очередности. QUEUIAC воспроизводит следующие наиболее важные виды порядка очередности: старшинство, пропорциональное обслуживание параллельных линий равного старшинства одним устройством, одновременное обслуживание нескольких линий одним устройством и обслуживание, при котором скорость соединения вызовов зависит от количества вызовов, ждущих соединения. П. В. Тихонов

5254. **Опыт эксплуатации моделирующей вычислительной машины для решения системы линейных алгебраических уравнений. Мадич** (Experiences with analogue computer for solving systems of linear algebraic equations. Madic Petar B.), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 222—225; discuss. 225—226 (англ.; рез. франц.)

Излагается опыт эксплуатации вычислительной машины для итерационного решения систем алгебраических уравнений, которая сконструирована лабораторией «Прикладной математики института им. Бориса Кидрича» (Югославия).

Машина может решать системы из 30 уравнений с 30 неизвестными. Питание от сети 220 *в*, 50 *гц*. Коэффициенты и неизвестные воспроизводятся потенциометрами. В процессе решения микроамперметр фиксирует (в зависимости от положения переключателя) либо квадрат ошибки в уравнении, либо сумму ошибок всех уравнений. Поэтому итерация осуществляется либо по методу наименьших квадратов, либо по методу Гаусса—Зейделя. Опыт эксплуатации показал: а) нормальные системы уравнений машина решает со скоростью не меньшей, чем у машины с обратной связью; б) системы уравнений, где число уравнений больше числа неизвестных, машина решает по методу наименьших квадратов, обнаруживая определенные преимущества перед другими машинами; в) машина может решать системы уравнений с плохими соотношениями коэффициентов путем предварительной трансформации коэффициентов; под системами уравнений с плохими соотношениями коэффициентов понимаются системы со слишком медленной сходимостью итераций к решению. Библ. 16 назв. П. В. Тихонов

5255. **Частичная компенсация погрешностей в электронных моделирующих устройствах на постоянном токе, предназначенных для решения дифференциальных уравнений. Лёфгрен** (Partial drift compensation in electronic D-C analog computers for differential equations. Löfgren L. E.), Appl. Scient. Res., 1954, 4B, № 1-2, 109—123 (англ.)

5256. **Использование моделирующего устройства для оптимизации переходных характеристик системы регулирования генераторов самолетного типа. Джеймс** (The use of an analogue computer to optimize the transient response of an aircraft-type generator-regulator system. James H. B.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1954, 72, Part 2, 263—368 (англ.)

5257. **Проект машины «Тайфун». Эмг** (Project Typhoon. Emge Benjamin F., Jr), Aero Digest, 1954, 69, № 2, 66 (англ.)

Краткое описание машины «Тайфун» (РЖМат, 1954, 2386).

5258. **Операторный метод алгебраического решения уравнений, описывающих переходные и установившиеся процессы в линейных системах. Пятин Ю. М.** В кн.: Элементы расчета точных приборов, М., Оборонгиз, 1954, 154—164

Сущность нового метода заключается в превращении схемы электрического аналога любой линейной электромеханической системы из геометрической фигуры, удобной для составления исходных уравнений, в своеобразный оператор, позволяющий сразу записывать формулы действительных токов в ветвях аналога. При этом отпадает необходимость даже в составлении системы исходных уравнений. Из текста статьи

5259. **Замечание о быстродействующем интеграторе произведений. Седербаум** (Note on high speed product integrator. Cederbaum I.), Rev. Scient. Instrum, 1953, 24, № 11, 1072—1073 (англ.)

Обсуждаются некоторые погрешности, возникающие в быстродействующем интеграторе Макни (РЖМат, 1956, 1724).

5260. **Разделение труда при обслуживании научных цифровых вычислительных машин. Каплан** (Division of labor in scientific digital computer service facilities. Caplan L. N.), Computers and Automat., 1957, 6, № 4, 6—7, 36 (англ.)

Рекомендуется работу по составлению программы разбить между 3 группами программистов, из которых первая группа создает математические модели задач, вторая группа находит цифровые методы решения и третья группа составляет полную программу с учетом конкретной машины. М. Д. Хахин

5261. **Обработка формул машинами. Лопстра** (Processing of formulas by machines. Loopstra Bram J.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 146—147, 224 (англ.; рез. нем.)

Отмечается различие между «языком» машин (кодом машин) и общепринятым языком математических формул. Обсуждаются недостатки различных существующих (интерпретирующих и компилирующих) спо-

собов автоматического перевода математических формул в программу. Указывается на необходимость устранения избыточной информации в записи программ и чисел в машине для повышения производительности машин. Предлагается создавать машины с памятью, где длина ячеек могла бы изменяться в зависимости от запоминаемого материала, что потребует некоторого увеличения оборудования, но позволит сильно увеличить эффективность использования запоминающего устройства машины. Упоминается вопрос о повышении надежности машин. О. С. Кулагина

5262. **Автоматизация в промышленности при помощи вычислительной машины УНИВАК-120 и преобразователя с перфокарт на перфоленту фирмы «Ремингтон Рэнд»** (Automatismo en la industria mediante el calculador Univac 120 y el convertidor Remington Rand de ficha a cinta), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1956, 5, № 14, 23—34 (исп.)

Машина УНИВАК-120 используется для расчета эксцентрических зубчатых колес. Так как УНИВАК-120 работает с перфокартами, а для управления автоматическим станком, изготовляющим колеса, требуется перфолента, то применяется преобразователь данных с перфокарт на перфоленту. Для расчета пары эксцентрических зубчатых колес используются записанные на перфокарты таблицы взаимных угловых перемещений обоих колес; по этим данным при помощи формул параболической интерпретации рассчитываются для каждой пары перемещений радиусы колес, длины дуг углов и тангенсы угла между общей касательной колес и перпендикуляром к линии, соединяющей их оси. Эти новые данные пробиваются на тех же перфокартах. Программа для этих расчетов содержит 51 операцию. При этом используется 8 постоянных величин, вводимых заранее. Перфокарта обрабатывается за 6 сек. Те же перфокарты используются для 2-й программы, при помощи которой находятся данные для нарезания зубчатого колеса. По результатам первой программы и радиусу фрезы, нарезающей колесо, определяются расстояние между центрами колеса и фрезы, угол поворота колеса и угол поворота фрезы от точки к точке. 2-я программа включает в себя 64 операции и требует дополнительных операций для извлечения квадратного корня и нахождения тангенса угла. Используются 10 постоянных. Каждая перфокарта обрабатывается за 14 сек. Кроме того, имеется специальная программа для контроля правильности вычислений, а также для определения наибольшего необходимого числа шагов вычисления. Полученные в результате выполнения 2-й программы данные пробиваются на перфокарты. Затем эти данные переводятся на перфоленту и поступают в устройство управления автоматическим станком, на котором нарезаются колеса. Применение машины УНИВАК-120 для расчета зубчатых эксцентрических колес снизило время расчета с 50 час. до 0,5 часа. Общее время расчета зубчатого зацепления и подготовка серийного выпуска колес составляет около 4 час. О. В. Бачин

5263. **Конструирование изделий при помощи цифровых вычислительных машин. Мидлтон** (Product design by digital computers. Middleton Marshall, Jr), Westinghouse Engr, 1956, 16, № 2, 39—43, 65 (англ.)

В общих чертах рассматривается порядок совместной работы конструкторов и программистов, приводится краткое описание блок-схемы цифровой вычислительной машины и принципов программирования. Указывается, что при помощи вычислительной машины были проведены конструктивные расчеты для мощных трансформаторов (от 750 до 20 000 *квт* при пиковом напряжении до 350 *кв*) и электродвигателей переменного тока (мощностью от 200 до 2000 *л. с.* при линейном напряжении до 6900 *в*). Программа для машины воспроизводит способ действий инженера, занимающегося расчетом трансформатора. Исходными данными являются передаваемая мощность, максимальное допустимое напряжение, нагрев и т. д. После ввода данных вычислительная машина выбирает конструктивные параметры и рассчитывает рабочие характеристики трансформатора. Затем эти характеристики сравниваются с заданными, вводятся поправки в первоначально заданные параметры и вновь ведется расчет (до совпадения характеристики). Всего в программе используется 16 подпрограмм, 1-я из которых включает все величины, указанные заказчиком. Подпрограммы от 2-й до 10-й служат для расчета конструктивных параметров, от 11-й до 14-й — для проверочных расчетов, 15-я — для расчета охлаждения, 16-я — для расчета веса и стоимости трансформатора. В. П. Кузнецова

5264. **Универсальные быстродействующие цифровые вычислительные машины. I. Проектирование и изготовление. Эдуардс** (Universal high-speed digital computers. I. Design and construction. Edwards D. B. G.), BEAMA Journal, 1957, 64, № 2, 53—59 (англ.)

Дается описание основных функций арифметического устройства, устройства управления и устройства памяти большой цифровой машины. Приводятся некоторые технические характеристики оперативных и долговременных устройств памяти. М. Д. Хахин

5265. **Универсальные быстродействующие цифровые вычислительные машины. II. Орудие для инженера-электрика. Брукер** (Universal high-speed digital computers. II. A tool for the electrical engineer. Brooker R. A.), BEAMA Journal, 1957, 64, № 3, 102—107 (англ.)

Ч. I см. реф. 5264.

Разбираются возможные применения цифровых вычислительных машин в электротехнике. Излагаются общий порядок решения задач на таких машинах и принципы программирования и автоматического программирования. Приводится подробный пример составления программы для вычисления потерь в меди ротора индукционного двигателя. Рассматривается ряд электротехнических задач, приводящих к системам линейных алгебраических или дифференциальных уравнений, и методика их решения с помощью цифровых вычислительных машин. Рассматриваются вопросы экономической целесообразности и удобства использования цифровых вычислительных машин в практике инженеров-электриков. Отмечается необходимость введения специальных курсов для ознакомления студентов и аспирантов с математическими методами, использующимися в вычислительной технике.

З. Д. Доброхотова

5266. **Цифровая вычислительная машина как пособие по проектированию для инженера-электрика. Бертуисл, Дент** (The digital computer as an aid to the electrical design engineer. Birtwistle B., Dent Beryl M.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, B 103, Suppl. № 1, 47—53. Discuss. 77—83 (англ.)

См. также РЖМат. 1958, 2553.

5267. **Расчет критических скоростей вращения на электронной цифровой машине. Градуэлл, Кей** (Electronic calculation of critical whirling speeds. Gradwell C. F., Kaye J.), Engineer, 1955, 199, № 5171, 294—296 (англ.)

Дается методика расчета на электронной цифровой машине угловых и линейных перемещений и всех критических скоростей до заданного максимума для вращающегося вала, нагруженного некоторым количеством дисков и закрепленного в некотором количестве подшипников. М. Д. Хахин

5268. **Расчет профилей кулачков на машине УНИВАК-120. Грэй** (Cam profile design with the UNIVAC 120. Grey Louis D.), Computers and Automat., 1957, 6, № 4, 10—11 (англ.)

Дается техническая характеристика машины УНИВАК-120 и описывается метод расчета кулачков на этой машине.

Приведены соображения о времени, нужном для расчета, и о необходимом количестве перфокарт.

М. Д. Хахин

5269. **Машины ИБМ на службе автоматизации. Автоматическая система учета продукции АПР** (IBM-Geräte im Dienste der Automatisierung. Das automatische Produktions-Registrier-System (Automatic production recording system) «APR»), MTW-Mitt., 1957, 4, № 2, 127—128 (нем.)

Сообщение фирмы ИБМ о разработке автоматической системы учета продукции АПР (Automatic Production Recording System — APR). АПР — быстродействующая универсальная система, выполняющая собирание, сопоставление и накопление данных различного рода на перфокартах и перфолентах. Система состоит из 16 автоматов, соединяемых в различных комбинациях. Электрические сигналы с манометрических, тахометрических и других датчиков поступают на вход АПР и затем либо хранятся в запоминающем устройстве для дальнейшего использования, либо выдаются на перфокарты (перфоленты) или на автоматическую пишущую машинку. Работа АПР координируется программирующим устройством.

Приводится пример использования системы АПР на фабрике по производству электромоторов. Система АПР при этом применяется для учета числа деталей и числа готовых моторов, для контроля качества отдельных деталей и для управления процессами производства деталей моторов на конвейере. В. С. Бородин

5270. **Выполнение расчетов по перегону нефти на вычислительной машине КПК фирмы ИБМ. Органик, Мейер** (Flash calculations as performed on the IBM card programmed calculator. Organick Elliott I., Meyer Henry I.), J. Petrol. Technol., 1955, 7, № 5, 9—13 (англ.)

5271. **Моделирование движения на магистралях посредством электронной вычислительной машины. Герло** (Simulation of freeway traffic by an electronic computer. Gerlough D. L.), Highway Res. Board. Proc. 35. Washington, 1956, 543-547 (англ.)

Универсальная цифровая машина Мичиганского университета (США) применена для моделирования движения с разными скоростями, обгона, изменения скорости, что позволяет проверить эффективность участка шоссе. Рассматриваются два способа кодирования информации. Возможно изображать свободные участки шоссе нулями, а положение автомобилей единицами. Движение вперед тогда соответствует умножению на степень двойки. Этот способ требует большого объема оперативной памяти. Удобнее записывать сведения о положении скорости автомобиля и другим двойственным кодом.

Г. Ф. Типалин

5272. **Автоматическая организация обходных соединений в телефонной связи. Клос** (Automatic alternate routing of telephone traffic. Clos C.), Bell Labs Rec., 1954, 32, № 2, 51—57 (англ.)

5273. **Электронные вычислительные машины и телефонная коммутация. Льюис** (Electronic computers and telephone switching. Lewis W. D.), Bell. Labs Rec., 1954, 32, № 9, 321—325 (англ.)

5274. **Отпрыск гигантской вычислительной машины** (Offshoot of the giant computer), Modern Railroads, 1954, 9, № 10, 107—108, 110, 112 (англ.)

Описывается система обработки данных, разработанная фирмой «Ремингтон Рэнд» для автоматической перегрузки железной руды из вагонов на грузовые суда на оз. Верхнем (США). В системе используются 10-клавишные суммирующие машины с автоматическим вводом данных на клавиатуру, счетные потенциометры и запоминающее устройство на телефонных координатных переключателях. Выход — через печатающие устройства «Флексорайтер» и телеграфные перфораторы.

Г. Н. Поваров

5275. **Вычислительные программы промышленной статистики. Адам** (Industriestatistische Rechenprogramme. Adam Adolf), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 204—206, 221 (нем.; рез. англ.)

Обсуждается использование современных вычислительных машин для внедрения статистических методов в исследование производственных процессов.

5276. **Новое самолетное счетно-решающее устройство вычерчивает маршрут полета на карте в проекции Меркатора** (New airborne computer gives Mercator plot), West Aviat., 1957, 37, № 1, 14—15 (англ.)

Коротко сообщается о принципе действия непрерывно действующего самолетного счетно-решающего устройства, с помощью которого на карту, составленную в проекции Меркатора, наносится маршрут полета самолета. Система состоит из собственно счетно-решающего устройства, вычерчивающего механизма и визуальных дистанционных индикаторов. Счетно-решающее устройство содержит два канала: «север—юг» и «восток-запад». Текущая координата самолета в каждом канале вычисляется с помощью следящих систем. В канале «север—юг» имеются три следящие системы, а в канале «восток—запад» — четыре, так как здесь учитывается сходимость меридианов. Точность нанесения координат самолета на карту при помощи вычерчивающего механизма составляет 1%. Ю. И. Кириленко

5277. **Навигационное вычислительное устройство** (Navigation computers), Amer. Aviat, 1953, 16, № 23, 33 (англ.)

5278. **Вычислительные машины для коммерческих предприятий. Грабб** (Computers for business and management. Grabbe Eugene M.), ISA Journal, 1957, 4, № 3, 98—101 (англ.)

Рассматривается применение вычислительных машин на коммерческих предприятиях США и требования к таким машинам. Ввиду особенностей коммерческих вычислений (большое количество данных, сравнительно небольшое число арифметических операций и др.), здесь целесообразны специализированные математические машины. Запоминающие устройства таких машин должны иметь большую емкость и малое время выборки. Печатающие устройства также должны быть быстродействующими. Сообщается о создании фирмой «Стромберг-Карлсон» (Stromberg-Carlson) печатающего устройства «Характрон» на электронно-лучевых трубках. Перед экраном трубки помещается маска с изображением печатных знаков. Сначала электронный луч фокусируется на выбранном знаке, затем он отклоняется в тот участок экрана, где этот знак должен быть помещен. На экране одной трубки размещается 1024×1024 знаков. Определенные преимущества дает применение машин, читающих обычные печатные тексты и преобразователей непрерывных величин в дискретные. При этом увеличиваются скорость и точность решения задач, так как входные данные не требуют предварительной обработки и вводятся без задержки.

А. Н. Чуйкин

5279. **Применение бухгалтерской машины «Националь-31» для численных расчетов. Набор шин. Говартс, Пир, Вандер-Элст** (Application de la machine comptable National 31 au calcul numérique. Construction des barres. Govaerts P., Pire J., Vander Elst N.), Bull. séances Acad. roy. sci. colon., 1956, 2, № 3. 477—491 (франц.

Описываются схемы набора шин управления для бухгалтерской машины «Националь-31», использованные метереологической службой Бельгийского Конго для гармонического анализа, подсчета скользящих сумм, вычисления конечных разностей и составления таблиц по конечноразностным формулам. А. А. Крюков

5280. **Первичные документы в системе учета розничной торговли. Роман** (Original documents in retail accounts receivable. Roman V.-H.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 61—63. Discuss. 63 (англ.)

Обсуждаются некоторые вопросы механизации учета розничной торговли с применением современной вычислительной техники.

5281. **Новшества в области программного управления. Кренмайр** (Neuerungen auf dem Gebiete der Programmsteuerungen. Krenmayr Josef), Techn. Rundschau, 1955, 47, № 6, 9—10 (нем.)

5282. **Совещание по торгово-промышленным применениям цифровых вычислительных машин. Вводный доклад. Уайзман** (Session on business applications of digital computeres. Introduction. Wiseman R. T.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, B 103, Suppl. № 1, 84—86. Discuss. 95 (англ.)

5283. **Требования Страхового бюро к электронному оборудованию для обработки данных. Стиккелл** (Requirements of the Bureau of Old-Age and Survivors Insurance for electronic data processing equipment. Stickell Edward E.), Proc. West. Joint Comput. Conf. (February 1953), N. Y., 74-79 (англ.)

5284. **Совещание по применению цифровых вычислительных машин в управлении производством. Введение. Фокнер** (Session on the application of digital computers in industrial control. Introduction. Faulkner I. J.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, B 103, Suppl. № 1, 98—99. Discuss. 108—111 (англ.)

5285. **Совещание по входным и выходным устройствам вычислительных машин, включая преобразование аналоговой информации в цифровую. Дейвис** (Session on computer input and output, including analogue digital conversion. Introduction. Davies D. W.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, B 103, Suppl. № 3, 425—426. Discuss. 447—449 (англ.)

5286. **Электронный счет и его применения. Соваж** (Le calcul électronique et ses applications. Sauvage André), Electronique, 1954, № 95, 21—23 (франц.)

Продолжение серии популярных статей об электронных цифровых вычислительных машинах. Начало серии см. РЖМат, 1956, 1804.

5287. **Электрический мозг. Шурц** (Elektrische Gehirne. Schurz Josef), Naturwiss. Rundschau, 1955, 8, № 2, 54—61 (нем.)

5288. **Использование электронных систем обработки данных в страховом деле. Дейвис** (The use of electronic data processing systems in the life insurance business. Davis M. E.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 11—18 (англ.)

5289. **Устройство типа СВАК может подавать табулируемые решения на электрическую пишущую машину** (Unit like SWAC can feed tabulated solutions into an electric typewriter), Electr. World, 1955, 143, № 16, 116—117 (англ.)

5290. **Некоторые сравнения между аналоговыми и цифровыми вычислительными машинами. Скотт, Хейли** (Some comparisons between analogue and digital computers. Scott W. E., Haley A. C. D.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1954, 14, № 10, 476—486 (англ.)

5291. **Возможности обработки данных в Объединенном центре испытаний управляемых снарядов ВВС. Уэст** (The Integrated Air Force Missile Test Center data processing facility. West Charles F.), Trans. I. R. E., PGRTRO-1, 1954, 1—7 (англ.)

5292. **Интеграторы для вычислительных и управляющих систем. Бландeн** (Integrators for computers and control systems. Blunden W. R.), Prod. Engng, 1954, 25, № 6, 168—175 (англ.)

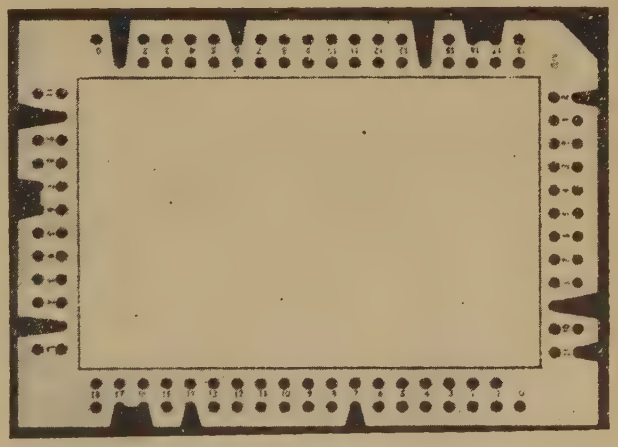
5293. **Карточный репродуктор для автоматической телефонной связи в масштабе страны. Хэмптон, Ньюсом** (The card translator for nationwide dialing. Hampton L. N., Newsom J. B.), Bell System Techn. J., 1953, 32, № 5, 1037—1135 (англ.)

5294. **Применение счетно-аналитических машин «Голлерит» для спектрального анализа. Бови, Нотт** (The use of Hollerith computing machines in spectroscopic term analysis. Bovey L. F. H., Nott C. W. Repts Atomic Energy Res. Establ., 1956, № C/R 1334, 8 pp., ill.) (англ.)

Описывается методика использования счетно-аналитических машин «Голлерит» для обработки экспериментальных данных спектрального анализа химического состава различных веществ. Е. Н. Маквецов

5295. **Перфокарты с отверстиями по краям. Хейн** (Randlochkarten — Ein Beitrag zum Thema Negativ-Positiv-Archiv. Hein Hans Jürgen), Photo-Mag., 1954, November, 65—11, 79—11 (нем.)

Описана организация архивной картотеки для хранения фотофильмов, основанной на применении перфокарт с отверстиями по краям. Основные преимущества такой картотеки: 1) быстрое нахождение заданной

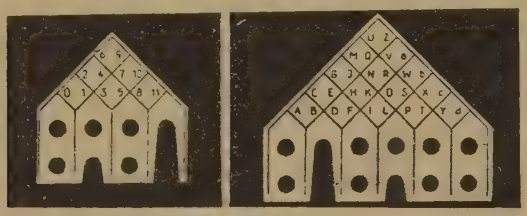


Фиг. 1

карты в общем массиве картотеки; 2) вынутая карта может быть вложена обратно в картотеку в любом положении относительно других карт; 3) на карты можно наносить большое число классификационных признаков фильмов, при этом сложность отыскания заданных карт увеличивается незначительно.

Перфокарта представляет собой картонный прямоугольник со срезанным скосом правого угла (см. фиг. 1). По всем четырем краям карты нанесены отверстия: по длине с каждой стороны по 18 пар и по высоте с каждой стороны по 12 пар отверстий. Середина карты используется для записи текста классификационных признаков: даты, порядкового номера фильма и места

его хранения. Комбинация отверстий в карте соответствует коду классификационных признаков. Отметка классификационных признаков осуществляется путем вырезания ножницами краев перфокарт с соответствующими отверстиями. Выборка карт из массива картотеки производится путем пропускания через отверстия карт проволочных щупов и легкого встряхивания пачки, при этом карты с вырезанными отверстиями выпадают, т. е. отсортировываются. Одновременно можно выбрать карты из пачки в 500 карт. Приводятся примеры зашифровки перфокарт для конкретных случаев, а также описание треугольных карт, где зашифровка производится упрощенным кодом для порядковых номеров или алфавитных данных. (Фиг. 2)



Фиг. 2

В. Н. Рязанкин

5296. Номограмма для перевода десятичных чисел в двоичные. Содоро (Reference chart for decimal-to-binary conversion. Sodoro J. F.), Electr. Manuf., 1955, 56, № 6, 137—139 (англ.)

На верхней шкале номограммы располагаются числа бóльшие 1, на нижней — меньшие 1. Если число точно равно числу на шкале, то ставится 1 на этом месте и 0 — на всех остальных местах. Если число попадает между точными величинами шкалы, то ставится 1 на ближайшем справа месте и это число вычитается из заданного числа. Затем процедура повторяется для остатка, при этом процесс идет вправо; устанавливается нуль на месте чисел шкалы, бóльших остатка. После достижения конца верхней шкалы переходят на нижнюю шкалу и процесс повторяют до тех пор, пока остаток не станет равным числу на шкале, или до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность приближения.

Номограмма может быть также использована для перехода от двоичной системы к десятичной, для чего записывают единицы и нули на надлежащих местах, соблюдая положение запятой. После этого записывают и складывают вместе числа десятичной шкалы для каждой единицы в двоичном коде. Результат является десятичным эквивалентом двоичного числа.

В примерах применения номограммы допущены опечатки. Г. Х. Новик

5297. Машинный метод для расчетов площади. Гусинский (Machine method for area computations. Goussinsky B.), Surveying and Mapping, 1955, 15, № 2, 241—242 (англ.)

Предлагается метод для расчетов площади на арифмометре.

5298. Вычислительные машины в качестве переводчиков. Ляпунов, Кулагина (Rechenmaschinen als übersetzer. Ljapunow A. A., Kulagina O. S.), Wiss. und Fortschr., 1956, 6, № 6, 181—183 (нем.)

Кратко излагаются основы применения цифровых вычислительных машин для автоматизации перевода с одного языка на другой. Описываются первые опыты перевода с русского языка на английский с помощью электронной счетной машины ИБМ в США (см. РЖМат, 1954, 5293). Г. М. Грязнов

5299. Опыт машинного перевода с одного на другой на БЭСМ. Мухин (An experiment on the machine translation of languages carried out on the Besm. Mukhin I. S.), Proc. Instn Electr. Engns, 1956, B 103, Suppl. № 3, 463—472. Discuss. 473—475 (англ.)

5300. Библиографический список Института практической математики Дармштадской высшей технической школы (Titelliste. Literaturstelle der DFG-Kommission Rechenanlagen Institut für Praktische Mathematik. Technische Hochschule Darmstadt. 1954, № 5401, 9 S.; № 5402, 17 S.; № 5403, 10 S.; № 5404, 10 S.; № 5405, 16 S.; № 5406, 18 S.; № 5407, 23 S.; № 5408, 14 S; № 5409, 19 S; № 5410, 15 S; № 5411, 17 S.) (нем).

Списки литературы по вычислительным машинам и математическим приборам, их элементам и их применению. Свыше 2 тыс. назв.

5301. Библиографический список Института практической математики Дармштадской высшей технической школы (Titelliste. Literaturstelle der DFG-Kommission Rechenanlagen Institut für Praktische Mathematik. Technische Hochschule Darmstadt. 1954, Sachregister, 22 S.) (нем.)

Предметный указатель к предыдущим выпускам списка (реф. 5300).

5302. Библиографический список Института практической математики Дармштадской высшей технической школы (Titelliste. Literaturstelle der DFG-Kommission Rechenanlagen Institut für Praktische Mathematik. Technische Hochschule Darmstadt. 1955, № 5501, 16 S.; № 5502, 16 S.; № 5503, 14. S.; № 5504, 9 S.; № 5505, 10 S.; № 5506, 12 S.; № 5507, 13 S.; № 5509, 10 S.; № 5510, 11 S.; № 5511, 17 S.) (нем.)

Продолжение списков, опубликованных в 1954 г. (реф. 5300). Около 1300 назв.

5303. Библиографический список Института практической математики Дармштадской высшей технической школы (Titelliste. Literaturstelle der DFG-Kommission Rechenanlagen Institut für Praktische Mathematik. Technische Hochschule Darmstadt. 1955, № 5508, 10 S.) (нем.)

Опыт десятичной библиографической классификации понятий в области устройств преобразования информации (вычислительных машин).

5304. Библиографический список Института практической математики Дармштадской высшей технической школы (Titelliste. Literaturstelle der DFG-Kommission Rechenanlagen Institut für Praktische Mathematik. Technische Hochschule Darmstadt. 1956, № 5602, 12 S.; № 5603, 12 S.; № 5604, 11 S.; № 5605, 12 S.) (нем.)

Продолжение списков за 1955 г. (реф. 5302). Около 450 назв.

5305. Библиографический список Института практической математики Дармштадской высшей технической школы (Titelliste. Literaturstelle der DFG-Kommission Rechenanlagen Institut für Praktische Mathematik. Technische Hochschule Darmstadt. 1956, № 5601, 10 S.) (нем.)

Перечень докладов на Совещании по математическому машиностроению в Москве (1956 г.) и на 10-й секции III Всесоюзного математического съезда (Москва, 1956 г.).

5306 К. Проектирование электронного вычислительного устройства с особым учетом требования минимальных материальных затрат при заданной математической производительности. Шпайзер (Entwurf eines elektronischen Rechengerätes unter besonderer Berücksichtigung der Erfordernis eines minimalen Materialaufwandes bei gegebener mathe-

matischer Leistungsfähigkeit. Diss. 2. unveränd. Aufl. Speiser Ambros P., Mitt. Inst. f. angew. Math. Eidgenöss. techn. Hochschule Zürich Nr. 1., Basel. Stuttgart: Birkhäuser, 1954, 54 S. Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 29, 1581 (нем.)

5307 К. Вычислительная машина средних размеров МАК. Уотсон (M. A. C. (Morgan automatic computer): a medium sized computer. Watson Arthur Francis. London, Hepburn, 1957, vi, 130 pp., ill., 5ȝ 5 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 380, 11 (англ.)

5308 К. Математика и вычислительные машины. Стибиц, Ларриви (Mathematics and computers. Stibitz George R., Larrivee Jules Alphonse. New York, McGraw-Hill, 1956, 234 pp., ill., 5 doll.), Publishers Weekly, 1957, **171**, № 6, 150 (англ.)

5309 К. Электронный дифференциальный анализатор. Исследование, проект и реализация (Analizador differencial electrónico. Investigacion, proyecto y realización. Madrid, C. S. I. C., 1955, 114 p., 100, 00 ptas), Bibliogr. hispánica, 1956, **15**, № 12, 299 (исп.)

5310 К. Автоматические цифровые вычисления. Труды совещания в Национальной физической лаборатории 25—28 марта 1953 года (Automatic digital computation. Proc. Sympos. Nat. Phys. Lab., March 25—28, 1953. London, H. M. S. O. 1954, vi, 296 pp., ill., 1z, 1 sh.) (англ.)

5311 К. Основы практической спектральной арифметики и алгебры. Руководство к новому способу вычислений на вычислительных машинах. Орлов (Основи практичне спектралне аритметике и алгебре. Упутство за нов начин рачунана на рачунским машинами. Орлов Константин. Белград. Друштво матем. и физ. НРС, 1955, 60 стр.), Bibliogr. jugosl., 1955, 6, № 22, 787 (серб.)

5312 П. Система записи для магнитной запоминающей матрицы. Персон (Magnetic memory matrix writing system. Person Lars B.) [Radio Corp. of America]. Пат. США 2719965, кл. 340—174, 4.10.55

Рассматривается матричное запоминающее устройство, работающее на принципе совпадающих токов. Предлагается использовать при записи селективное запрещение, при котором формирователь записи работает лишь в том случае, когда в избранный сердечник необходимо записать «1». Описан блок осциллографического контроля содержимого матрицы, а также электронное устройство, позволяющее прекращать цикл регенерации «1» в любом сердечнике матрицы в процессе ее испытания. О. В. Бачин

5313 П. Сегнетоэлектрическое запоминающее устройство и схема. Андерсон (Ferroelectric storage device and circuit. Anderson John R.) [Bell Telephone Labs, Inc.]. Пат. США 2717372, кл. 340—173, 6.07.55

Описываются схемы запоминающих устройств на кристаллах титаната бария, которые в диапазоне температуры 5—115° обладают свойством электрического гистерезиса. Петля гистерезиса тонкого кристалла пластинчатой формы характеризуется следующими данными: напряженность насыщения — от 250 до 7000 *в/см*, остаточный заряд 15—25 *мкк/см*. В описываемых схемах использовались кристаллы пластинчатой формы толщиной≈0,25 *мм*, на которые путем вжигания наносились серебряные электроды диаметром 0,5 *мм*. Основной запоминающей схемой является схема последовательного соединения кристалла титаната бария K и конденсатора C — цепочка EC. Входом KC является верхний электрод кристалла, выходом — нижний электрод (точка соединения K и C). Цепочка KC приводится в исходное состояние коротким положительным импульсом на входе. Импульс поляризует K в положительном направлении; после окончания импульса на K остается остаточный заряд Q. Это состояние K будем называть состоянием A, противоположное ему состояние — состоянием B. Запись двоичной единицы в цепочку KC производится коротким (до 1 *мксек*) отрицательным импульсом на входе; если же необходимо записать нуль, то импульс не подается и K остается в исходном состоянии. Таким образом, после записи единицы K оказывается в состоянии B, после записи нуля — в состоянии A. В момент записи 1 на выходе KC появляется отрицательный импульс; если это нежелательно, то C шунтируется соответственно ориентированным германиевым диодом. Записанная информация может храниться в K несколько дней. Считывание информации производится коротким положительным импульсом на вход KC. Если в K была записана 1, то происходит переход $B \rightarrow A$ и на выходе KC появляется положительный импульс; если в K был записан 0, то на выходе появляется положительный импульс значительно меньшей амплитуды, соответствующий подтверждению состояния A. Приведены формулы для выбора C; подсчитана энергия переполяризации K. Возможно многократное (до 5000 раз) считывание записанной в K информации без ее разрушения при небольшой амплитуде импульсов считывания. Описан ряд запоминающих схем с применением сегнетоэлектриков. В схеме с параллельным выходом имеются 4 цепочки KC, на входы которых подаются независимо импульсы записи. Импульс считывания подается через германиевые диоды одновременно на все ячейки KC и на 4 выходах одновременно считывается информация. Приведена схема последовательного запоминающего устройства на 2 двоичных разряда. В схеме — четыре цепочки KC, выход каждой KC соединяется с входом последующей KC через сопротивление. Сдвиг информации из одного разряда в другой производится за 2 такта. Автор утверждает, что описанная последовательная схема может быть выполнена на произвольно большое число разрядов, а при соединении выхода со входом записанная в схему информация может под действием импульсов проталкивания циркулировать сколько угодно долго. Приведена схема 4-разрядного запоминающего устройства с выводом записанной информации через линию задержки. Эта схема отличается от параллельной схемы тем, что выходы четырех цепочек KC в схеме соединены между собой звеньями линии задержки LC. При поступлении импульса считывания одновременно на входы четырех KC на выходе линии задержки появляются последовательно во времени 4 считанных сигнала. Подробно описано конструктивное оформление применяемых в схемах кристаллов и конструктивное оформление часто встречающегося в схемах соединения кристалла с двумя германиевыми диодами. С. Е. Ж.

5314 П. Избирательный указатель многих разрядов. Мелик (Selective plural digit indicator. Melick John M.) [Bell Telephone Laboratories Inc. New York N. Y.]. Пат. США 2648830, кл. 340—154, 11.08.53

Предлагается механическое карторакладочное устройство.

См. также: 4383, 4447

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абдуллаев Х. А. 4463
Айзенберг Л. 4586
Александров П. 4597
Аленицын Ю. Е. 4676 Д
Андреев К. А. 4425 К
Андрунакиевич В. А. 4546
Ахиезер Н. И. 4771

Б

Баврин И. И. 4666
Бакаляев О. С. 5068
Балдина Е. М. 5063
Барыбин К. С. 4438
Бебиашвили Ш. Л. 5016, 5017
Бекаревич А. Н. 4439
Беккер М. Б. 4438
Беклемишев Д. В. 5150
Белинский П. П. 4661
Бельтюков Б. А. 5194
Беляев В. И. 4430
Бендукидзе А. Д. 4635
Березанский Ю. М. 4849
Берлинков М. Л. 4507
Бицадзе А. В. 4671
Бланк Я. П. 5117
Блох А. Ш. 4560
Бобков А. С. 4400
Богданов В. С. 5065
Брудный Ю. А. 4617
Буданцев П. А. 4439
Буймола Г. Л. 5206
Бурьян В. Ю. 4483

В

Вабищевич Н. С. 5092 К
Вавилова А. С. 4373
Ван Цзай-шэнь 4611
Ватанабэ 4880
Взорова А. И. 4813
Вильдт Е. О. 4382 К
Вылкович В. 4736

Г

Газархи Л. А. 4751
Гальперин И. М. 4645
Гамкрелидзе Р. В. 4748
Гартштейн Б. Н. 4924
Гейдельман Р. М. 5125
Глатенок В. Д. 4403
Глушков В. М. 4514
Гнеденко Б. В. 4424, 4900 К, 4901 К
Голуб А. М. 4438
Гольдберг А. А. 4659, 4661, 4662
Гольденберг Л. М. 4744
Гринфельд А. Г. 5182

Д

Далецкий Ю. Л. 4680, 4843
Данилюк И. И. (I. I.) 4715—4718
Деев А. А. 4427
Депман И. Я. 4444 К
Джрбашян М. М. 4802
Ефимович Б. 4468
Димитров Ст. Г. 5093 К
Добровольский В. О. 4370
Добрушин Р. Л. 4888
Дружинин Н. К. 4404
Дударова Г. И. 4382 К
Дынин-Барковский И. В. 5054 К

Е

Евграфов М. А. 4767
Еганян А. 4420
Ершов Б. А. 4697
Ешуков Л. Н. 4690

Ж

Жмудь Э. М. 4503

З

Зарицкий М. О 4780
Заславский И. Д. 4452
Зингер А. А. 4945, 4946

И

Ибрагимов И. А. 4873
Игнатьев М. О. 4761, 4762
Икэбэ 4884
Ильин В. А. 4740 Д
Искандеров Р. И. 4521

К

Кавада 4530
Казьмин Ю. А. 4642
Кармазина Л. Н. 5216 К
Карпов К. А. 5215 К
Кацман А. Д. 4519
Киносита 4755
Кованцов Н. И. 5119
Кокарева Т. А. 4609
Кордемский Б. А. 4386 К
Кореньблюм Б. И. 4853
Коробков В. К. 4558
Коробов Н. М. 4366
Королюк В. С. 4868
Коротков С. Ф. 4756
Костиков Л. М. 4400
Костовский А. Н. 5066
Кочура А. И. 4758
Крейн С. Г. 4849
Кривошеин Л. Е. 4773
Крикунов Ю. М. 4651
Крипякевич Р. И. 5067
Круковский (Круковский-Синевич) Б. В. 4498
Куклес И. С. 4699
Куратовский К. 4674
Курочкина Л. В. 5216 К

Л

Ландсберг Р. С. 4382 К
Левитан Б. М. 4710—4714
Леонтьев А. Ф. 4655
Линник Ю. В. 4904, 4945, 4946
Линь Чжань-шэн 4694
Литвинчук Г. С. 4667
Лурсманашвили А. П. 4476
Лу Цзянь-кэ 4638
Лыкова О. Б. 4700 Д
Люстерник Л. А. 5180 К
Ляи Се Ен 4590

М

Малунцев И. М. 5089
Мамедов М. А. 4448 Д
Маневич Д. В. 4869
Маслов В. П. 4847
Меклер Я. И. 4563
Меламед В. Г. 5209 Д
Мельник С. И. 5185
Мельников Г. И. 4698
Меркин Д. Р. 4754
Мерман Г. А. 4746
Милошевич К. 4801
Минорский В. П. 4445 К
Миролюбов А. А. 4679
Михлин С. Г. 4612, 4824
Морозов Н. Ф. 4765 Д
Морозова Н. А. 4382 К
Мура 4755
Мухина Л. М. 4426
Мышкис А. Д. 5182

Н

Неделку М. 4569
Немыцкий В. В. 4371, 4695
Николеску М. 4669
Нодзаки Я. 4738 К
Новоселов С. И. 4443 К

О

Огава 4948
Огиевецкий И. И. 4633
Оно 4511
Орлов К. 5311 К
Остяну Н. М. 5149
Ота 4392

П

Паровиченко И. И. 4588
Пархоменко А. С. 4606 К, 4607 К
Пасынков Б. 4597
Первикова В. Н. 5088
Пламенков И. Я. 4614
Поваров Г. Н. (Г. М.) 4557, 4574
Поволоцкий А. И. 4768
Погребысский И. 4424
Понтрягин Л. С. 4693
Пердиян А. 5099
Пурышев М. М. 5112
Пятин Ю. М. 5258

Р

Разумихин Б. С. 4692
Разумовский С. Н. 5215 К
Рогинский В. Н. 4556
Розет Т. А. 4763
Рыжков В. В. 5122

С

Салехов Д. В. 4832
Сарманов И. О. 4864, 4865
Сатпаев К. И. 4367
Сикорский К. П. 4439
Симония В. Т. 4504
Синай Я. Г. 4878
Сиотани 4947
Скачков Б. Н. 4696
Скоробогатько В. Я. 4722, 4734
Смирнов В. И. 4398
Смирнов Н. В. 5054 К
Соболев Ю. С. 4697
Соколов Н. П. 4497
Солодовников А. С. 5137
Станоевич Ч. В. 4852
Студнев Ю. П. 4863
Ступина И. Д. 4624, 4625
Судзуки 5024

Т

Тарнопольський В. Г. 4831
Телеев С. А. 4809
Трайнин Я. Л. 5062 К
Тулянская Т. С. 4779
Турчанинова З. И. 4446 К

У

Ульянов П. Л. 4627, 4629
Урбаник К. 4881
У Сюэ-моу 4652

Ф

Фрейман Г. А. 4786
Фуксман Н. А. 4677 Д

Х

Хавинсон С. Я. 4656
Хальд А. 5055 К
Хапланов М. Г. 4667
Хаяси 5010
Хеброни 4772
Хинчин А. Я. 4901 К
Хохлов А. Т. 4428
Хриптун М. Д. 4817
Хусу А. П. 5008
Хухриков С. С. 4741
Хэ Цзянь-сюнь 4684

Ц

Цейтин Г. С. 4452
Церетели О. Д. 4613
Цуканов Т. Т. 4579 Д
Цыпкин Я. З. 4744

Ч

Чакалов Л. 4368
Чарин В. С. 4508
Чертков И. Я. 4438
Четверухин Н. Ф. 5090
Чжан Ли-цянь 4914, 4915
Чжао Сы-юань 4537, 4538
Чурсина А. 5073
Чэн Минь-дэ 4636
Чэнь Юнь-хэ 4636

Ш

Шайдуков К. М. 4637
Шаповалов В. П. 4681
Шаташвили С. Х. 4759, 4760
Шатунов М. П. 4737
Шилов Г. Е. 4848
Штейнгауз Г. 5171
Штейнис К. А. 5204

Щ

Щербина В. А. 4771
Щукина 4382 К

Э

Эйдинов М. И. 4506
Эппель Б. С. 4440
Эрдниев П. М. 4429

Ю

Юшкевич А. П. 4402

Я

Яглом А. М. 4891, 4892
Янов Ю. И. 5229
Яруткин Н. Г. 4589

A

Abad Flores O. L. 4480
Abhyankar S. 5103
Aczél J. 5124, 5131, 5208
Abam A. 5275
Aguiló Fuster R. 4708
Ahlfors L. V. 4673
Ahmad M. 4663
Akizuki Y. 5100
Alander M. 4789
Albrecht R. 4806
Alexandrov A. 5142
Alimenti C. 5098 К
Aliprandi G. 4492 К
Altman M. 4854
Amaro De Matös A. 4993
Amzulescu C. 4820
Anderson J. R. 5313 П
Anderson T. W. 4950
Aquaro G. 4837
Araki S. 4603
Arató M. 5020
Arus L. 4496
Averna A. 4491 К
Azpeitia A. G. 4654

B

Babbage D. W. 5167
Bachmann H. 4626 К, 5205
Bahadur R. R. 4905
Ballier F. 4549
Banaschewski B. 4516
Barnes E. S. 4466
Barrucand P. 5072
Battin R. H. 4785
Bay Z. 5245
Béda G. 5208
Behari R. 5129, 5130, 5151
Bellman R. 4495, 4678, 4816, 4986, 4987, 5181
Bennett B. M. 4968
Bereis R. 5165
Bergh J. van den 5251
Bergman S. 4707
Bermant A. F. 4794 К
Bernstein C. 4989
Bessaga C. 4840
Beth E. W. 4385 К
Bhatt S. N. 4630
Bhattacharya N. 4908
Bhattacharyya M. N. 4966
Birnbaum A. 4925
Birtwistle B. 5266
Blanuša D. 5162
Blij F. van der 4781
Bliss C. I. 4931
Blunden W. 5292
Boetti G. 4683
Bogdanowicz W. 4610
Bogoliubow N. N. 4857
Bolt R. L. 5079 К
Borsuk K. 4409
Bose P. K. 4910, 4926
Bovey L. F. H. 5294
Bower J. L. 4819
Boyland H. J. 4639
Brace J. W. 4833
Braconnier J. 4513
Brădeanu P. 4685
Bradley R. A. 4961
Bradt R. N. 4954
Brandner F. A. 4907
Brauner H. 5165
Brčič-Kostič M. 4470
Brelot M. 4670
Broadbent S. R. 4916
Brooker R. A. 5265
Brookes B. C. 5039
Bross I. D. J. 4958
Brousse P. 4729
Brownlee K. A. 5014
Brusotti L. 4396
Burg A. R. van der 4991
Burkhardt F. 5026
Burkill J. C. 4856
Burks A. W. 4561, 4572
Burnengo G. 4436,
Busemann H. 5136
Butler J. 4846
Buttafuoco E. 4554
Butzer P. L. 4855

C

Cacace F. 5058 К
Caius I. 4411
Călugăreanu G. 4649
Calvaer A. 5038
Cantoni L. 5120
Caplan L. N. 5260
Cărare T. 4830
Carlitz L. 4477
Carpmael C. 5047
Carruccio E. 4394
Cartan M. H. 4545
Cartwright D. S. 4949
Casal Grangei V. 5053
Cassina U. 4410
Castoldi L. 5043
Cederbaum I. 5259
Cestari R. 4488 К
Chaudhuri S. B. 4926
Cheng Min — teh 4636
Gheng Yung — ho 4636
Cherubino S. 4502 К
Choquet G. 4657
Chevalley C. 4417
Chiappalone V. 4489 К
Chung K. L. 4867
Chung Tong-der 5156
Clair H. S. 4784
Clark R. S. 5139
Climescu Al. 4494
Clos C. 5272
Cochran W. G. 4931
Cohen A. 4956
Cohen B. H. 4959
Cohn P. M. 4522 К
Constantinescu P. 4562
Cooper R. 4788
Cornish E. A. 4944
Courant R. 4735
Cox D. R. 4883, 4957
Cox J. W. 5232
Crosby R. L. 5244
Cusimano G. 4962

D

Daniel C. 5021
Dantzig G. B. 5002
Darwin J. H. 4909
Das S. C. 5196
Davidson D. 4972 К
Davies D. W. 5285
Davis M. E. 5288
De Finetti B. 5056 К
Del Punta V. 4992
Demény G. 5213 К
Dent B. M. 5266
Deprit A. 4834
Derman C. 4867
Derry D. 5175
Des Raj 4967
D'Evant A. 5201
Devi Singh K. 5132
Devooght J. 5052
Diananda P. H. 4782
Dickinson D. J. 4505
Di Franco S. 4491 К
Dinculeanu N. 4775
Dixmier J. 4551
Dock Sang Rim 4532
Dolbeault P. 5158, 5159, 5161
Domb C. 5186
Doss S. 4887
Downton F. 5031
Duff G. F. D. 4728
Dulmage A. L. 4977
Dumas M. 5042
Dunn P. F. 5253
Dwight H. B. 5218 К

E

Eagle A. R. 5001
Eckert O. 5237
Edwards D. B. G. 5264
Einari 5239
Elbert D. D. 5214 К
Emge B. F., Jr 5257
Erdélyi A. 4412
Erdös P. 4457
Erwe F. 4643, 4664
Everitt W. N. 4688
Everling W. 5191

F

Fadini A. 4490 К
Faith C. C. 4531
Faleschini B. 4616
Fan Ky 4835, 4979, 5190
Farchi V. 5102
Faulkner I. J. 5284
Feferman S. 4449
Fernandes Costa M. A. 5028
Ferreira Murteira B. J. 4993
Ferrell E. B. 5235
Fiechter A. R. 5080 К
Filipović F. 4442 К
Finzi A. 4413
Fisher M. E. 5186
Fisz M. 4871
Fladt K. 5085
Flagle C. D. 5253
Flanders H. 4499, 4523
Floyd E. E. 4598
Focke J. 4818
Forder H. G. 4787, 5086
Fort M. K., Jr 4601
Fortet R. 4885, 4886
Foulis L. F. 4593
Fourès-Bruhat V. 4704
Fox C. 4919
Franckx E. 5113
Frankel S. P. 5222
Freeman G. H. 4953
Freund J. E. 4896
Friedberg R. 4451
Friedman L. 4981
Frölicher A. 5160
Fromme T. 4571
Frucht R. 5177
Fürst D. 5051, 5210

G

Gaddum J. W. 4581
Gaffey W. R. 4822
Gaier D. 4807
Galantino F. 4952
Galvani O. 4705
Garcia España E. 4941
Garcia Tranque T. 4585
Garner W. R. 4936
Gasapina U. 5104
Gasparini Cattaneo I. 5148
Gáti J. 5208
Gerlough D. L. 5271
Ghelfond A. O. 4796 К
Gheorghiu Gh. T. 5115
Ghosh B. 5025
Gilbarg D. 4720
Girault M. 4876
Glibowski E. 5070
Glück V. 5212
Godeaux L. 5105, 5108
Godwin H. J. 4525
Goilav E. 4568
Goldstine H. H. 4418
Golusin G. M. 4675 К
Gonzalez del Valle A. 4573
Goodstein P. 4777
Gopegui L. R. de 5240, 5241
Gorowara K. K. 5111
Goto M. 4566
Gottschalk W. H. 4595
Goussinsky B. 5297
Govaerts P. 5279
Grabbe E. M. 5278
Gradstein I. S. 4797 К
Gradwell C. F. 5267
Grey L. D. 5268
Griffith J. L. 4826
Grisamore N. T. 5245
Grothendieck A. 4605 К
Guerrieri A. 5045
Gurland J. 4906

H

Haber S. 4691
Häberli E. 5005
Hacar Benitez M.-A. 5183
Hadwiger H. 5078 К
Haefliger A. 4604
Hajnal J. 4859
Halberstam H. 4458
Halder G. 5129, 5151
Haley A. C. D. 5290
Hall P. 4509
Hampton L. N. 5293
Hanawa S. 4518
Hartley H. O. 4935
Hassan Akbar-Zadeh 5141
Haupt O. 5166
Hayashi C. 5010
Hebroni P. 4772
Heflinger L. O. 4814
Hein H. J. 5295
Heinhold J. 4646
Heins M. 4650
Henriques P. H. 5094 К
Herstein I. N. 4544
Hicks P. A. 5253
Hida T. 4879
Higman G. 4509
Hirsch W. Z. 5057 К
Hlawka E. 4467
Hochnke H.-J. 4547
Hoffman A. J. 4982, 5190
Hoffmann W. 5225
Hofmann O. 5081
Hogben L. T. 4974 К
Holladay J. 4591
Holloway C., Jr 4955
Horák Z. 4870
Hosszú M. 5131
Hsiung Chuan-Chin 5128
Hua Loo-keng 4456
Hughes D. R. 5084
Hulanicki A. 4594
Hurst H. E. 5049
Hustý Z. 4800

I

Ikebe J. 4884
Infeld L. 4372
Inzinger R. 4369
Ioanin G. 4570
Ionescu Tulcea C. T. 4902 К
Iyer R. V. 4472, 4473

J

Jackson R. R. P. 5036
Jacobs W. 4983
Jadraque V. M. 4783
Jaeckel K. 4500, 4938
Jaffard P. 4515
Jakimovski A. 4803
James H. B. 5256
James R. C. 4838
Janet M. 4701, 4702, 4703
Jecklin H. 5018
Jedel P. H. 4393
Jerison M. 4541
Jewell Wn. S. 5000
Jha P. 5118
Johnson N. L. 4934
Jones E. E. 4752
Jónsson B. 4555
Julia G. 4419
Juncosa M. L. 4997
Just K. 5145

K

Kac M. 4628
Kahan T. 4706
Kalaba R. E. 4997
Kanngiesser W. 4877
Kao R. C. 4861
Kaplan J. Y. 5242
Karlin S. 4922, 4954, 4988
Kasch F. 4536
Kasten E. L. 4958
Kawada Y. 4523, 4529
Kawaguchi A. 5140
Kaye J. 5267
Keats J. A. 5011
Kelly P. J. 5178
Kendall D. G. 4890
Keogh F. R. 4632
Kiefer J. 4930
Kishi M. 4608
Kita T. 4620
Klein M. L. 5230
Kleinfeld E. 4552
Kobayashi S. 5153
Kodama T. 4539
Kohn J. J. 4769
Kondô M. 4621—4623
Koschmann A. 4895
Kraft C. 4923
Kramer C. Y. 4929, 4961
Krenmayr J. 5281
Kreyszig E. 4727
Krishna S. 5134
Kron G. 5188, 5189
Kruskal J. B., Jr 4580
Ku Y. H. 5207
Kudrewicz J. 4799
Kulagina O. S. 5298

L

Laenens J. 5076 К
Lagerqvist E. 5095 К
Lafon M. 4963
Lakshmana Rao S. K. 4757
Lal D. N. 4862
Lamprecht E. 4460
Larrivee J. A. 5308 К
Latil P. de 4384 К
Läuchli P. 5203
Lax A. 4735
Lax P. D. 4731
Lebesgue H. 4997
Le Cam L. 4923
Lee Seng-Lip 4753
LeLong-Ferrand J. 5147
Lenz H. 5172
Leopoldt H.-W. 4524
Leptin H. 4550
Leuenberger F. 5059 Д
Levi E. 4395
Levi F. W. 5170
Levinson N. 4691
Lewis W. D. 5273
Lewandowski Z. 5173
Li C. C. 4943
Lieberman G. J. 4969, 4973 К
Lin J. S. 4694
Linden C. N. 4658
Linis V. 5179
Lipiński M. 5064
Lippmann H. 5133
Lister W. G. 4551
Ljapunow A. A. 5298
Löfgren L. E. 5255
Loopstra B. J. 5261
Lord F. M. 4927
Lorenz I. M. 4745
Louhivaara I. S. 4730
Lo Voi A. 5075 К
Lubin A. 5012
Ludwig G. 5145
Lumer G. 4850, 4851
Lyndon R. C. 4510

M

McCulley W. S. 4778
Macduff J. N. 5252
McGill W. J. 4936
Machado A. 5096 К
McNaughton R. 4561
Madic P. B. 5254
Magenes E. 4721
Magness T. A. 4894
Magnus W. 4749
Makai E. 4798
Malgrange B. 5163
Malmquist S. 4996
Manaira M. 5030
Manaresi F. 4634
Manunza F. 5211
Marcus F. 5116
Marcus M. 4501, 4842
Marinescu Gh. 4792 К
Martinelli E. 5152
Masuda K. 4534
Mataix Aracil C. 4790 К
Matouschek F. 5019
Matschinski M. 5187
Matsumura H. 5100, 5109
Mattila S. 4928
Matuszewska W. 4839
Maximon L. C. 4811, 4812
Meinesz M. 5034
Melick J. M. 5314 П
Mende G. 4377
Mergheim J. 5071
Mertz P. 4898
Meschkowski H. 4380 К
Meyer H. I. 5270
Meyer M. A. 5249
Middleton D. 5032
Middleton M., Jr 5263
Mihoc G. 4902 К
Mikami M. 5127
Milkman J. 4815
Miller I. 4896
Miller L. H. 5077 К
Miranda R. 4776
Mishra R. S. 5134, 5143
Mitas G. 4540
Mitrović D. 4653
Mocanu P. 5135
Moch F. 4454, 4455
Moessner A. 4471, 4475
Moisil Gr. C. 4564
Monteiro A. 4553
Montgomery D. 4599
Moore P. G. 4913, 4971
Morgan G. W. 4811
Morgan H. C. 5230
Morgenstern O. 5003 К
Morice E. 4932
Moser L. 4479
Mostow G. D. 4517
Mourier E. 4886
Moyls B. N. 4842
Mroček V. 4442 К
Mueller R. 4578 К
Mukhin I. S. 5299
Muniruzzaman A. N. M. 4940
Murty V. N. 4951
Musielak J. 4615
Musti R. 4554
Myrberg P. J. 4415

N

Nagata M. 5109
Nakano N. 4535
Nalli P. 5123
Narasimhan M. S. 4724—4726
Narbutt V. M. 4820
Natanson I. P. 4618 К
Neagu F. Gh. 4379
Needham J. 4390, 4391
Newsom J. B. 5293
Ničе V. 5082
Nicholson J. L. 5013
Nijenhuis A. 5160
Nisigaki H. 4672
Nodelman H. M. 4447 К
Noether G. E. 4933
Nomizu K. 5153
Nordhaus E. A. 4581
Nott C. W. 5294

O

Oberhettinger F. 4828 К
Oderfeld J. 5029
Ogawa J. 4948
Oldenburger R. 5192, 5193
Olivotto I. 4435
Olibummo A. 4823
Onicescu O. 4902 К, 5126
Ore O. 4583, 4584
Organick E. I. 5270
Orlicz W. 4615, 4839
Osburn H. G. 5012
Ostrom T. G. 5083
Ostrowski A. M. 4644
Ou Šo—mo 4652

P

Pacheco de Amorin D. 4376
Parasiuk O. S. 4857
Parchomenko A. S. 4607 К
Pawłowski Z. 4912
Pearce S. C. 5048
Pearson C. E. 4770
Peck J. E. L. 4977
Pegna E. 5098 К
Pełczyński A. 4840
Pennell E. S. 5238
Perret R. 4829
Person L. B. 5312 П
Pfluger A. 4665
Phelps R. R. 4841
Piehler J. 4469
Piene K. 4432
Pignedoli A. 4793 К
Pire J. 5279
Plunkett R. L. 4592 4600
Pollmar C. H. 4561 4572
Polster P. 4437
Popovici C. P. 4567
Popper K. R. 4866
Pöschl K. 4766
Pozzolo Ferraris G. 511
Prom G. J. 5244
Pursell L. E. 4548
Putnam C. R. 4874

Q

Quenouille M. H. 4899

R

Rabson G. 4541
Rademacher H. 4484
Radziszewski K. 5173
Rajagopal C. T. 4804
Rajchman J. A. 5236
Ram S. 4920
Raos N. 5217 К
Rapcsák A. 5138
Rasiowa H. 4453
Razzi A. 4407
Rebés S. 4791 К
Rédei L. 4543
Reeb G. 4604
Rényi A. 4858, 485 4903 К
Resnikoff G. J. 496 4973 К
Resch D. 4709
Reuter G. E. H. 48
Reza F. M. 4743
Ribenboim P. 4533
Ricci G. 4487 К
Righi R. 4559
Ringrose J. R. 4836
Roeser E. 5091 К
Rollof Y. 5040
Roman V.-H. 5280
Romani J. 5022
Rósciszewski J. 5198
Rosenberg H. 4433
Rossi F. S. 4482
Rothe R. 4795 К
Rothstein W. 4668
Roy P. M. 4939
Rubin H. 4922, 4950
Rüdiger D. 4401
Rufener E. 5044
Ryshik I. M. 4797 К

S

Sadowski W. 5219 К
Sakoda J. M. 4959
Saksena K. M. 4825
Salem R. 4628
Salveson M. E. 4999
Salzmann H. 5157
Samelson H. 4599
Sampford M. R. 4918
Samson E. W. 4578 К
Samuel P. 4375
Samuelson P. A. 4984
Sanden H. von 5097 К
Santaló L. A. 5176
Sargent W. L. C. 4808
Sarkadi K. 5009
Satō H. 4893
Sauvage A. 5286
Schäfke F. W. 4845
Schillo P. 4422
Schneider T. 4485 К
Schrimpf H. W. 5223
Schurz J. 5287
Schützenberger M.-P. 4976 Д
Schwartz M. 5033
Schwarz Š. 4520
Scott D. 5168
Scott W. E. 5290
Seal K. C. 4872
Segre B. 4406
Seifert G. 4686
Serrin J. 4719, 4720
Severi F. 4405, 5101, 5107
Shapiro H. N. 4457
Shen Chi-neng 4742
Shimada S. 5007
Sikorski R. 4453
Sillitto G. P. 4964
Singal M. K. 5130
Siotani M. 4947
Słupecki J. 5070
Smith F. W. 4447 К
Sobczyk A. 4591
Sobel M. 4970
Sodoro J. F. 5296
Sonnenschein J. 4805
Souriau J.-M. 5144
Spampinato N. 5106
Spector C. 4450
Speiser A. 5246, 5306 К
Spindelberger W. 5195
Spitzer F. 4860
Springer G. 4640
Srivastav R. P. 4660
Stanojevic C. 4875
Steinhaus H. 5174
Stevens J. 4399
Stibitz G. R. 5308 К
Stickell E. E. 5283
Straszewicz S. 5164
Straus E. G. 5178
Strubecker K. 5114
Stumpers F. L. H. M. 5041
Stuvel G. 5006
Sunde E. D. 5035
Suppes P. 4972 К
Suzuki G. 4985
Suzuki J. 4587
Suzuki V. 5024
Szmydt Z. 4732
Szüsz P. 4464

T

Takács L. 4882, 5023, 5037
Takagi S. 4810
Takasu T. 4672
Tannaka T. 4526
Teichroew D. 4937
Tenca L. 5087
Terada F. 4527
Thacher H. C., Jr 5197
Thébault V. 4481, 5069
Theil H. 4990
Thomas J. 4689
Thompson R. 4501
Thomson G. W. 4965
Thyssen M. 4733
Tintner G. 4995
Tonnelat M. A. 5146
Topan Gh. 4434
Török S. 5208
Tricomi F. G. 4774 К
Trucco E. 4897
Truesdell C. (Ed.) 4389 ЖК
Tukey J. W. 4931
Turán P. 4459

U

Uesugi T. 5155
Uhlmann W. 5199
Unkelbach H. 4647, 4648

V

Vaida D. 4565
Vajda S. 4911
Vander Elst N. 5279
Van Meter D. 5032
Venning B. H. 5250
Vernić R. 4747, 4764 К
Vervaecke T. 5060
Vessereau A. 5015
Vidal Abascal E. 5061
Vigil y Vázquez L. 4631
Villa M. 5121
Vitalbi L. 4582
Vivien F. 5074
Vocino L. 4478
Voelker D. 4461, 4462

W

Wagner Hans 4750
Wagner Harvey M. 4980
Wake W. C. 5050
Walfisz A. 4486 К
Walsh J. E. 4978
Walter W. 4723
Walther A. 5225
Warren D. W. 4561, 4572
Wasow W. R. 4821, 5184
Watson A. F. 5307 К
Watson G. L. 4465
Weil A. 4417
Weiss H. K. 4998
Weizsäcker C. F. von 4378
Wermer J. 4641, 4844
West C. F. 5291
Weston J. D. 4619
Whaples G. 4493
Wheeler D. J. 5200
Whitin T. M. 5004 К
Wigner E. P. 4418
Wijsman R. A. 4921
Wilkes M. V. 5200
Williams F. K. 5230
Williams R. E., Jr 5027
Williams R. F. 4596
Winthrop H. 4374
Wise J. 4942
Wiseman R. T. 5282
Wolff R. 5169
Wolfowitz J. 4930
Wright J. B. 4561, 4572

X

Xeroudakes G. 4471

Y

Yang C. T. 4599
Yano K. 5154
Yaspan A. J. 4981
Yo Ging-tzung 4602
Yokota I. 4512
Yoshii T. 4542

Z

Zeckendorf E. 4474
Zelen M. 4960
Zetterberg L. H. 4861
Zindler H.-J. 4917
Zlámal M. 4682, 4687
Zwinggi E. 5046
Zwirner G. 4441 К

Технический редактор *Р. М. Денисова*